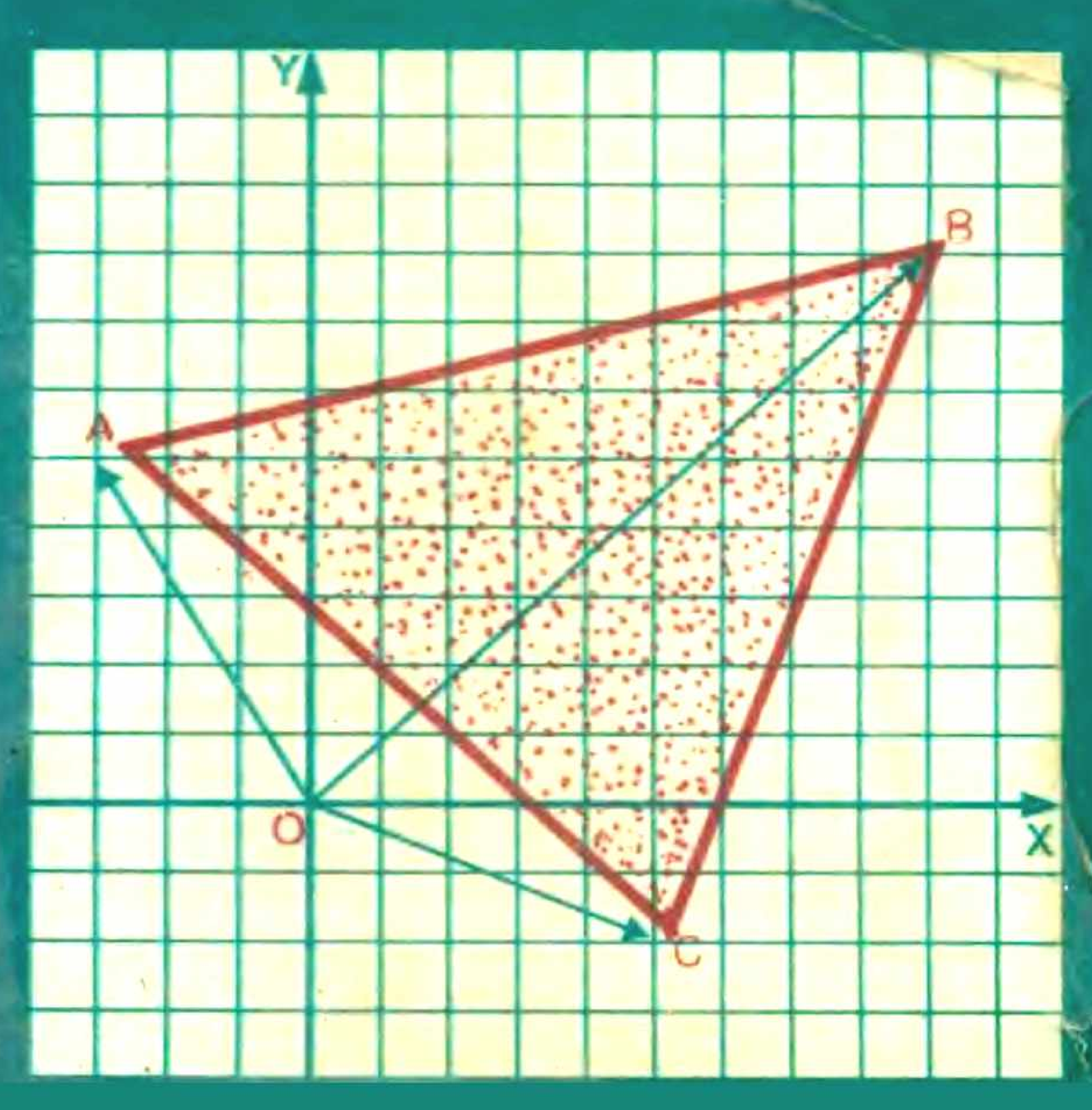
R. FIGUEROA G.

VECTORES Y MATRICES



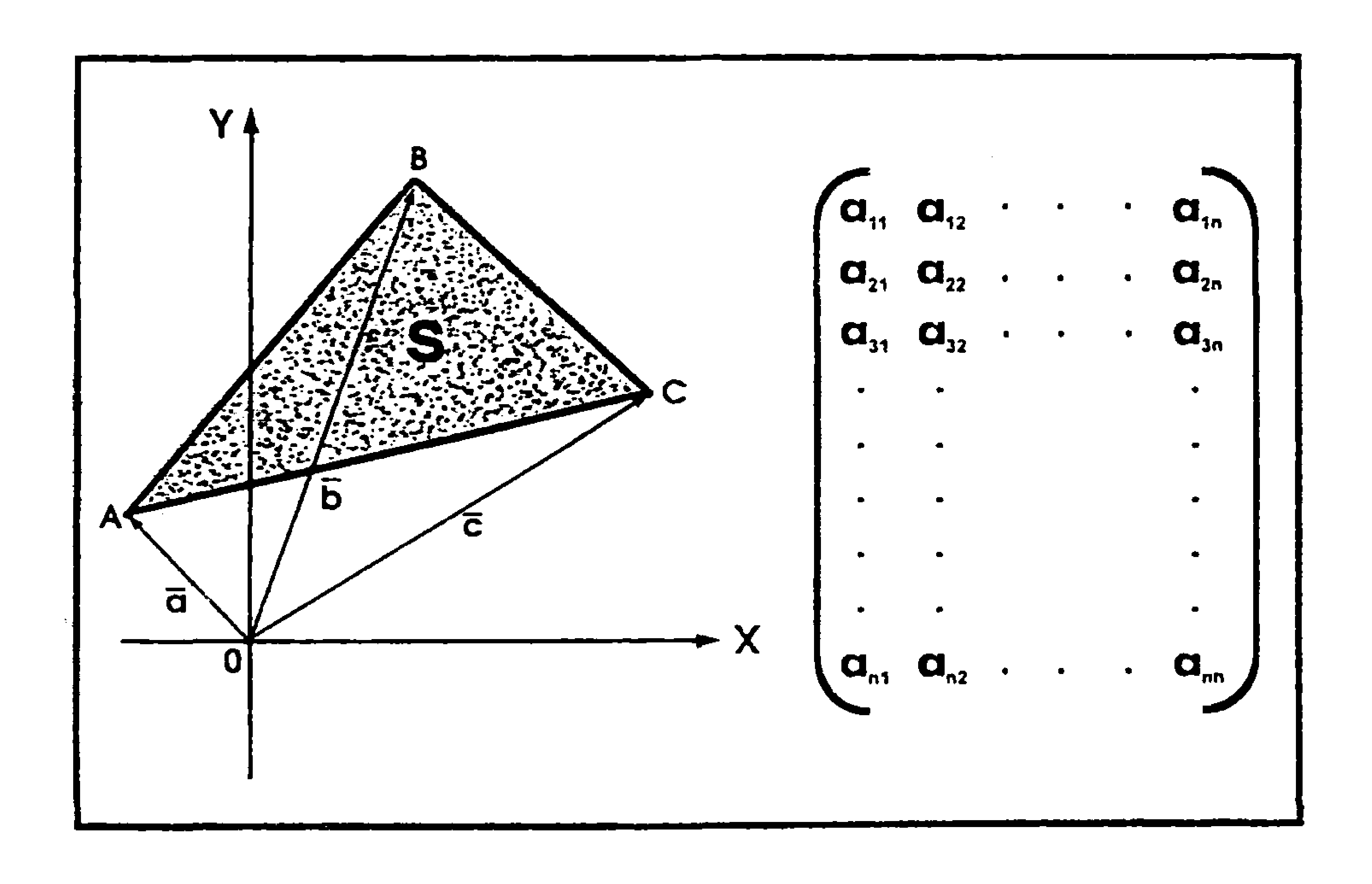
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Editorial AMERICA

MATEMATICA BASICA II

VECTORES Y MATRICES

R. FIGUEROA G.



Editorial AMERICA LIMA - PERU

MATEMATICA BASICA 2
VECTORES Y MATRICES

Primera Edición : Marzo 1985
Segunda Edición: Marzo 1988

Reimpresión de la
Segunda Edición : Agosto 1990
Agosto 1992
Agosto 1993

Impreso por :

EDICIONES E IMPRESIONES GRAFICAS AMERICA S.R.L.
Jr. Loreto Nro. 1696 Breña (Lima 5). Telefax 325827

Revisado por : **RICARDO FIGUEROA GARCIA**
Egresado de la Universidad Nacional de Ingenería
Facultad de Mecánica

PROLOGO

Dada la acogida que le dispensaron los estudiantes a las ediciones preliminares de esta obra, explica la aparición de esta nueva edición ampliada, en la que se han hecho las modificaciones necesarias con el propósito de hacer más asequible su lectura, pues la obra proporciona una excelente preparación para el estudio de cursos superiores como el Análisis Matemático y sobre todo, el Algebra Lineal.

El estudiante que ha llegado a este curso ya tiene conocimiento del Algebra y la Geometría Elemental. En el primer capítulo se desarrolla la relación que existe entre estos dos grandes campos de la matemática; esto es, el estudio de la técnica de los vectores. Los sistemas de coordenadas que se utilizan, primero el bidimensional (plano) se extiende después al tridimensional (espacio), indicando claramente el camino para generalizar los conceptos a otras dimensiones, y luego finalizar, haciendo un breve estudio de los espacios vectoriales.

En el segundo capítulo se hace referencia al estudio de las matrices de acuerdo con su dimensión o tamaño y sus aplicaciones a la solución de ecuaciones lineales.

En el tercer capítulo se expone la teoría de los determinantes, de particular importancia en la teoría de las matrices y sus numerosas aplicaciones.

Con este libro se tiene la intensión de desarrollar la capacidad del estudiante y crear en él hábitos de rutina matemática; esto es, la exposición teórica es acompañada de numerosos ejemplos y ejercicios con sus respuestas adjuntas, los cuales, indudablemente, ayudarán al estudiante a adquirir destreza y afirmar el dominio de la materia. Por ello, recomiendo que los ejercicios propuestos se resuelvan sistemáticamente, toda vez que su solución obedece a un criterio de aprendizaje progresivo.

Mi reconocimiento a todos los amigos profesores que tuvieron la gentileza de hacerme llegar sus sugerencias y observaciones a las ediciones preliminares. Sus críticas constructivas hicieron posible corregir, mejorar y ampliar esta nueva edición.

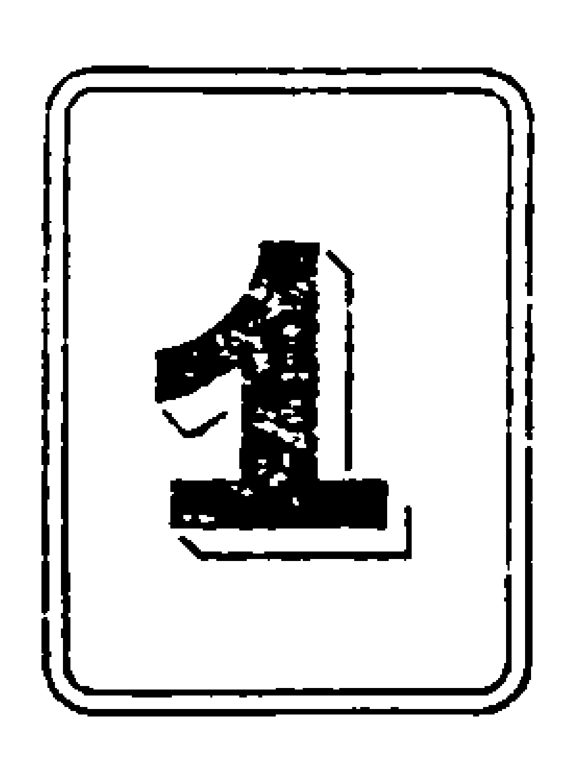
Ricardo Figueroa García

CONTENIDO

1 VECTORES

2 MATRICES

3 DETERMINANTES



VECTORES

1.1 INTRODUCCION

Hace muchos años los griegos desarrollaron la geometría elemental. Crearon una manera sistemática de analizar las propiedades de los puntos, las rectas, los triángulos, las circunferencias y otras configuraciones. Todo su trabajo fué sintetizado en "Los elementos de Euclides" , que han constituido las bases de la geometría plana y del espacio hasta nustros días. En tiempos recientes, se han agregado otros conjuntos de axiomas y postulados, cuyo efecto han sido mejorar la estructura lógica, pero, en esencia, la materia ha permanecido idéntica. En 1637, el filósofo y matemático francés René Descartes revolucionó la matemática de su época al crear la Geometría Analítica introduciendo las coordenadas rectangulares, llamadas también en su memoria, coordenadas cartesianas; logrando así algebrizar las ideas geométricas de sus antecesores. La idea de este método consiste en traducir, mediante un sistema de coordenadas, los conceptos y relaciones geométricos a conceptos y relaciones algebraicas, y viceversa. En este capítulo estudiaremos el método anlítico para lo cual precisamos familiarizarnos con el concepto de vector, un instrumento de gran valor en la matemática moderna.

1.2 COORDENADAS RECTANGULARES

En estudios anteriores de matemáticas definimos el producto cartesiano A×B, de los conjuntos A y B, como el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) en los cuales la *primera componente* x , es elemento de A y la *segunda componente* y, es elemento de B. Por ejemplo, si A={2,3,5} y B={1,3}, entonces:

$$A\times B = \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),(5,1),(5,3)\}$$

Un conjunto de pares ordenados A×B se puede visualizar como una red de puntos, tal como se indica en la Figura 1.

Como los pares ordenados de números reales son elementos del producto cartesiano R×R, a este conjunto se le denota por R^2, es decir:

$$R^2 = R\times R = \{(x,y)/x\varepsilon R \text{ , } y\varepsilon R\}$$

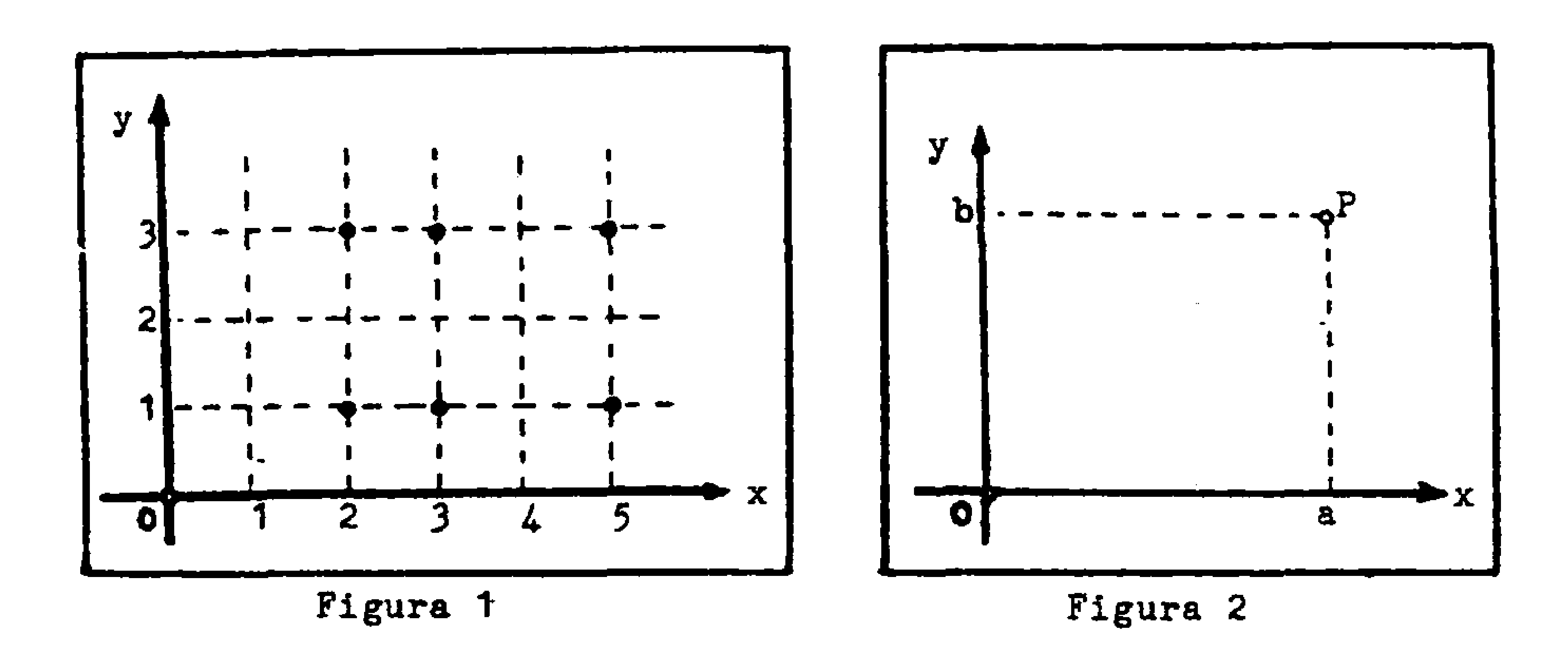


Figura 1 Figura 2

Obsérvese, en la Figura 2, que cada par ordenado (a,b) en R^2 se puede asociar en forma única con un punto P del plano mediante un sistema de coordenadas rectangulares, al que se llama también *sistema de coordenadas cartesiano.*

El asociar a cada par ordenado (a,b) un punto P se lleva a cabo como sigue:

a) Por un punto que corresponde al número a sobre el eje horizontal (eje de abscisas) se traza una recta paralela al eje vertical.

b) Por el punto que corresponde al número b sobre el eje vertical (eje de ordenadas) se traza una recta paralela al eje horizontal.

c) Al punto de intersección P de estas rectas se le asocian las *coordenadas* (a,b). P se llama "la gráfica de (a,b)" o simplemente "el punto (a,b)".

En adelante, a los elementos de R^2 los denotaremos con letras mayúsculas: A,B,C, etc. Por ejemplo: $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$.

DEFINICION 1. Dados dos pares ordenados $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$ en R^2, la suma de A y B, denotado por A+B, está definido por:

$$A+B = (a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2)$$

Se puede observar que la adición de dos pares ordenados de números reales es otro par ordenado de números reales.
Por ejemplo, si $A=(2,-5)$ y $B=(2,3)$, entonces:

$$A+B = (2,-5)+(2,3) = (2+2,-5+3) = (4,-2)$$

DEFINICION 2. Dado un número real r, llamado escalar y el par ordenado $A=(a_1,a_2)$, se denomina producto del escalar r por A, al par ordenado:

$$rA = r(a_1,a_2) = (ra_1,ra_2)$$

Obsérvese también que $rA\in R^2$.
Por ejemplo, si $r=-2$ y $A=(-1,3)$, entonces:

$$rA = -2(-1,3) = [(-2)(-1),(-2)(3)] = (2,-6)$$

PROPOSICION 1.1 Dados los pares ordenados $A,B,C\in R^2$ y los escalares $r,s\in R$, se cumplen las siguientes propiedades para la adición de pares ordenados y la multiplicación de escalares por pares ordenados:

A_1: Si $A,B\in R^2 \rightarrow (A+B)\in R^2$ (Clausura)

A_2: Si $A,B\in R^2 \rightarrow A+B = B+A$ (Conmutatividad)

A_3: Si $A,B,C\in R^2 \rightarrow (A+B)+C = A+(B+C)$ (Asociatividad)

A_4: $\exists!\theta\in R^2/A+\theta = \theta+A = A,\ \forall A\in R^2$ (Elemento identidad para la adición de pares)

P_1: Si $r\in R$ y $A\in R^2 \rightarrow rA\in R^2$

P_2: $r(A+B) = rA+rB\ ,\ \forall r\in R\ ,\ \forall A,B\in R^2$

P_3: $(r+s)A = rA+sA\ ,\ \forall r,s\in R\ ,\ \forall A\in R^2$

P_4: $(rs)A = r(sA)\ ,\ \forall r,s\in R\ ,\ \forall A\in R^2$

P_5: $\exists 1\in R/1A = A\ ,\ \forall A\in R^2$

A_5: $\forall A\in R^2,\ \exists!-A\in R^2/A+(-A) = (-A)+A = \theta$ (Elemento inverso para la adición de pares)

Se recomienda al lector demostrar cada una de estas propiedades haciendo uso de las propiedades respectivas de los números reales.

El conjunto R^2 de pares ordenados de números reales, junto con las operaciones de suma y producto definidas anteriormente recibe el nombre de *espacio vectorial bidimensional* sobre el conjunto de los números reales R y se denota por V_2. A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores; por tanto, podemos afirmar que el par ordenado (x,y) es un vector.

1.3 VECTORES EN EL PLANO

Un vector en el plano es un par ordenado de números reales (x,y), donde x recibe el nombre de primera componente (coordenada) e y se llama segunda componente. A los vectores en el plano se les denota por letras minúsculas o mayúsculas con una flecha en la parte superior. Por ejemplo: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$, etc.

Dado dos vectores en V_2: $\vec{a}=(x_1,y_1)$ y $\vec{b}=(x_2,y_2)$, podemos definir

i) Si $\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ (Igualdad de vectores)

ii) $\vec{a} + \vec{b} = (x_1+x_2 \ , \ y_1+y_2)$ (Def. 1)

iii) $r\vec{a} = (rx_1,ry_1)$ (def. 2)

jemplo 1. Si $\vec{a}=(-2,3)$ y $\vec{b}=(4,-1)$, hallar el vector $\vec{v}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

Solución. $\vec{v} = 2(-2,3) + 3(4,-1)$
$= (-4,6) + (12,-3)$ (Def. 2)
$= (-4+12 \ , \ 6-3)$ (Def. 1)
$= (8,3)$

Ejemplo 2. Hallar el vector $\vec{x}$ en la ecuación: $2(-1,2)+3\vec{x}=(4,-5)$.

Solución. Supongamos que: $\vec{x} = (x_1,x_2)$
$\rightarrow 2(-1,2) + 3(x_1,x_2) = (4,-5)$
$\rightarrow (-2,4) + (3x_1,3x_2) = (4,-5)$ (Def. 2)
$\rightarrow (-2+3x_1 \ , \ 4+3x_2) = (4,-5)$ (Def. 1)

Por la igualdad de vectores se tiene:

$-2+3x_1 = 4 \leftrightarrow x_1=2$

$4+3x_2 = -5 \leftrightarrow x_2=-3$

Por tanto, el vector buscado es: $\vec{x} = (2,-3)$

Ejemplo 3. Hallar todos los números reales r y s tales que:
$r(4,-6) + s(5,-2) = (7,6)$

Solución. $(4r,-6r) + (5s,-2s) = (7,6)$ (Def. 2)
$(4r+5s\ ,\ -6r-2s) = (7,6)$ (Def. 1)

Por la igualdad de vectores: $4r+5s = 7$
$-6r-2s = 6$

Resolviendo el sistema obtenemos: $r=-2$, $s=3$

1.4 REPRESENTACION GEOMETRICA DE UN VECTOR EN EL PLANO

Geométricamente un vector $\vec{v}=(x,y)$ se representa en el plano mediante un segmento de recta dirigido o una flecha. La flecha se llama *vector geométrico*. Un vector $\vec{v}\varepsilon R^2$ puede interpretarse como una traslación descrita por un par ordenado de números reales (x,y), la primera componente indica un desplazamiento paralelo al eje X y la segunda un desplazamiento paralelo al eje Y. Considerando que una traslación tiene un punto *inicial o de partida* S del plano, y un *punto final o de llegada* en T, cada vector v=(x,y) tiene un número infinito de representaciones geométricas en el plano, todas ellas son paralelas, de igual longitud e igual sentido. (Figura 3)

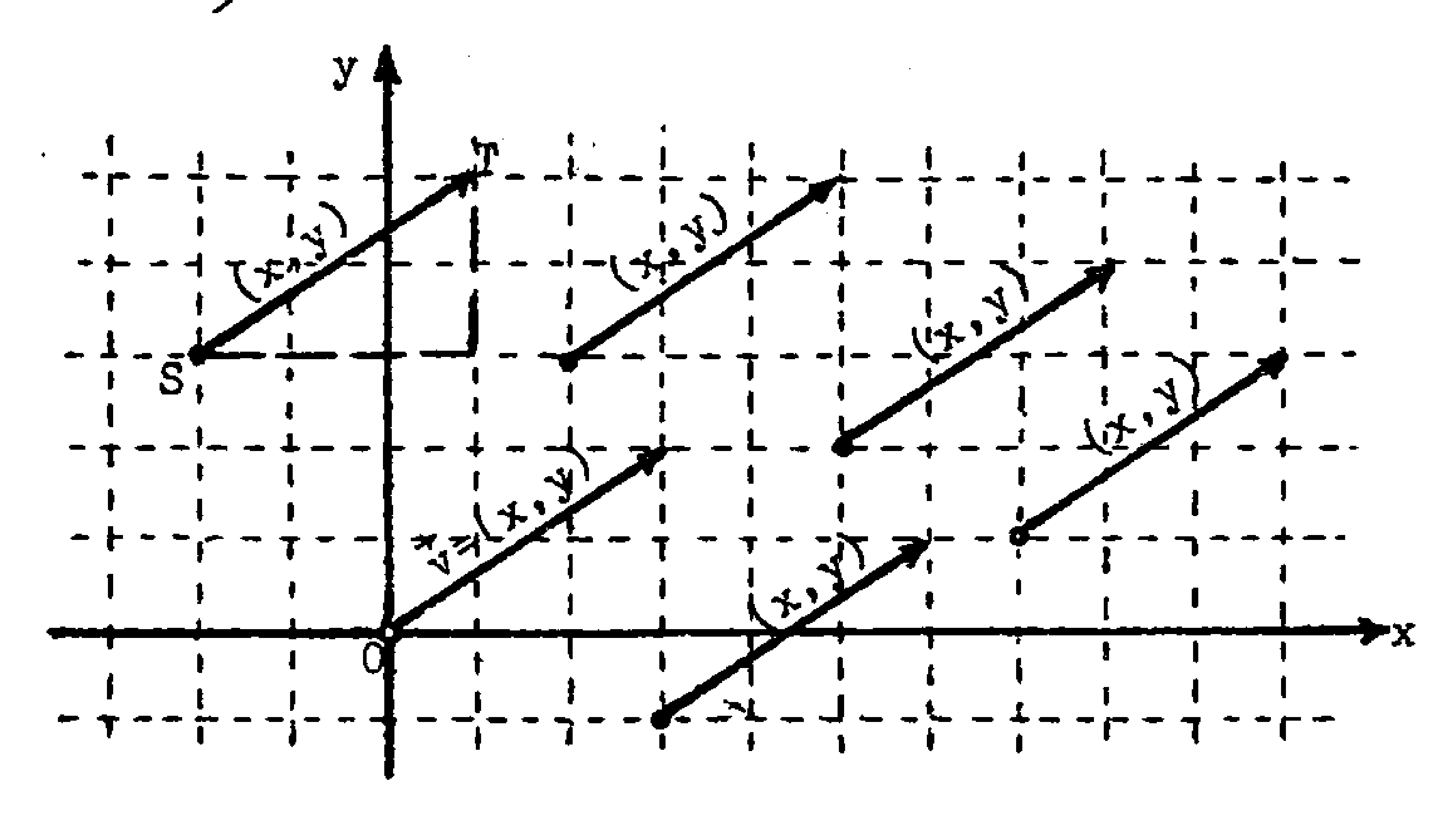


Figura 3

La flecha asociada al par (x,y) que tiene un punto inicial en el origen se denomina *representación ordinaria* de (x,y) y se dice que la flecha o vector tiene posición ordinaria o estandard.

DEFINICION 3. VECTOR LOCALIZADO

Un vector localizado en R^2 es una pareja de puntos P_1 y P_2 que se indican con $\overrightarrow{P_1P_2}$ para los cuales P_1 es el punto de partida o inicial y P_2 es el punto de llegada o final (Figura 4). Si una flecha tiene como punto inicial a $P_1(x_1,y_1)$ y a $P_2(x_2,y_2)$ como punto final, entonces la flecha P_1P_2 es una representación geométrica del vector $\vec{v}=(x,y)$, donde:

$$(x,y) = (x_2-x_1 \, , \, y_2-y_1) \qquad (1)$$

Si consideramos a los puntos P_1 y P_2 como radio vectores entonces, según la definición 3:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{P}_2-\vec{P}_1$$

$$\leftrightarrow \quad \vec{P}_2 = \vec{P}_1 + \vec{v} \qquad (2)$$

Esta ecuación nos permite conocer analíticamente el punto final P_2 del vector $\vec{v}$ conociendo, desde luego, el punto inicial y las componentes del vecor $\vec{v}$.

DEFINICION 4. VECTOR DE POSICION

Todo vector que tiene posición ordinaria, es decir, al vector que tiene su punto inicial en el origen se llama *vector de posición o radio vector*.

Observaciones:

1. El vector localizado $\overrightarrow{P_1P_2}$ es equivalente al vector de posición $\vec{v}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$. La ley del parlelogramo hace evidente esta equivalencia. (Figura 5)
2. La notación P(x,y) identifica un punto en el plano y sus coordenadas (x,y) identifican a un vector o a su representación geométrica.

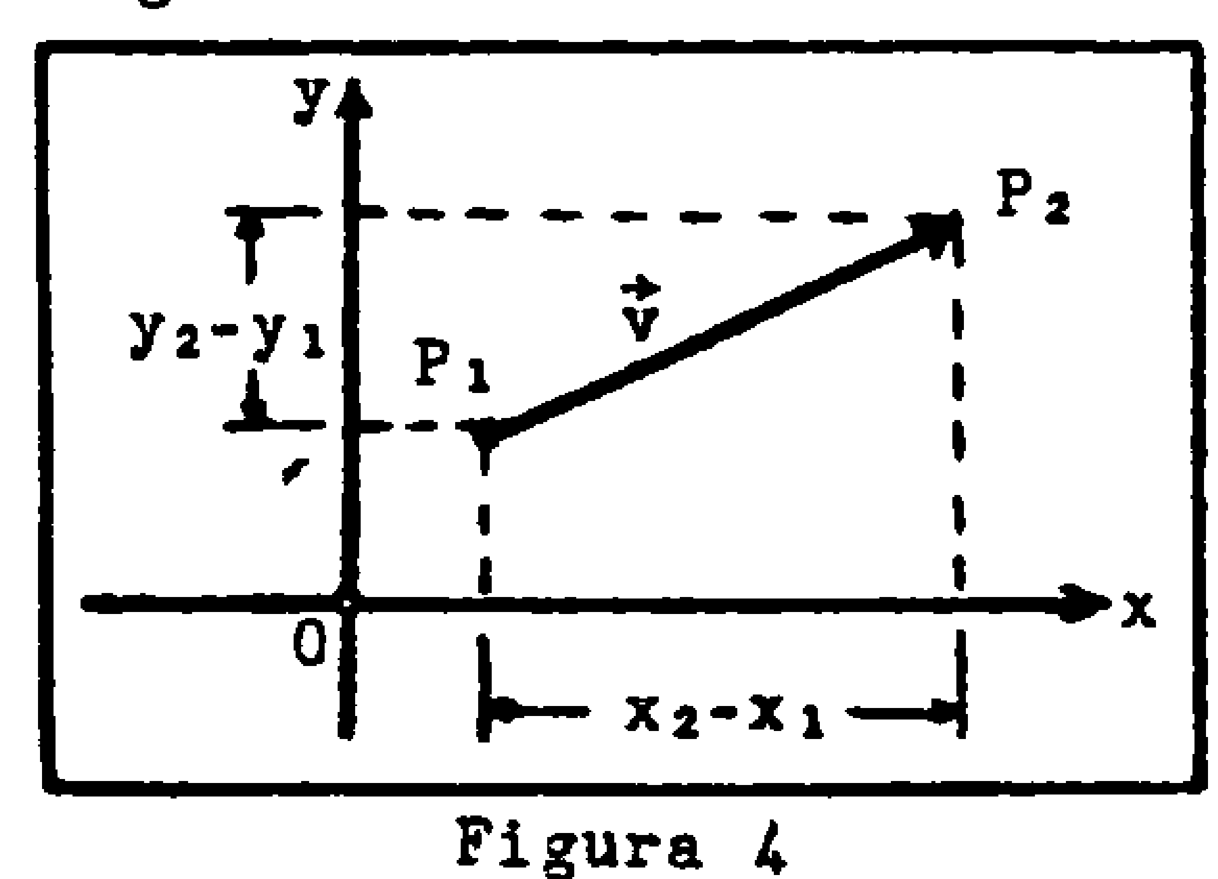


Figura 4

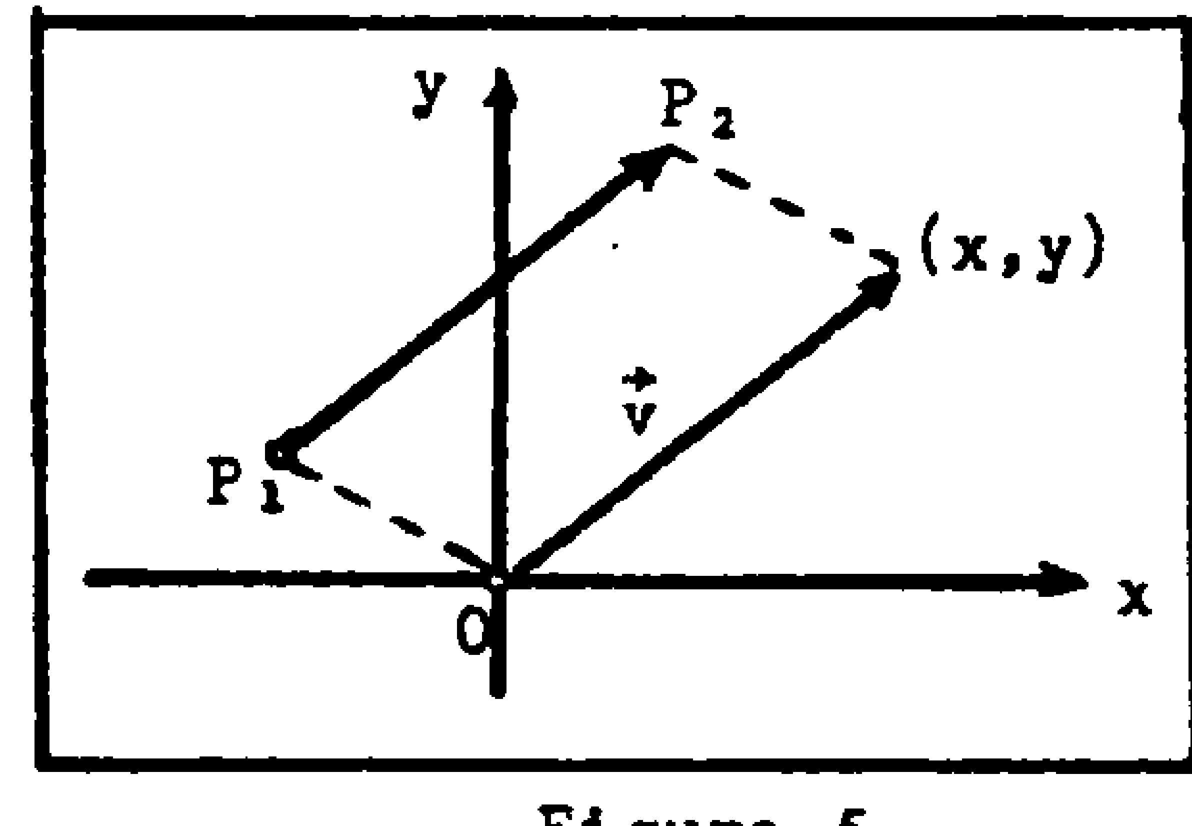
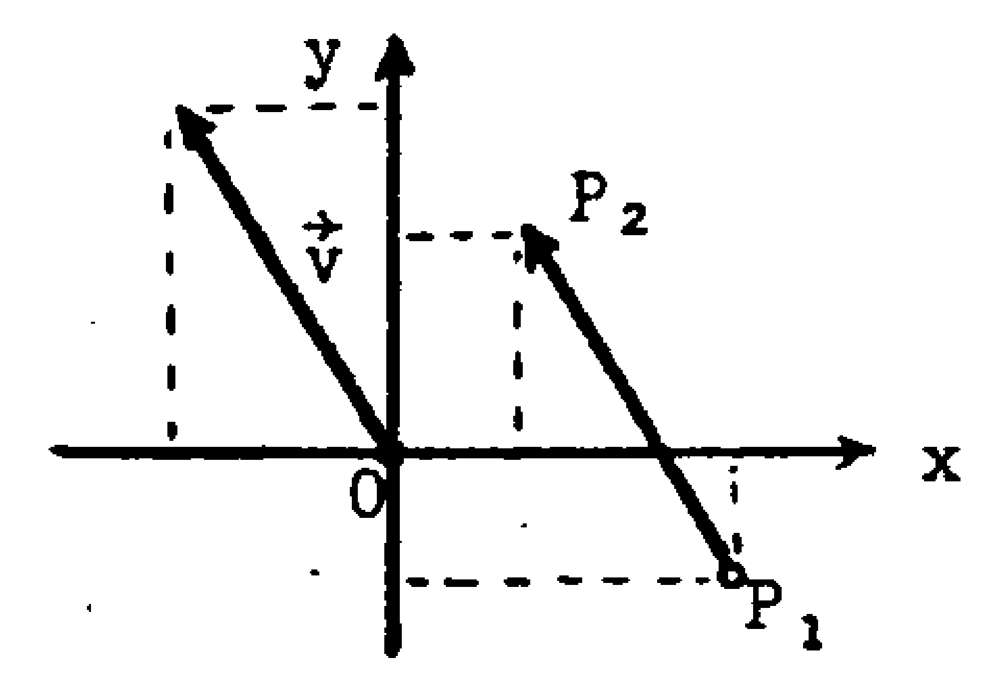


Figura 5

Ejemplo 1. Hallar el vector de posición de $\overrightarrow{P_1P_2}$ si $P_1(5,-2)$ y $P_2(2,3)$. Interpretar geométricamente el resultado.

Solución. Según la definición 3:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$
$$= (2,3)-(5,-2)$$
$$= (2-5,3+2)$$
$$= (-3,5)$$



Ejemplo 2. Un vector que va de $R(3,5)$ a $S(x,y)$ representa al mismo vector que va de $S(x,y)$ a $T(8,1)$. Hallar $S(x,y)$.

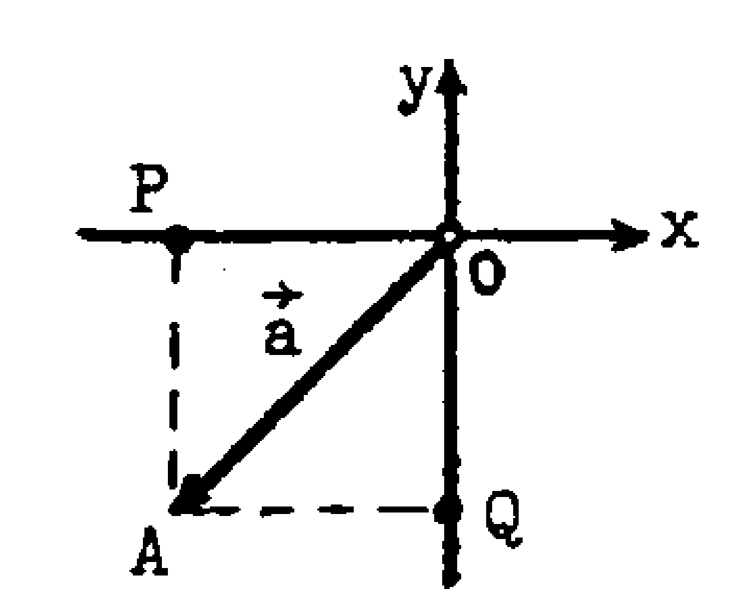
Solución. Sean: $\vec{a} = \overline{RS} = \vec{S} - \vec{R} = (x,y)-(3,5) = (x-3,y-5)$

$$\vec{b} = \overline{ST} = \vec{T} - \vec{S} = (8,1)-(x,y) = (8-x,1-y)$$

Si $\vec{a}=\vec{b} \rightarrow (x-3,y-5)=(8-x,1-y) \leftrightarrow \begin{cases} x-3=8-x \rightarrow x=11/2 \\ y-5=1-y \rightarrow y=3 \end{cases}$

Por tanto, el punto buscado es: $S(11/2,3)$

Ejemplo 3. En la figura adjunta se tiene: $\overline{OP}=x^3$ y $\overline{OQ}=x^2y$. Si $\vec{a}=\vec{b}$, siendo $\vec{b}=(y^3+19,6+xy^2)$. Hallar el valor de $x+y$.



Solución. Las componentes del vector $\vec{a}$ son $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ $\rightarrow$ $\vec{a}=(x^3,x^2y)$

Luego, si $\vec{a}=\vec{b} \leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3+19 \rightarrow x^3-y^3=19 & (1) \\ x^2y = 6+xy^2 \rightarrow x^2y-xy^2=6 & (2) \end{cases}$

Multiplicando por 3 la ecuación (2) y restando de (1) se tiene:

$$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=1 \rightarrow (x-y)^3=1 \text{ , de donde: } x=y+1 \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1) obtenemos:

$$y^2+y-6=0 \leftrightarrow y=-3 \text{ ó } y=2$$

Descartamos la segunda alternativa ya que en la figura dada, $\overline{OP}$ es negativo. Luego, en (3): $x=-3+1=-2$

$$\therefore x+y=-5$$

EJERCICIOS

1. Dados: $\vec{a}=(3,-4)$, $\vec{b}=(8,-1)$ y $\vec{c}=(-2,5)$, hallar el vector $\vec{v}$ si:

   a) $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ Rp. $\vec{v}=(-9,-5)$

   b) $\vec{v} = 4\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})$ Rp. $\vec{v}=(17,-19)$

   c) $\vec{v} = 2(\vec{a}-\vec{b}) + 3\vec{c}$ Rp. $\vec{v}=(-16,9)$

2. Hallar el vector $\vec{x}$ en las siguientes ecuaciones:

   a) $3(0,-2)+2\vec{x}-5(1,3) = (-3,-5)$ Rp. $\vec{x}=(1,-8)$

   b) $(15,-12)+2(-6,5)+\vec{x} = 4(1;-2)$ Rp. $\vec{x}=(\frac{1}{2},-2)$

3. En las siguientes relaciones hallar, si existen, todos los números reales r y s.

   a) $r(-2,3)-s(8,1) = (16,15)$ Rp. $r=4$, $s=-3$

   b) $r(5,1)+s(-3,5) = (-2,8)$ Rp. $r=1/2$, $s=3/2$

   c) $r(-2,3)+s(4,-6) = (0,2)$ Rp. $\nexists r,s$

4. Dados los vectores $\vec{a}=(3x-5,x-2y+2)$ y $\vec{b}=(x-y-2,3-2y)$, hallar x e y de modo que: $3\vec{a}=4\vec{b}$ Rp. $x=5$, $y=-9/2$

5. Si $\vec{a}=(2m-3n,4n-m)$ y $\vec{b}=(2,-3)$, hallar los valores de m y n que hacen que: $\vec{a}=5\vec{b}$. Rp. $m=-1$, $n=-4$

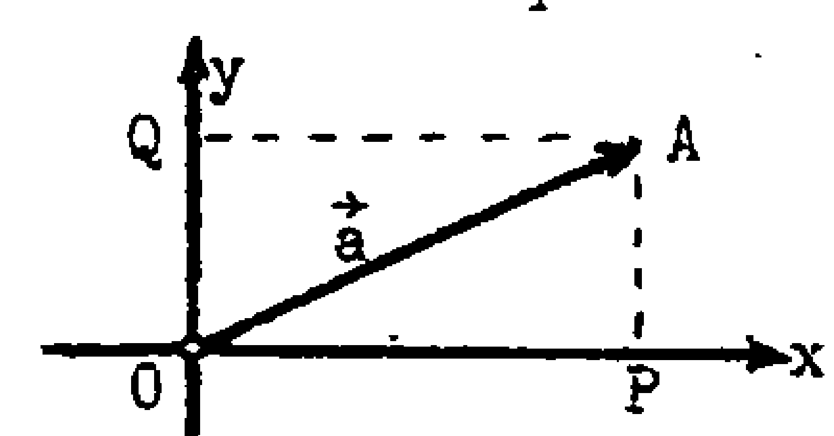
6. El vector $\vec{v}=(3,2)$ es el vector de posición del segmento AB, cuyo punto medio es C(3,1). Hallar las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{AB}$. Rp. A(3/2,0), B(9/2,2)

7. Sean los puntos P(5/2,5), Q(1/3,13/4), R(-16/5,7/2) y S(x,y) Si $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ representan al mismo vector, calcular el valor de $30x+80y$ Rp. -21

8. Sea $\vec{v}=(7,-6)$ el vector de posición del segmento $\overline{AB}$ y $C(\frac{5}{3},3)$ el punto de trisección más cercano de B, de dicho segmento. Hallar las coordenadas de A y B. Rp. A(-3,7), B(4,1)

9. Sean A(a,-2), B(2,4), C(8,-3) y D= (x,y)/y=2x+1 . Si $\overline{AB}=\overline{CD}$, hallar el valor de a-x. Rp. 8

10. En la figura adjunta se tiene:
    $\overline{OP}=x^3$ y $\overline{OQ}=6-x$
    Hallar $\vec{a}$, si $\vec{b}=(9xy-y^3,y)$ y $\vec{a}=\vec{b}$.



1.5 MAGNITUD DE UN VECTOR

Para cada vector $\vec{v}\in R^2$, $\vec{v}=(x,y)$, existe un escalar o número llamado *norma, módulo* o *magnitud* de $\vec{v}$, denotado por $||\vec{v}||$, tal que:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (3)$$

La fórmula (3) es coincidente con la noción intuitiva de longitud de un segmento derivada del Teorema de Pitágoras. La Figura 6 ilustra esta propiedad.

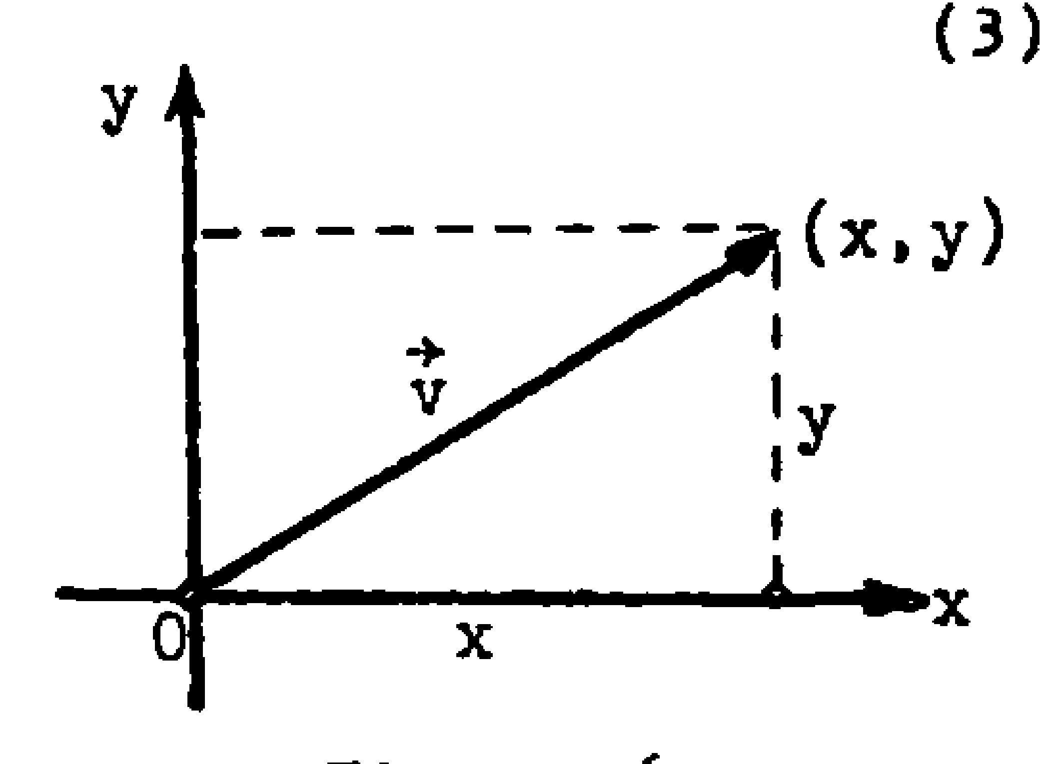


Figura 6

Ejemplo 1. Hallar la magnitud del vector de extremos A(1,3) y B(-2,7).

Solución. Si $\vec{v}$ es el vector que va de A a B, entonces:
$\vec{v} = \overline{AB} = \vec{B}-\vec{A} = (-2+1,7-3) = (-3,4)$

Luego, según (3): $||\vec{v}|| = \sqrt{(-3)^2+(4)^2} = 5$

PROPIEDADES DE LA NORMA DE UN VECTOR EN R^2.

N_1: $\forall\vec{a}\in R^2$, $||\vec{a}||>0$
N_2: $||\vec{a}||=0 \leftrightarrow \vec{a} = \theta$ (0,0)
N_3: $\forall r\in R$, $\forall\vec{a}\in R^2$, $||r\vec{a}|| = |r|\,||\vec{a}||$
N_4: $\forall\vec{a},\vec{b}\in R^2$, $||\vec{a}+\vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$ (Desigualdad triang.)

Demostración de N_1:

En efecto, si $\vec{a}=(x,y) \rightarrow ||\vec{a}|| = \sqrt{x^2+y^2}$
Si $x\neq 0$ e $y\neq 0 \rightarrow ||\vec{a}|| \neq 0$.
Sabemos que si existe la raiz cuadrada de un número, esta es positiva, por lo tanto, $||\vec{a}||>0$.

Demostración de N_2:

($\rightarrow$) Si $\vec{a}=\theta \rightarrow \vec{a}=(0,0) \rightarrow ||\vec{a}|| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$

($\leftarrow$) Si $||\vec{a}||=0 \rightarrow ||\vec{a}|| = \sqrt{x^2+y^2} = 0$. La igualdad es válida si x=y=0, esto es, $\vec{a}=(0,0)=\theta$. $\therefore$ $||\vec{a}||=0 \leftrightarrow \vec{a}=\theta$

Demostración de N_3:

En efecto, si $\vec{a}=(x,y) \rightarrow r\vec{a}=(rx,ry)$

y $||r\vec{a}|| = \sqrt{(rx)^2+(ry)^2} = \sqrt{r^2(x^2+y^2)} = \sqrt{r^2}\sqrt{x^2+y^2}$

Por consiguiente: $||r\vec{a}|| = |r|.||\vec{a}||$

1.6 DIRECCION DE UN VECTOR EN R^2.

A cada vector no nulo, $\vec{v}=(x,y)\in R^2$, le corresponde una dirección dada por la medida del ángulo α (ángulo de dirección de $\vec{v}$), que forma el vector con el semieje positivo de las X, para el cual:

$$\left.\begin{aligned} Sen\alpha &= \frac{y}{||\vec{v}||} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ Cos\alpha &= \frac{x}{||\vec{v}||} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

y $0^\circ \leqslant m(\alpha) \leqslant 360^\circ$.

De las ecuaciones (4) se sigue que:

$$\vec{v} = (x,y) = ||\vec{v}||(Cos\alpha, Sen\alpha)$$

(5)

Por tanto, un vector queda determinado por su magnitud y su dirección.

Observación. La dirección $m(\alpha)$ del vector $\vec{v}$ se obtiene de la manera siguiente:

Mediante un ángulo de referencia α_1 y haciendo uso de una tabla de valores se halla el valor de α_1 con $0^\circ<m(\alpha_1)<90^\circ$ para el cual

$$Tg\alpha_1 = \left|\frac{y}{x}\right| \ , \ x\neq 0$$

Si $x>0$, $y>0$ $\rightarrow$ $m(\alpha) = m(\alpha_1)$ (Cuadrante I)

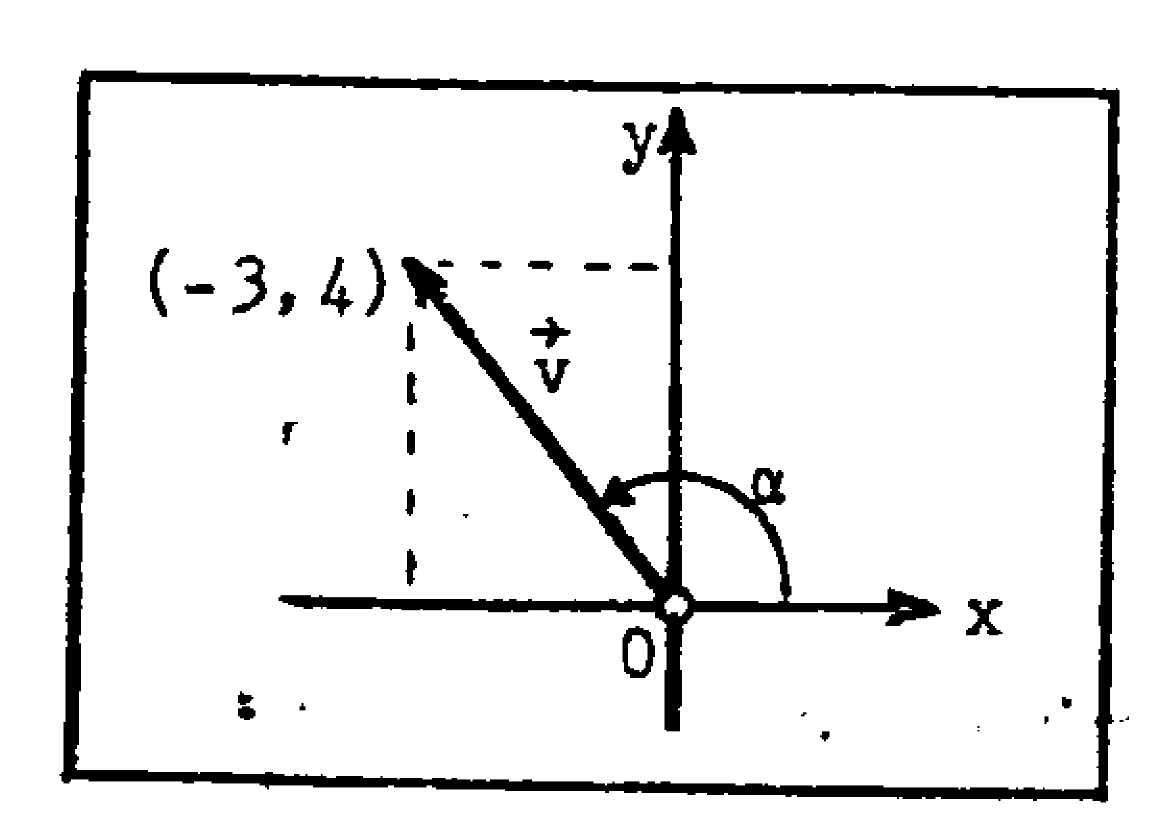
$x<0$, $y>0$ $\rightarrow$ $m(\alpha) = 180^\circ-m(\alpha_1)$ (Cuadrante II)

$x<0$, $y<0$ $\rightarrow$ $m(\alpha) = 180^\circ+m(\alpha_1)$ (Cuadrante III)

$x>0$, $y<0$ $\rightarrow$ $m(\alpha) = 360^\circ-m(\alpha_1)$ (Cuadrante IV)

Desde luego, si $x=0$ pero $y\neq 0$, entonces $m(\alpha)=90^\circ$ ó $m(\alpha)=270^\circ$ respectivamente para $y>0$ ó $y<0$.

Ejemplo 2. Hallar la magnitud y dirección del vector $\vec{v}=(-3,4)$.



Solución. Según (3), la magnitud del vector $\vec{v}$ es:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{(-3)^2+(4)^2} = 5$$

Por las ecuaciones (4) la dirección del vector está dada por:

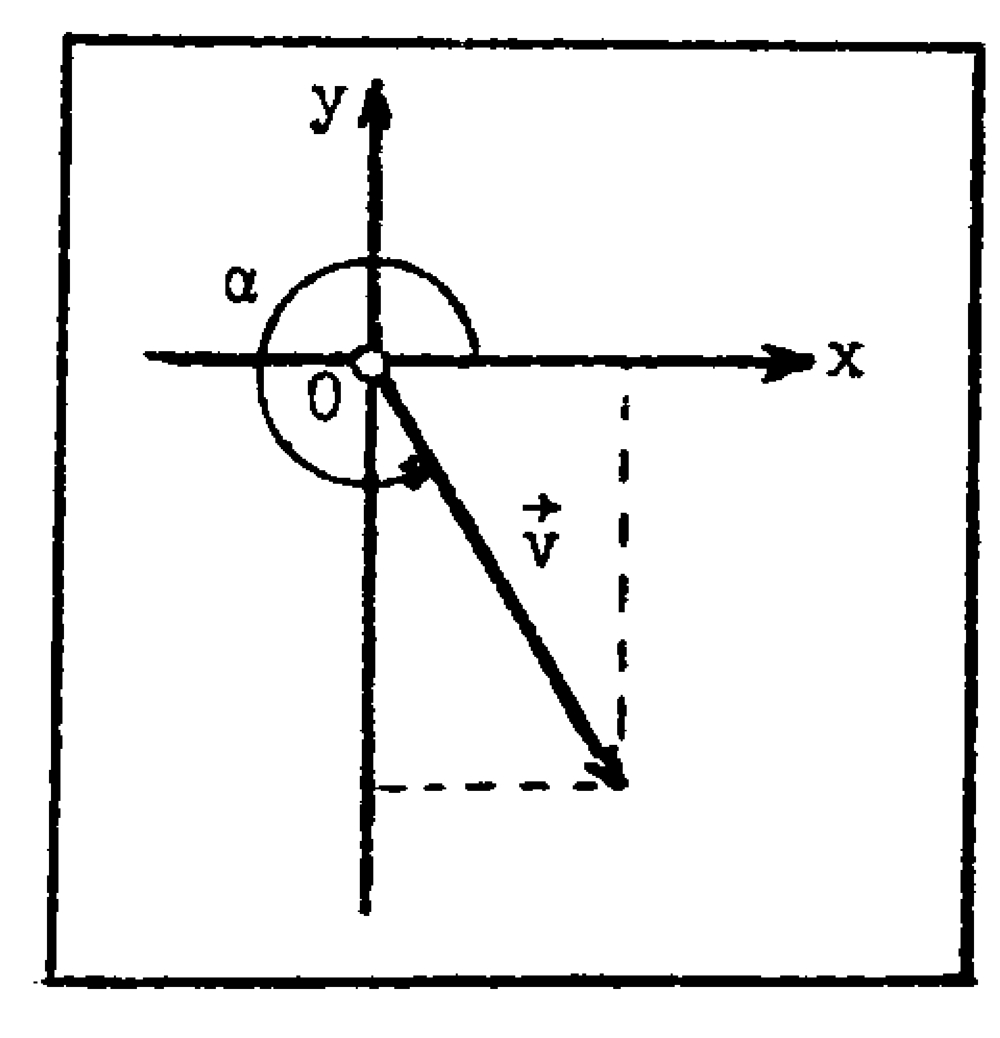
$$\text{Sen}\alpha = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \text{Cos}\alpha = -\frac{3}{5}$$

Dado que Senα>0 y Cosα<0, entonces α está en el II cuadrante.

Angulo de referencia: $\text{Tg}\alpha_1 = |\frac{4}{-3}| = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha_1 = 53^o8'$

Por tanto: $m(\alpha) = 180^o - 53^o8' = 126^o52'$

Ejemplo 3. Expresar el vector $\vec{v}=(3,-3\sqrt{3})$ en términos de su magnitud y de su ángulo de dirección.



Solución. Según (3): $||\vec{v}|| = \sqrt{(3)^2+(-3\sqrt{3})^2} = 6$

y por las ecuaciones (4):

$$\text{Sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \text{Cos}\alpha = \frac{1}{2}$$

Como Senα<0 y Cosα>0, entonces α está situado en el IV cuadrante.

Angulo de referencia: $\text{Tg}\alpha_1 = |\frac{y}{x}| = \sqrt{3}$

de donde: $m(\alpha_1)=60^o \rightarrow m(\alpha)=360^o-60^o=300^o$

Por tanto, según la ecuación (5):

$$\vec{v} = 6(\text{Cos}300^o, \text{Sen}300^o)$$

1.7 VECTOR UNITARIO

Dado un vector no nulo $\vec{v}=(x,y)$, llamamos *vector unitario* a un vector $\vec{u}$ que tiene la misma dirección de $\vec{v}$ para el cual:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left(\frac{x}{||\vec{v}||}, \frac{y}{||\vec{v}||}\right) \qquad (6)$$

o bien:

$$\vec{u} = (\text{Cos}\alpha , \text{Sen}\alpha) \qquad (7)$$

Ejemplo 4. Hallar un vector unitario que tiene la misma dirección y sentido del vector $\vec{v}=(-3,\sqrt{7})$

Solución. Según (3): $||\vec{v}|| = \sqrt{(-3)^2+(\sqrt{7})^2} = 4$

y por (6): $\vec{u} = \frac{(-3,\sqrt{7})}{4} = (-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$

Ejemplo 5. Hallar un vector de módulo 10, que tenga la misma dirección y sentido opuesto al vector que va de S(4,2) a T(1,6).

Solución. Sea $\vec{v}=\vec{ST}=\vec{T}-\vec{S}=(1-4,6-2)=(-3,4)$

Un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ es:

$\vec{u} = \frac{(-3,4)}{5}$. Luego, el vector buscado es: $\vec{v} = -||\vec{v}||\vec{u}$

$\therefore \vec{v} = (6,-8)$

$\overline{AB} \neq \overline{BA}$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4, se dan las coordenadas de los puntos A y B. Expresar cada vector $\vec{v}=\overline{AB}$ en términos de su magnitud y de su ángulo de dirección.

1. $A(-3,4)$, $B(-5,6)$ R. $\vec{v}=2\sqrt{2}(\text{Cos}135^\circ,\text{Sen}135^\circ)$
2. $A(\sqrt{12},-3)$, $B(\sqrt{27},-4)$ R. $\vec{v}=2(\text{Cos}330^\circ,\text{Sen}330^\circ)$
3. $A(5\sqrt{3},4)$, $B(\sqrt{48},5)$ R. $\vec{v}=2(\text{Cos}150^\circ,\text{Sen}150^\circ)$
4. $A(3\sqrt{5},-\sqrt{15})$, $B(\sqrt{20},-\sqrt{60})$ R. $\vec{v}=2\sqrt{5}(\text{Cos}240^\circ,\text{Sen}240^\circ)$
5. Hallar un vector $\vec{v}$ cuya magnitud es igual a la del vector $\vec{a}=(4,-3)$ y cuya dirección es la misma que la del vector $\vec{b}=(1,\sqrt{3})$. Rp. $\vec{v} = (\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$
6. Hallar un vector de módulo 10 que forma un ángulo de 37° con el eje X positivo. (Sug. $\text{Cos}37^\circ=4/4$) Rp. $\vec{v}=(8,\pm 6)$
7. Hallar un vector de módulo 15 que forma un ángulo de 53° con el eje Y positivo. (Sug. $\text{Cos}53^\circ=3/5$) Rp. $\vec{v}=(-12,9)$
8. Hallar un vector que tenga la misma magnitud del vector que va de A(-2,3) a B(-5,4) y que tenga el sentido opuesto al vector que va de S(9,-1) a T(12,-7). Rp. $\vec{v}=\sqrt{2}(-1,2)$
9. Hallar un vector $\vec{v}$ de longitud $6\sqrt{3}$ y que tiene la misma dirección de un vector que forma un ángulo de 30° con el sentido positivo del eje X. Rp. $v=(9,\pm 3\sqrt{3})$

OPERACIONES VECTORIALES

1.8 ADICION DE VECTORES EN EL PLANO

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^2 tal que $\vec{a}=(x_1,y_1)$ y $\vec{b}=(x_2,y_2)$, definimos la adición del modo siguiente:

$$\vec{a}+\vec{b} = (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2)$$

Por ejemplo, si $\vec{a}=(5,-7)$ y $\vec{b}=(-3,2)$, entonces:

$$\vec{a}+\vec{b} = (5-3,-7+2)$$
$$= (2,-5)$$

PROPIEDADES DE LA ADICION VECTORIAL. Si $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores en R^2, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

A_1: $(a+b)\varepsilon R^2$ — Clausura

A_2: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — Conmutatividad

A_3: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — Asociatividad

A_4: $\exists\theta\varepsilon R^2 \ , \ \forall\vec{a}\varepsilon R^2/\vec{a}+\theta=\theta+\vec{a} = \vec{a}$ — Elemento neutro para la adición

A_5: $\forall\vec{a}\varepsilon R^2 \ , \ \exists(-a)\varepsilon R^2/\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a} = \theta$ — Opuesto de un vector

Demostración de A_1:

En efecto, si $\vec{a}=(x_1,y_1)$ y $\vec{b}=(x_2,y_2)$, entonces:

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1+x_2,y_1+y_2)$ (Def.1)

Puesto que la adición es cerrada en R

$\rightarrow (x_1+x_2)\varepsilon R$ y $(y_1+y_2)\varepsilon R$

Por tanto: $(x_1+x_2,y_1+y_2)\varepsilon R^2 \leftrightarrow (a+b)\varepsilon R^2$

Demostración de A_2: Consta de dos partes: Existencia y Unicidad.

Existencia. Si $\vec{a}=(x_1,y_1)$, se tiene:

$\vec{a} + \theta= (x_1,y_1)+(0,0) = (x_1+0,y_1+0) = (x_1,y_1) = \vec{a}$

Análogamente: $\theta + \vec{a} = \vec{a}$

Unicidad. Sea θ_1 otro elemento de R^2 que también cumple

$\vec{a} + \theta_1 = \theta_1 + \vec{a} = \vec{a}$

Esta igualdad es cierta $\forall\vec{a}\varepsilon R^2$, en particular si $\vec{a}=\theta$, entonces:

$$\theta + \theta_1 = \theta_1 + \theta = \theta$$

Análogamente, haciendo $\vec{a}=\theta_1$ en A_4 se tiene que:

$$\theta_1 + \theta = \theta + \theta_1 = \theta_1$$

Por lo que las dos igualdades anteriores prueban que

$$\theta_1 = \theta$$

Se deja al lector demostrar las propiedades A_2, A_3 y A_5 haciendo uso de las propiedades que cumple la adición en R.

1.9 REPRESENTACION GRAFICA DE LA ADICION DE VECTORES EN EL PLANO

Dados $\vec{a}$ y $\vec{b}\varepsilon R^2$, la flecha que representa a la suma $\vec{a}+\vec{b}$ se obtiene de la manera siguiente:
Representamos una traslación a lo largo de una flecha cualquiera que represente al vector $\vec{a}=(x_1,y_1)$ seguida de una traslación del punto final de esta flecha a lo largo de la flecha que representa al vector $\vec{b}=(x_2,y_2)$. La traslación total correspondiente al vector $\vec{a}+\vec{b}$, es una flecha que tiene como punto inicial el del vector $\vec{a}$ y como punto final el del vector $\vec{b}$. (Figura 7)

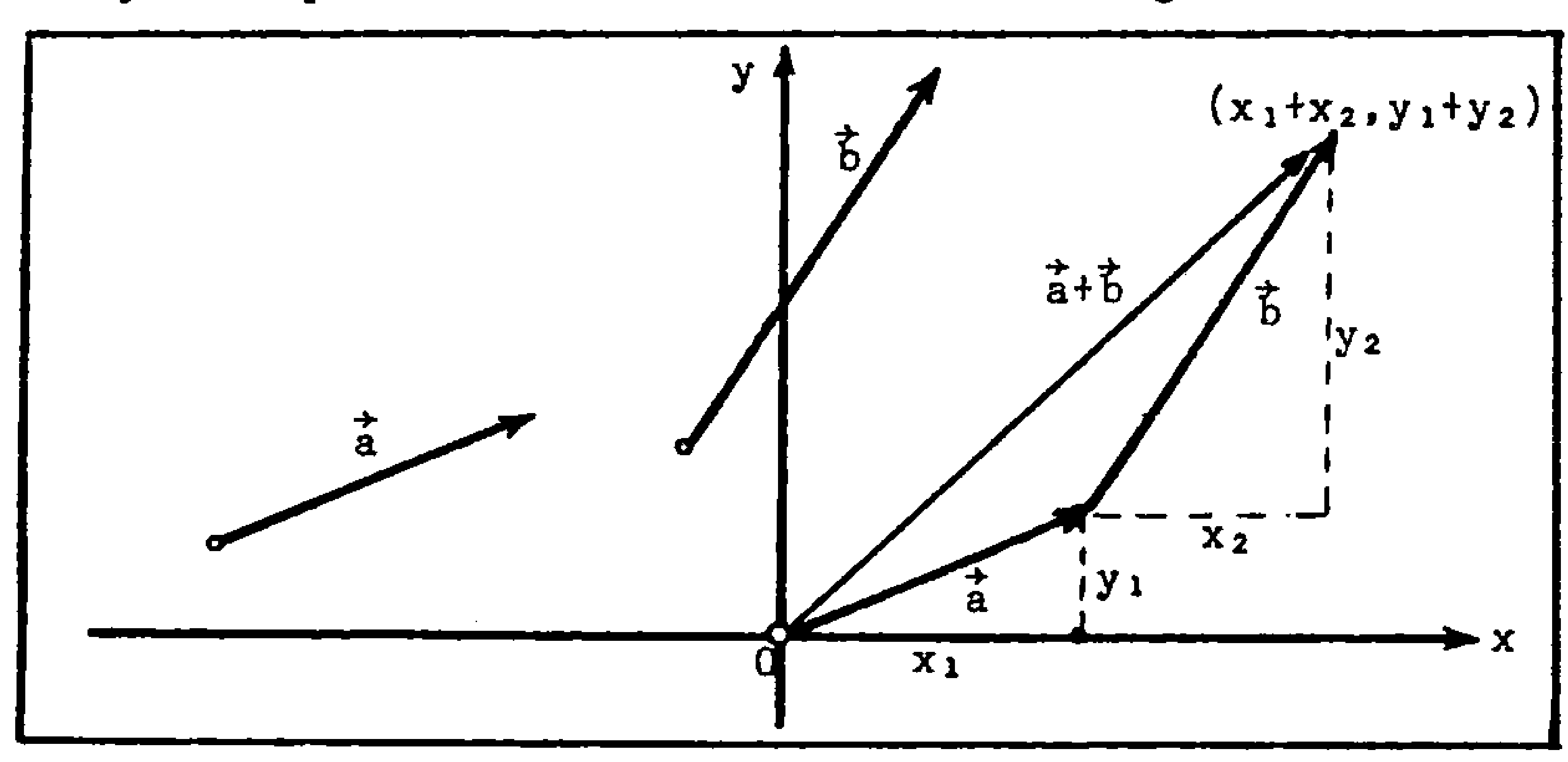


Figura 7

En esta construcción los vectores a y b son lados adyacentes de un paralelogramo y la suma a+b es la diagonal correspondiente.
La obtención de la suma de vectores siguiendo este procedimiento recibe el nombre de *ley del paralelogramo*, que se ilustra en el siguiente ejemplo.

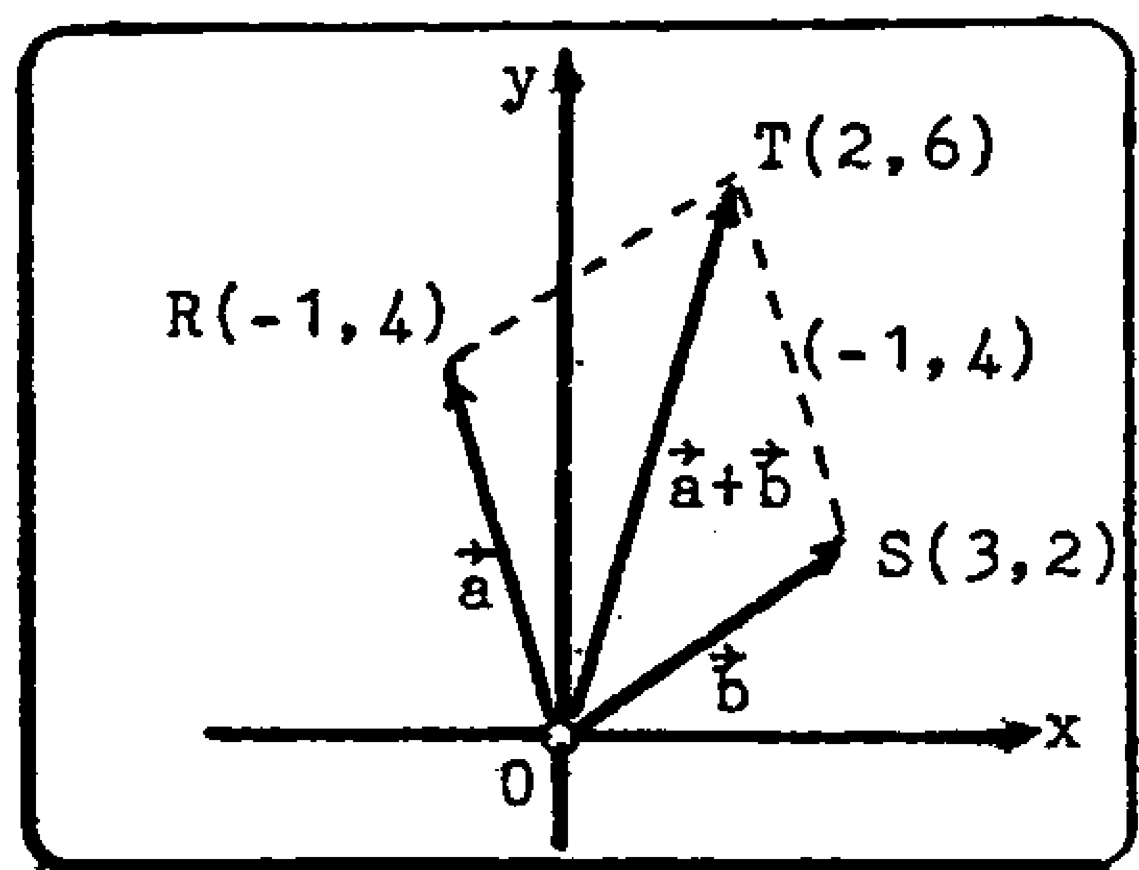
Ejemplo 1. Dados los vectores $\vec{a}=(-1,4)$ y $\vec{b}=(3,2)$, hallar $\vec{a}+\vec{b}$ y construir una gráfica que muestre las representaciones ordinarias correspondientes a los vectores.

Solución. Por definición:

$\vec{a}+\vec{b} = (-1+3, 4+2)$

$= (2,6)$

Observemos que la flecha que va de S a T representa al vector $\vec{a}$ y la flecha que va de R a T representa a $\vec{b}$. (Por segmentos de paralelas)



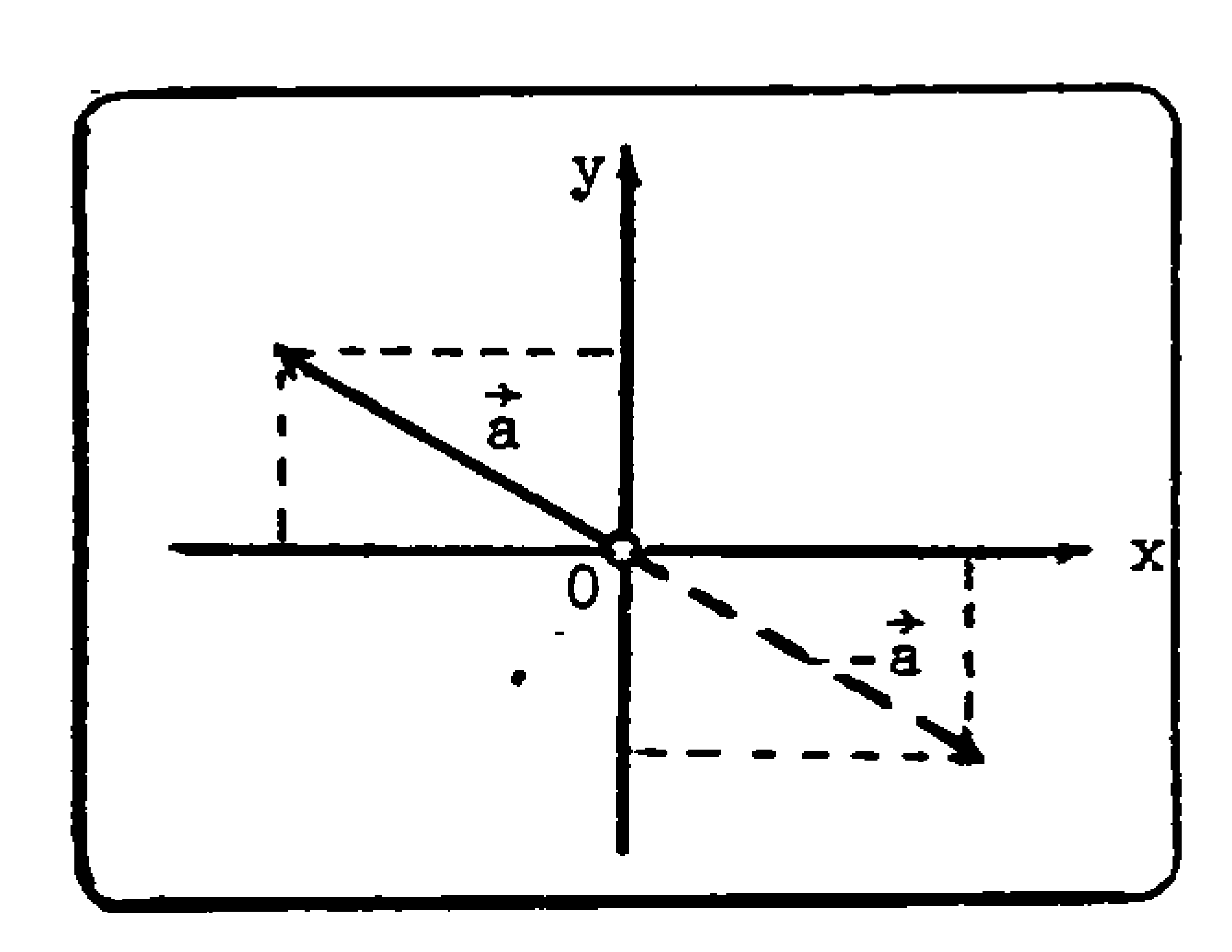
DEFINICION 5. NEGATIVO DE UN VECTOR EN R^2

Si $\vec{a}\in R^2$, tal que $\vec{a}=(x,y)$, se denomina negativo o inverso aditivo de $\vec{a}$ al vector:

$-\vec{a} = (-x,-y)$

Por ejemplo, el negativo del vector $\vec{a}=(-3,2)$ es $-\vec{a}=(3,-2)$

Observación. Dado el vector $\vec{a}\in R^2$, su negativo $-\vec{a}\in R^2$ es colineal, de la misma magnitud; esto es: $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$, pero de sentido opuesto que el vector $\vec{a}$.



1.10 SUSTRACCION DE VECTORES

Dados dos vectores $\vec{a},\vec{b}\in R^2$, tal que $\vec{a}=(x_1,y_1)$ y $\vec{b}=(x_2,y_2)$, definimos la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ del modo siguiente:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (x_1,y_1) + (-x_2,-y_2)$

$$\therefore \quad \vec{a} - \vec{b} = (x_1-x_2, y_1-y_2) \tag{8}$$

Ejemplo 2. Si $\vec{a}=(4,2)$ y $\vec{b}=(-3,3)$, hallar la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ y trazar una gráfica que muestre la representación ordinaria de los tres vectores.

Solución. Por definición: $\vec{a}-\vec{b} = (4,2)-(-3,3) = (4,2)+(3,-3)$

$= (4+3, 2-3) = (7,-1)$

La representación ordinaria de cada uno de los vectores se muestran en la Figura 8. Debemos destacar que, el inverso aditivo de (-3,3) es (3,-3) (negativo del vector $\vec{b}$), que es colineal y de la misma magnitud que (-3,3) pero de sentido opuesto.

La representación geométrica de $\vec{a}-\vec{b}$ puede obtenerse aplicando la regla del paralelogramo a la suma $\vec{a}+(-\vec{b})$. La Figura 9 nos muestra otra manera de representar la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$.

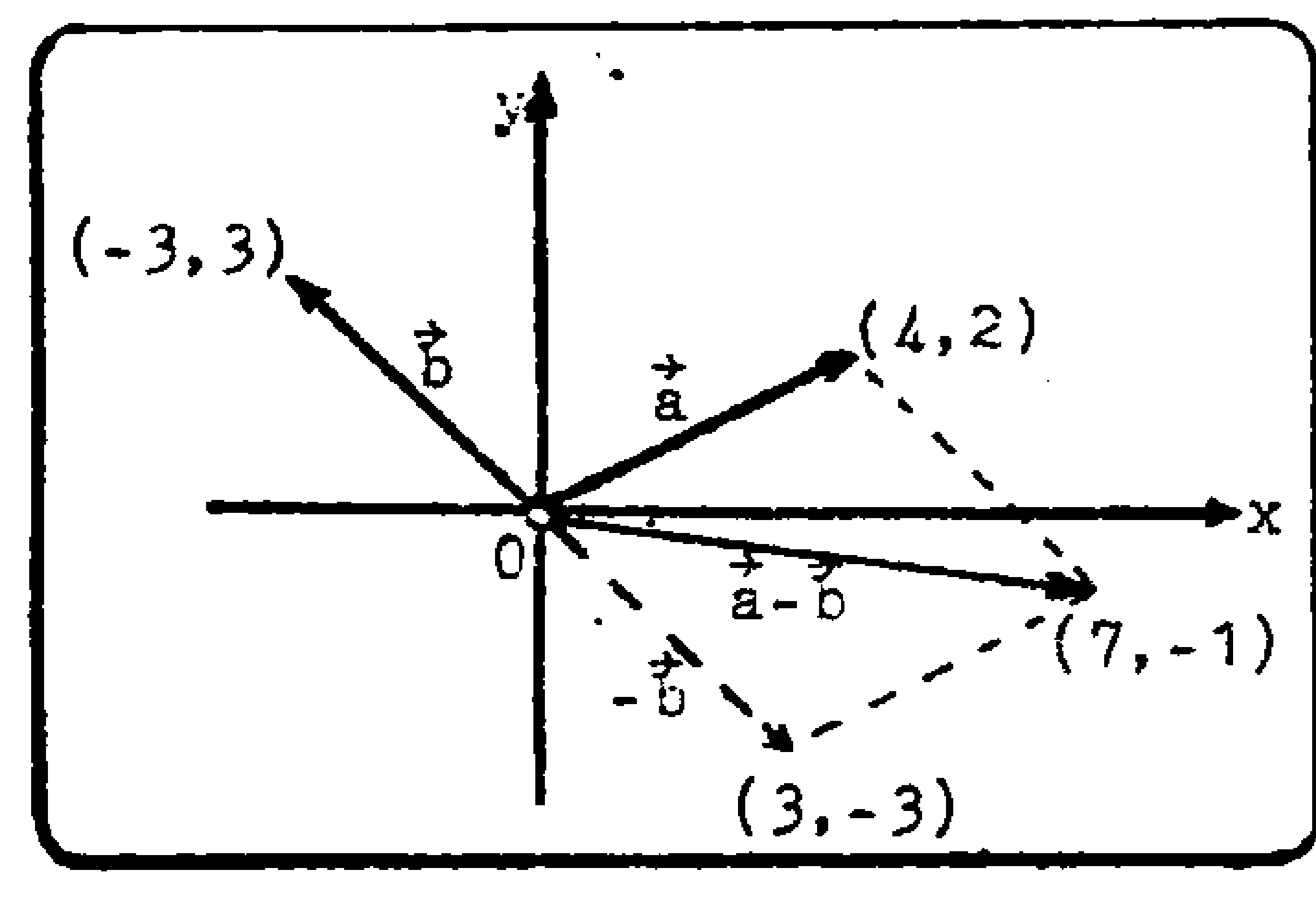


Figura 8

Figura 9

Observaciones:

1. Si $\vec{a}$, $\vec{b} \in R^2$, entonces la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ satisface la condición $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$, lo que explica porque algunas veces se dice que la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ es el vector que va de $\vec{b}$ a $\vec{a}$.
2. El vector diferencia une los puntos finales de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{a}$ (Figura 9).
3. Si $\vec{a}$, $\vec{b} \in R^2$, son vectores no nulos, entonces $\vec{a}-\vec{b} \neq \vec{b}-\vec{a}$

Ejemplo 3. Sea $\vec{x}$ un vector tal que $(3,-4)=\vec{x}+(1,-6)$. Si $(3,-2)=t\vec{x}+r(-1,1)$, hallar el valor de $3r+6t$.

Solución. En la primera ecuación se tiene:

$$(3,-4)-(1,-6) = \vec{x} + (1,-6) - (1,-6)$$

$$\rightarrow (3-1,-4+6) = \vec{x} + \theta \qquad (A_4)$$

$$\rightarrow (2,2) = \vec{x}$$

Luego, si $(3,-2) = t(2,2)+r(-2,1) \rightarrow (3,-2) = (2t+2r,2t+r)$

Por igualdad de vectores: $3=2t+2r$ y $-2=2t+r$

Resolviendo el sistema obtenemos: $r=-5/3$ y $t=-1/6$

$$\therefore\ 3r+6t = -6$$

Ejemplo 4. Dados: $\vec{a}=(-2,2)$, $\vec{b}=(3,-2)$ y $\vec{c}=(-1,1)$, resolver la ecuación: $3\vec{a} - 2[3(\vec{b}-2\vec{c}) + 2\vec{a}] + 3\vec{x} = 2\vec{c} + \vec{x}$.

Solución. Restando $2\vec{c}+\vec{x}$ a cada extremo de la ecuación dada se tiene: $3\vec{a}-6(\vec{b}-2\vec{c})-4\vec{a}+3\vec{x}-(2\vec{c}+\vec{x}) = (2\vec{c}+\vec{x})-(2\vec{c}+\vec{x})$

$$\rightarrow -\vec{a}-6\vec{b}+12\vec{c}+3\vec{x}-2\vec{c}-\vec{x} = \theta$$

de donde: $2\vec{x} = \vec{a}+6\vec{b}-10\vec{c} = (-2,2)+6(3,-2)-10(-1,1)$

$$= (-2+18+10\ ,\ 2-12-10)$$

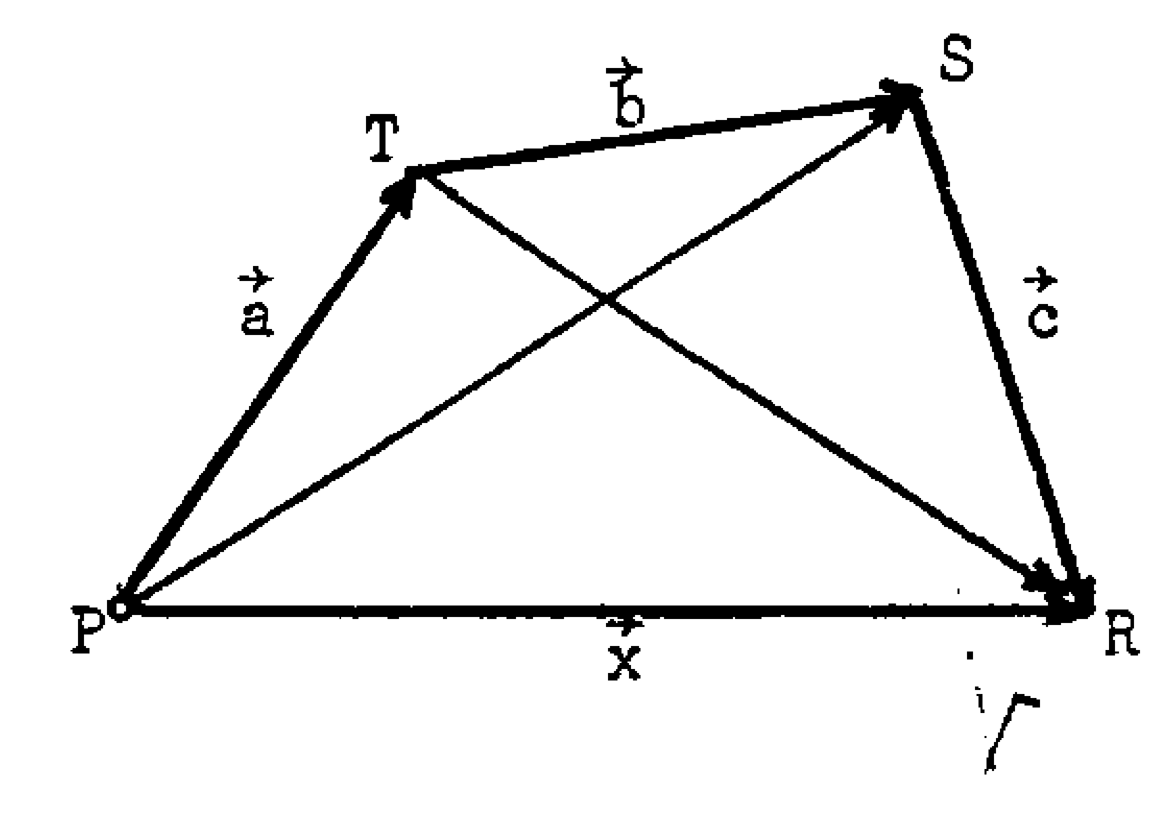
$$= (26,-20)$$

$$\therefore\ \vec{x} = (13,-10)$$

Ejemplo 5. Mediante segmentos orientados demostrar la propiedad A_3: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Demostración. En efecto, sean los segmentos orientados:

$$\overline{PT} = \vec{a}\ ,\ \overline{TS} = \vec{b}\ ,\ \overline{SR} = \vec{c}\ ,\ \overline{PR} = \vec{x}$$



Por la interpretación gráfica de la suma de vectores se tiene:

En el ΔPTS: $\overline{PS} = \overline{PT} + \overline{TS} = \vec{a} + \vec{b}$

En el ΔTSR: $\overline{TR} = \overline{TS} + \overline{SR} = \vec{b} + \vec{c}$

En el ΔPSR: $\overline{PR} = \overline{PS} + \overline{SR}$

$\rightarrow \vec{x} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (1)

En el ΔPTR: $\overline{PR} = \overline{PT} + \overline{TR}$

$\rightarrow \vec{x} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (2)

Por tanto, de (1) y (2) se sigue que: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Ejemplo 6. Sean $\vec{a}=(-2,3)$ y $\vec{b}=(4,-3)$. Un segmento dirigido que representa a $(\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b})$ tiene por punto inicial S(5,-3/2); hallar el punto final.

Solución. Sea T(x,y) el punto final del segmento ST.

Si $\overline{ST} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} \rightarrow \vec{T}-\vec{S} = \frac{2}{3}(-2,3) - \frac{1}{6}(4,-3)$

Entonces: $(x-5, y+\frac{3}{2}) = (-2,\frac{5}{2}) \leftrightarrow \begin{cases} x-5 = -2 \rightarrow x=3 \\ y+3/2 = 5/2 \rightarrow y=1 \end{cases}$

Por tanto, el punto final es: T(3,1)

Ejemplo 7. Se tiene: $2(2,-3)+\vec{c} = (3,-5)+(a,7)$ y $\vec{c}$ está sobre la recta $L:y=x+2$. Si $A(3,5)$ y $B(-2,6)$, hallar el punto P tal que $\overline{PC} = -\overline{AB}$.

Solución. Si $\vec{c}\in L \rightarrow \vec{c}=(x,x+2)$

$\rightarrow 2(2,-3) + (x,x+2) = (3,-5)+(a+7)$

de donde: $(x,x+2) = (a-1,6) \leftrightarrow \begin{cases} x = a-1 \\ x+2 = 8 \rightarrow x=6 \end{cases}$

Luego, $c=(6,8)$. Si $P(x_1,y_1)$ y $\overline{PC}=-\overline{AB} \rightarrow \vec{C}-\vec{P} = -(\vec{B}-\vec{A}) = \vec{A}-\vec{B}$

$\rightarrow (6-x_1,8-y_1) = (5,-1) \leftrightarrow \begin{cases} 6-x_1 = 5 \rightarrow x_1=1 \\ 8-y_1 = -1 \rightarrow y =9 \end{cases}$

$\therefore P(1,9)$

Ejemplo 8. Los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}\in R^2$, cumplen que: $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{c}$ y $\vec{a}-3\vec{b}=2\vec{c}$. Siendo $\vec{a}$ un vector unitario, hallar la norma de $\vec{b}+\vec{c}$.

Solución. De las ecuaciones dadas se tiene: $\vec{a} = \vec{c}-2\vec{b}$ (1)
$\vec{a} = 2\vec{c}+3\vec{b}$ (2)

Luego, $\vec{c}-2\vec{b} = 2\vec{c}+3\vec{b} \rightarrow \vec{c} = -5\vec{b}$

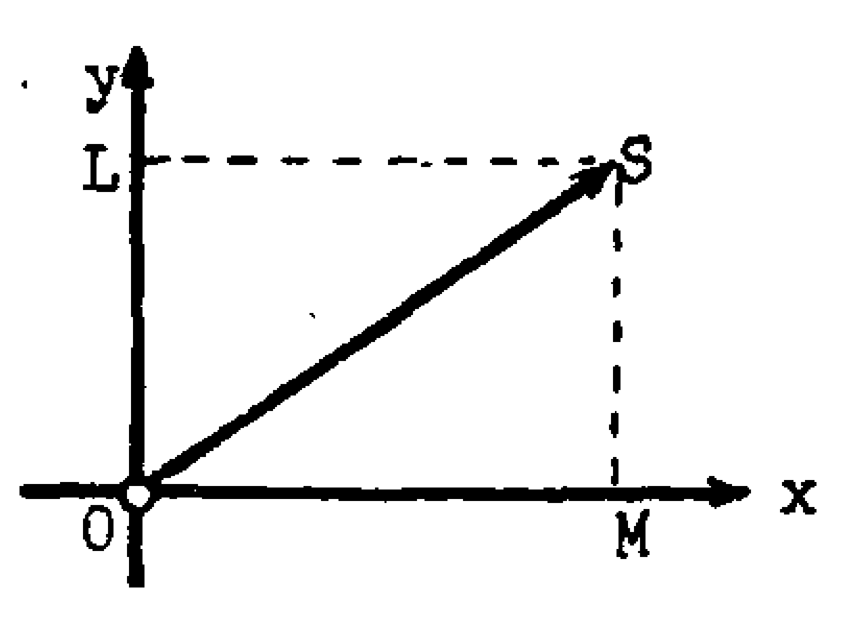
Sustituyendo en (1) obtenemos: $\vec{b} = -\frac{1}{7}\vec{a} \rightarrow \vec{c} = \frac{5}{7}\vec{a}$

Entonces: $\vec{b}+\vec{c} = \frac{4}{7}\vec{a} \rightarrow ||\vec{b}+\vec{c}|| = \frac{4}{7}||\vec{a}||$

Como $\vec{a}$ es un vector unitario $\rightarrow ||\vec{a}||=1$ $\therefore ||\vec{b}+\vec{c}|| = \frac{4}{7}$

Ejemplo 9. En la figura adjunta se tiene: $\overline{OM} = \frac{5}{2}x$ y $\overline{OL}=27/2$

Si $\vec{a}=(2x^3,4x^2+4y^2)$ y $\vec{b}=(\frac{1}{3}xy^2, -\frac{4}{3}xy)$, hallar x-y de modo que: $2\vec{s} = (\frac{1}{3})\vec{a}-2\vec{b}$.



Solución. Las componentes de $\vec{s}$ son $\overline{OM}$ y $\overline{OL} \rightarrow \vec{s} = (\frac{5}{2}x,\frac{27}{2})$, $x>0$

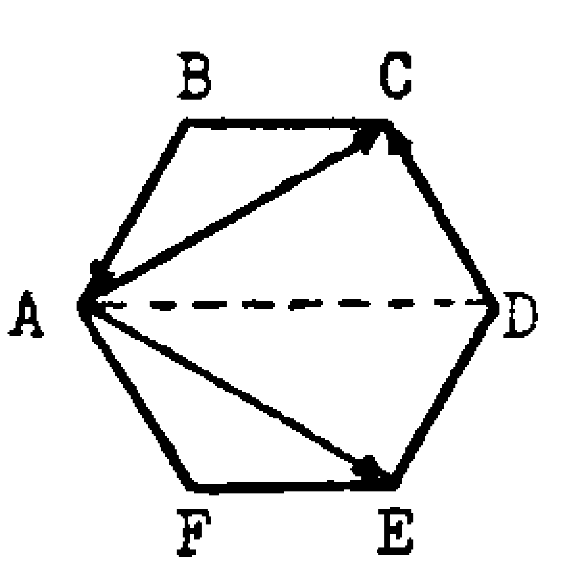
Luego: $2(\frac{5}{2}x,\frac{27}{2}) = \frac{1}{3}(2x^3,4x^2+4y^2) - 2(\frac{1}{3}xy^2, -\frac{4}{3}xy)$

$\rightarrow (5x,27) = (\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}xy^2, \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{8}{3}xy) \leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}xy^2 \\ 27 = \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}xy + \frac{4}{3}y^2 \end{cases}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{2} = (x+y)(x-y) & (1) \\ \frac{81}{4} = (x+y)^2 \rightarrow (x+y) = \frac{9}{2} & (2) \end{cases}$$

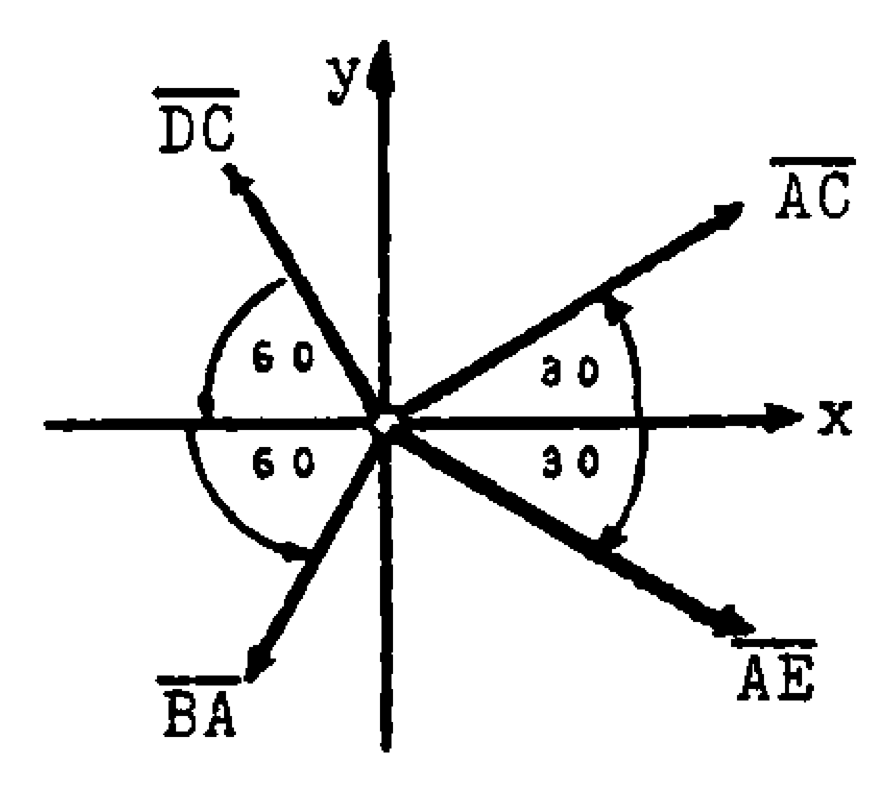
Sustituyendo (2) en (1) se tiene: $\frac{9}{2}(x-y) = \frac{15}{2}$

$$\therefore\ x-y = \frac{5}{3}$$



Ejemplo 10. Sea el exágono regular de lado a, mostrado en la figura. Al sumar $\overline{BA}$, $\overline{AC}$, $\overline{DC}$ y $\overline{AE}$ se obtiene un vector $\vec{s}$; hallar la norma de $\vec{s}$.

Solución. Por geometría elemental sabemos que $\ell_6=r=a$ y $\ell_3=r\sqrt{3}$, entonces: $||\overline{AC}||=||\overline{AE}||=a\sqrt{3}$, por ser lados de un triángulo equilátero.



Trasladamos los vectores indicados a un sistema bidimensional con origen en A cuyo eje X siga la dirección de $\overline{AD}$, y aplicando la ecuación (5) tenemos:

$$\overline{BA} = ||\overline{BA}||(\text{Cos}240^\circ,\text{Sen}240^\circ) = a(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

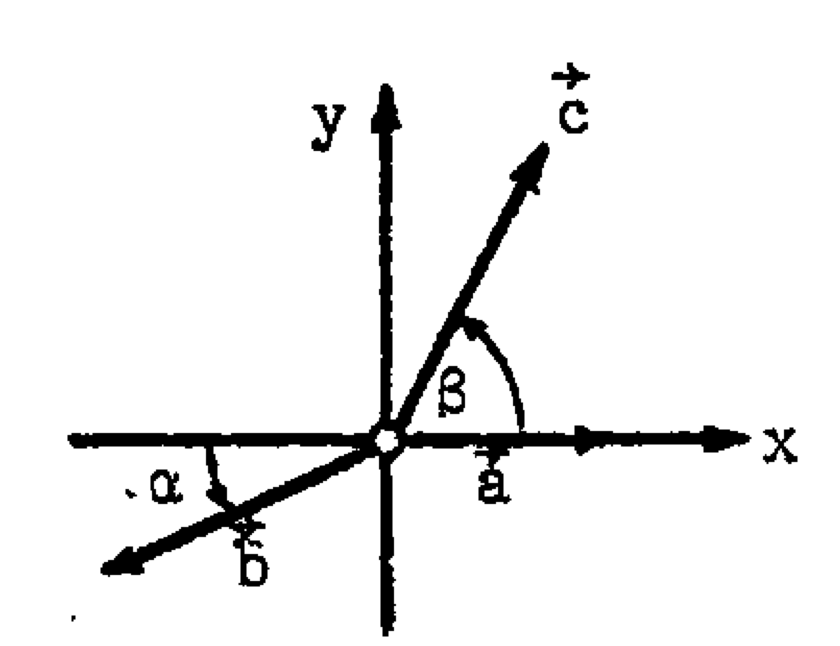
$$\overline{AC} = ||\overline{AC}||(\text{Cos}30^\circ,\text{Sen}30^\circ) = a\sqrt{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \tfrac{1}{2}) = a(\tfrac{3}{2}\ ,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\overline{DC} = ||\overline{DC}||(\text{Cos}120^\circ,\text{Sen}120^\circ) = a(-\ \tfrac{1}{2}\ ,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\overline{AE} = ||\overline{AE}||(\text{Cos}330^\circ,\text{Sen}330^\circ) = a\sqrt{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,-\tfrac{1}{2}) = a(\tfrac{3}{2}\ ,-\ \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

Luego, $\vec{s} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{DC} + \overline{AE} = (2a,0)$

$$\therefore\ ||\vec{s}|| = 2a$$



Ejemplo 11. En la figura adjunta se tiene: $||\vec{a}||=3$, $||\vec{b}||=2$ $||\vec{c}||=2\sqrt{10}$, $\text{Tg}\alpha=1/3$ y $\text{Tg}\beta=3$. Hallar el valor de m de modo que:

$$m\vec{a} + 3\vec{b} = n\vec{c}$$

Solución. Si $\text{Tg}\alpha=1/3 \rightarrow \text{Sen}\alpha=1/\sqrt{10}$ y $\text{Cos}\alpha=3/\sqrt{10}$

$$\text{Tg}\beta=3 \rightarrow \text{Sen}\beta=3/\sqrt{10} \text{ y } \text{Cos}\beta=1/\sqrt{10}$$

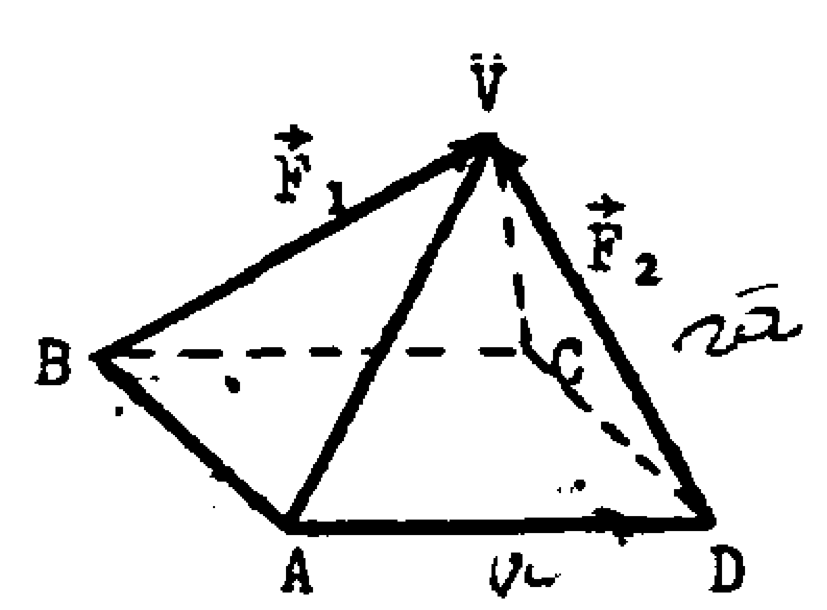
Un vector unitario en el sentido de $\vec{a}$ es $(1,0) \rightarrow \vec{a}=3(1,0)$

$\vec{b} = ||\vec{b}||(-\text{Cos}\alpha, -\text{Sen}\alpha) = 2\sqrt{10}(-3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}) = (-6,-2)$

$\vec{c} = ||\vec{c}||(\text{Cos}\beta, \text{Sen}\beta) = \sqrt{10}(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}) = (1,3)$

Entonces, si $m(3,0) + 3(-6,2) = n(1,3) \leftrightarrow \begin{cases} 3m - 18 = n & (1) \\ 0 - 6 = 3n \rightarrow n=-2 \end{cases}$

Sustituyendo en (1) obtenemos: $m=16/3$



Ejemplo 12. En el gráfico se presenta una pirámide regular cuyas aristas laterales miden 2a. Si el lado de la base cuadrada mide a, calcular: $||\vec{F}_1 + \vec{F}_2||$.

Solución. En el plano BVD se tiene:

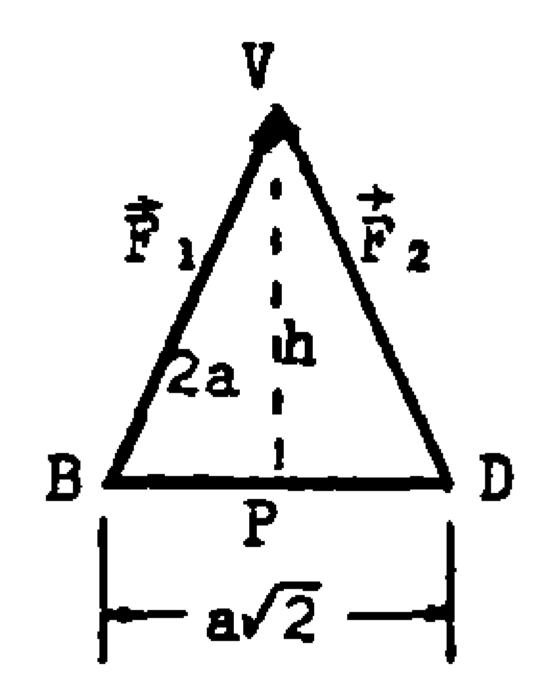
$\vec{F}_1 = \overline{BP} + \overline{PV}$

$\vec{F}_2 = \overline{DP} + \overline{PV} = -\overline{PD} + \overline{PV} = -\overline{BP} + \overline{PV}$

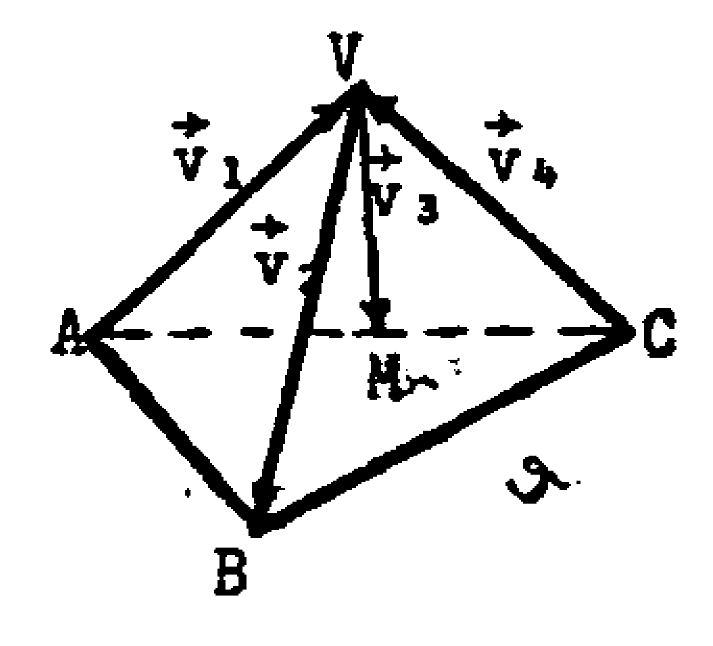
Luego: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2\overline{PV} \rightarrow ||\vec{F}_1 + \vec{F}_2|| = 2||\overline{PV}||$

$\rightarrow \; ||\vec{F}_1 + \vec{F}_2|| = 2h = 2\sqrt{(2a)^2+(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2}$

de donde: $||\vec{F}_1 + \vec{F}_2|| = a\sqrt{14}$



Ejemplo 13. La figura adjunta es un tetraedro regular de arista a, M es el punto medio de $\overline{AC}$. Si $\vec{s}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3+\vec{v}_4$, hallar la norma de $\vec{s}$.



Solución. En el ΔBVC: $\overline{CB} = \vec{v}_4 + \vec{v}_2$

En el ΔAVM: $\overline{AM} = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$

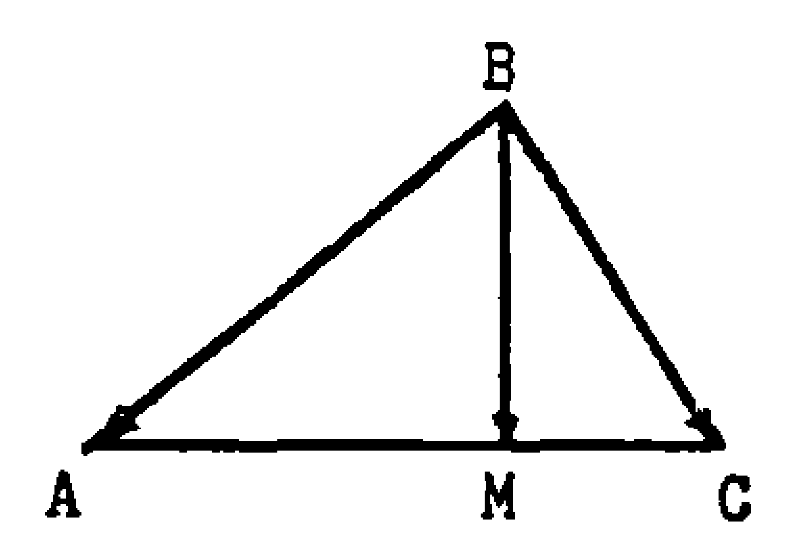
Efectuando la suma se tiene: $\vec{s} = \overline{CB} + \overline{AM} = \overline{CB} + \overline{MC} = \overline{MB}$

$\rightarrow \; ||\vec{s}|| = ||\overline{MB}||$ (Altura de un triángulo equilátero de lado a)

$\therefore \; ||\vec{s}|| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ejemplo 14. En el triángulo ABC, M es un punto de $\overline{AC}$ tal que $\overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{MC}$

Si la norma del vector $\overline{BM}$ es 2, hallar la norma del vector: $\vec{v} = 2\overline{BA} + 3\overline{BC}$.



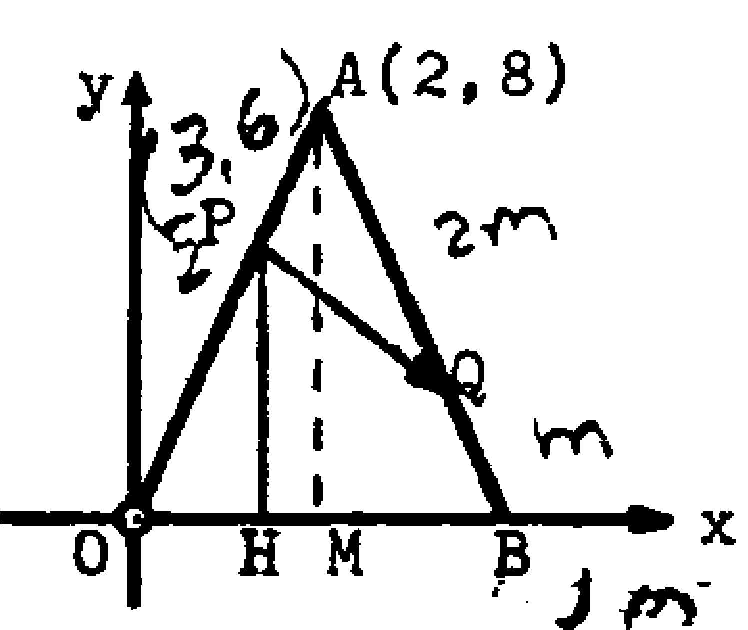
Solución. En el ΔAMB: $\overline{BA}=\overline{BM}-\overline{AM} = \overline{BM} - \frac{3}{2}\overline{MC}$

En el ΔBMC: $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MC}$

Luego: $\vec{v} = 2(\overline{BM} - \frac{3}{2}\overline{MC}) + 3(\overline{BM} + \overline{MC})$, de donde: $\vec{v} = 5\overline{BM}$

$$\therefore\ ||\vec{v}|| = 5||\overline{BM}|| = 10$$

Ejemplo 15. En la figura adjunta, el triángulo OAB es isósceles con $\overline{OA}=\overline{AB}$ y $\overline{PH}$ es perpendicular a $\overline{OB}$ y mide 6 unidades Si $||\overline{AQ}||=2||\overline{QB}||$, hallar $||\overline{PQ}||$.



Solución. Sea OH=x $\rightarrow$ P(x,6)

$$\Delta OMA \approx \Delta OHP \rightarrow \frac{AM}{PH} = \frac{OM}{OH} \leftrightarrow \frac{8}{6} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Luego: $P(\frac{3}{2},6) \rightarrow \overline{PA} = \vec{A}-\vec{P} = (2,8)-(\frac{3}{2},6) = (\frac{1}{2},2)$

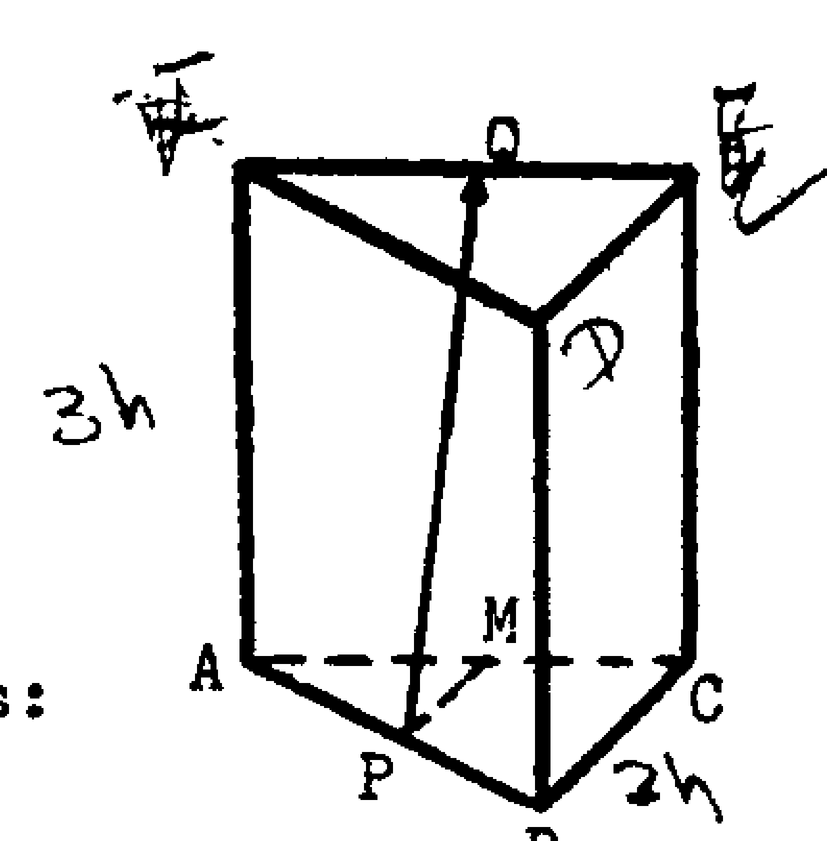
Además: $\overline{AB} = \vec{B}-\vec{A} = (4,0)-(2,8) = (2,-8)$

Si $||\overline{AQ}||=2||\overline{QB}|| \rightarrow \overline{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AB} = \frac{2}{3}(2,-8)$

En la figura: $\overline{PQ} = \overline{PA} + \overline{AQ} = (\frac{1}{2},2) + \frac{2}{3}(2,-8) = \frac{1}{6}(11,-20)$

$$\therefore\ ||\overline{PQ}|| = \frac{1}{6}\sqrt{(11)^2+(-20)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{521}$$

Ejemplo 16. La figura es un prisma rectangular de altura 3h y sus bases son triángulos equiláteros de lado 2h. P es punto medio de $\overline{AB}$, Q es punto medio de $\overline{FE}$; hallar la norma de $\overline{PQ}$.



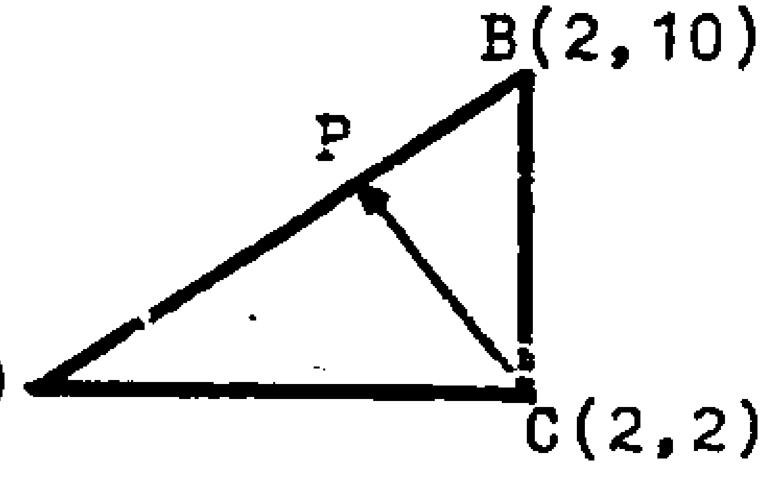
Solución. Si por P trazamos $\overline{PM}||\overline{BC}$, entonces:

$$||\overline{PM}|| = \frac{1}{2}||\overline{BC}|| = h$$

Por el teorema de Pitágoras: $||\overline{PQ}||^2 = ||\overline{PM}||^2+||\overline{MO}||^2$

$$\rightarrow ||\overline{PQ}||^2 = h^2+(3h)^2 = 10h^2 \rightarrow ||\overline{PQ}|| = h\sqrt{10}$$

Ejemplo 17. En la figura adjunta, si P es tal que el área del triángulo APC es el doble del área del triángulo CPB; hallar $||\overline{CP}||$.



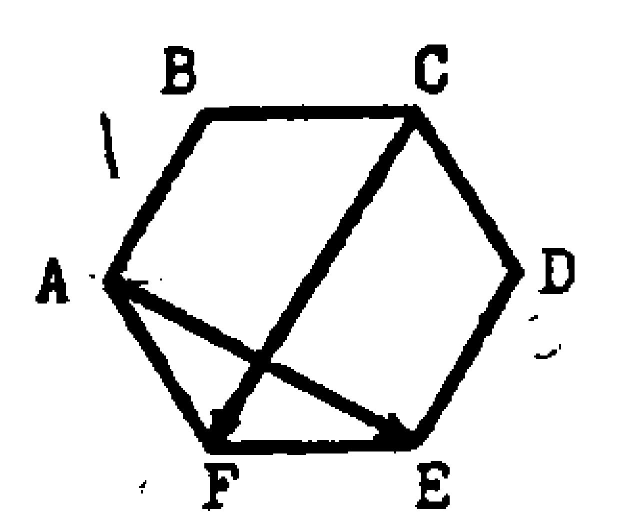
Solución. Por geometría elemental sabemos que: $\frac{a(\Delta APC)}{a(\Delta CPB)} = \frac{\overline{AP} \times \overline{PC}}{\overline{PB} \times \overline{PC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 2$

de donde: $\overline{AP} = 2\overline{PB} \leftrightarrow \vec{P} - \vec{A} = 2(\vec{B} - \vec{P})$

$\rightarrow (x+4, y-2) = 2(2-x, 10-y) \leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 2(2-x) \rightarrow x=0 \\ y-2 = 2(10-y) \rightarrow y=22/3 \end{cases}$

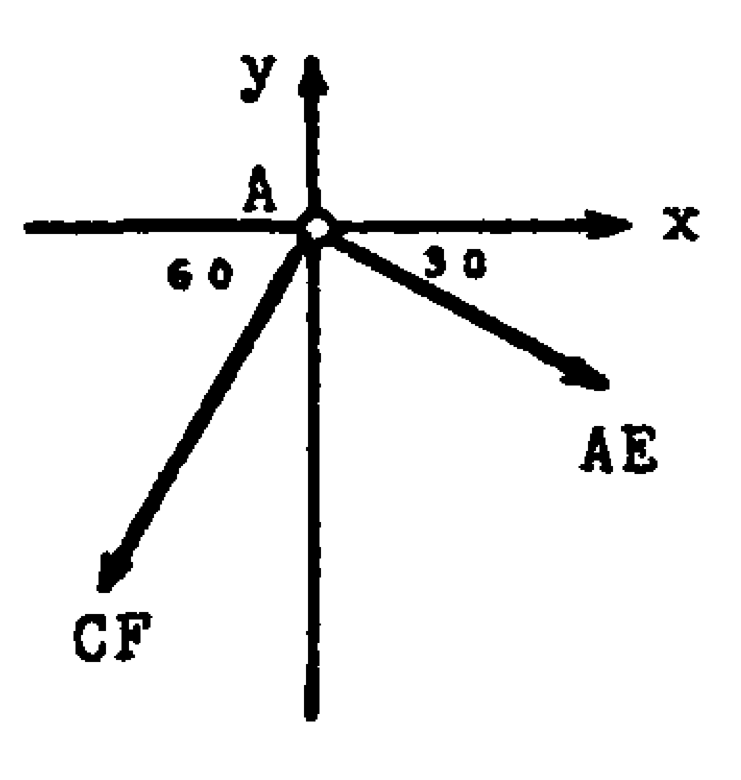
Entonces: $\overline{CP} = \vec{P}-\vec{C} = (0, \frac{22}{3})-(2,2) = \frac{2}{3}(-3,8)$

Por consiguiente: $||\overline{CP}|| = \frac{2}{3}\sqrt{(-3)^2+8^2} = \frac{2}{3}\sqrt{73}$



Ejemplo 18. Si ABCDEF es un exágono regular cuyo lado mide a unidades, calcular el valor de: $||\frac{1}{3}\overline{AE} + \frac{2}{3}\overline{CF}||$.

Solución. Trasladando los vectores a un sistema cartesiano de origen A y eje X sobre $\overline{AD}$, tenemos:



$\overline{AE} = ||\overline{AE}||(\text{Cos}330°, \text{Sen}330°) = a\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

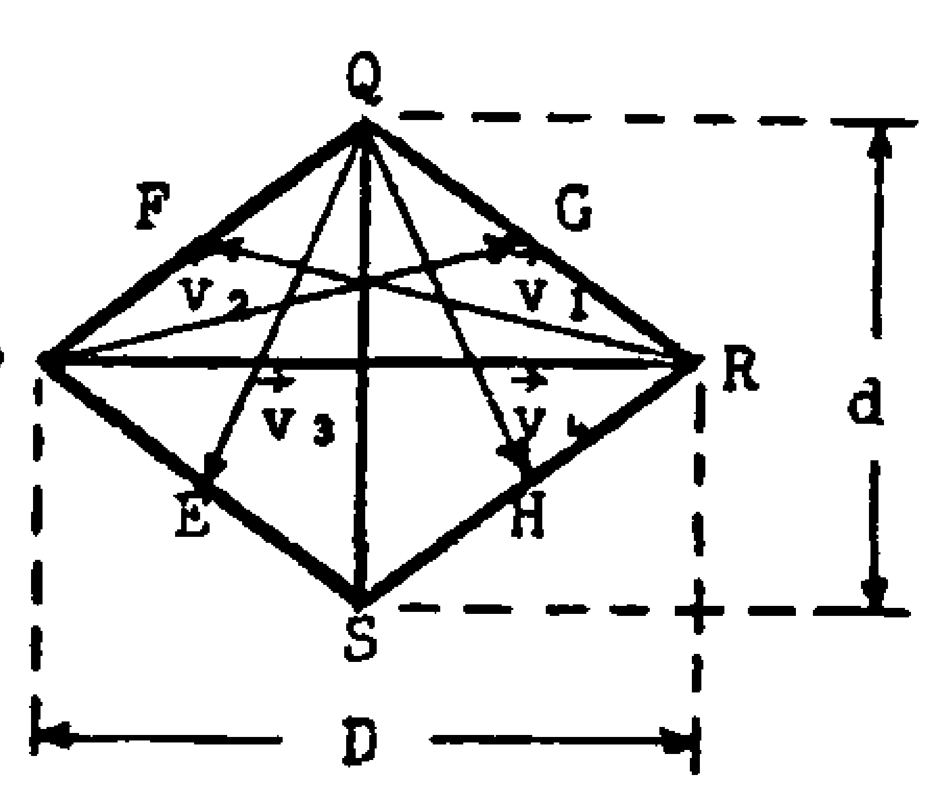
$\rightarrow \overline{AE} = \frac{a}{2}(3, -\sqrt{3})$

$\overline{CF} = ||\overline{CF}||(\text{Cos}240°, \text{Sen}240°) = 2a(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\rightarrow \overline{CF} = a(-1, -\sqrt{3})$

Luego: $\frac{1}{3}\overline{AE} + \frac{2}{3}\overline{CF} = \frac{a}{6}(3, -\sqrt{3}) + \frac{2}{3}a(-1, -\sqrt{3}) = \frac{a}{6}(-1, -5\sqrt{3})$

$\therefore \quad ||\frac{1}{3}\overline{AE} + \frac{2}{3}\overline{CF}|| = \frac{a}{6}\sqrt{(-1)^2+(-5\sqrt{3})^2} = \frac{a}{3}\sqrt{19}$



Ejemplo 19. En el rombo de diagonales D y d tal como se indica en la figura, hallar la norma del vector:

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$

donde los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ llegan a los puntos medios de los lados del rombo.

Solución. Considerando un sistema cartesiano con sus ejes X e Y sobre las diagonales PR y SQ, respectivamente, tenemos:

$\vec{v}_1 = \overline{RF} = \vec{F} - \vec{R} = (-\frac{D}{4}, \frac{d}{4}) - (\frac{D}{2}, 0) = (-\frac{3}{4}D, \frac{d}{4})$

$\vec{v}_2 = \overline{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (\frac{D}{4}, \frac{d}{4}) - (-\frac{D}{2}, 0) = (\frac{3}{4}D, \frac{d}{4})$

$\vec{v}_3 = \overline{QE} = \vec{E} - \vec{Q} = (-\frac{D}{4}, -\frac{d}{4}) - (0, \frac{d}{2}) = (-\frac{D}{4}, -\frac{3}{4}d)$

$\vec{v} = \overline{QH} = \vec{H} - \vec{Q} = (\frac{D}{4}, -\frac{d}{4}) - (0, \frac{d}{2}) = (\frac{D}{4}, -\frac{3}{4}d)$

Luego: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = (0,-d)$

$$\therefore \; ||\vec{v}|| = d$$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 5, si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores en R^2, demuestre la validez de cada afirmación.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Propiedad conmutativa: A_2)
2. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \theta$ (Inverso aditivo: A_5)
3. Si $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \rightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$
4. Si $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} \rightarrow \vec{a} = \theta$ (Unicidad del idéntico aditivo)
5. Si $\vec{a} + \vec{b} = \theta \rightarrow \vec{a} = -\vec{b}$ (Unicidad del inverso aditivo)

6. Mediante segmentos orientados demuestre la propiedad A_2: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

7. Dado el triángulo ABC, demostrar que: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \theta$. (Sug. Usar la def.3: $\overline{AB}=\vec{B}-\vec{A}$)

8. Dados los vectores $\vec{a}=(5,2)$, $\vec{b}=(-3,4)$ y $\vec{c}=(7,4)$; resolver la ecuación: $2\vec{x} + 5\vec{a} - 3\vec{b} = 4\vec{c}$. Rp. $\vec{x}=(-3,9)$

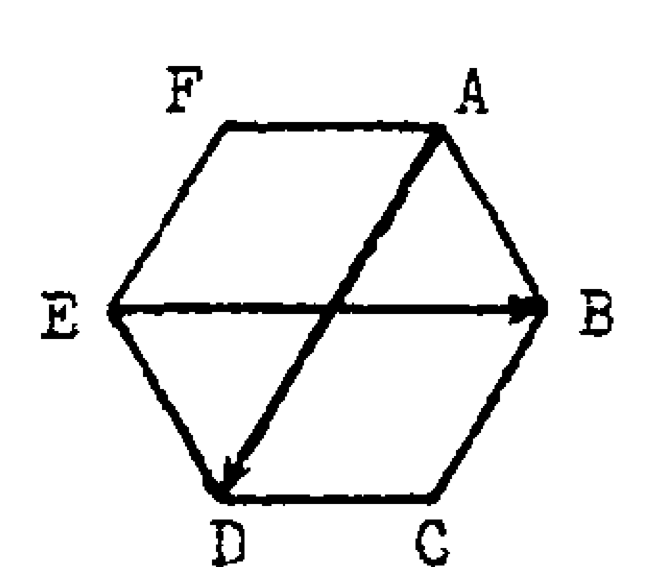
9. Sea $\vec{x}$ un vector en R^2 tal que: $(-5,2)=2\vec{x}+(1,-8)$. Si $(-5,3)=t\vec{x}+r(2,-1)$, hallar el valor de $2t+r$. Rp. -2

10. Dados los puntos A(5,1), B(-2,3), C(-3,-2) y D(1,-4); determinar el punto X(x,y) de modo que: $3\overline{AB}-\overline{XD} = 3\overline{AX} - \frac{1}{2}\overline{CD} + \overline{BC}$.

    Rp. X(-2,17/2)

11. Se tiene $2[(5,-1)+\vec{c}]=3(1,3)-(-1,a)$. Si A(2,3), B(3,-1) y el punto final del vector $\vec{c}$, en posición ordinaria, está sobre el conjunto $P=\{(x,y)/y=x^2-1\}$; hallar las coordenadas de un punto P tal que: $\overline{AP}+2\overline{PC}=\overline{AB}$. Rp. P(-9,9)

12. En el exágono regular ABCDEF, de lado a, hallar la norma de $\vec{s}$, sabiendo que: $\vec{s} = \frac{2}{3}(\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DE}) + \frac{1}{2}\overline{EB}$. Rp. $\frac{7}{3}a$

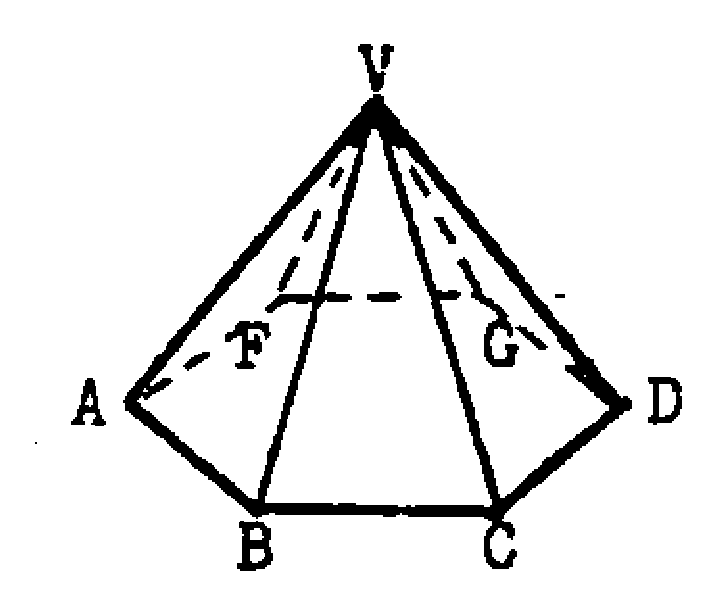


13. Siendo $\vec{a}=(5,-2)$, $\vec{b}=(2,-5)$ y $\vec{c}=(-3,1)$, hallar un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$.

Rp. $\vec{u} = (-\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$

14. La base de la pirámide regular de la figura es un exágono regular de lado a. Si $\overline{VA}=\overline{VB}=\overline{VC}=\overline{VD}=\overline{VE}=\overline{VF}=b$, hallar la norma de $\vec{s}$, si $\vec{s} = \overline{VA}+\overline{VB}+\overline{VC}+\overline{VD}+\overline{VE}+\overline{VF}$.

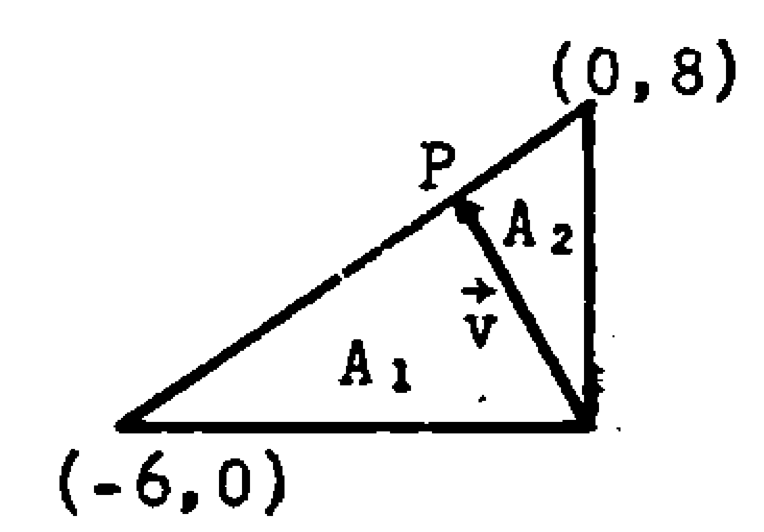
Rp. $6\sqrt{b^2-a^2}$



15. Dados los vectores $\vec{a}=(-5,2)$ y $\vec{b}=(3,-4)$, hallar un vector unitario de sentido opuesto al vector $\vec{a}-\vec{b}$. Rp. $\vec{u}=(4/5,-3/5)$

16. En la figura adjunta, P es un punto tal que el triángulo de área A_1 es tres veces el área del triángulo de área A_2. Hallar la norma del vector $\vec{v}$.

Rp. $\frac{3}{2}\sqrt{17}$

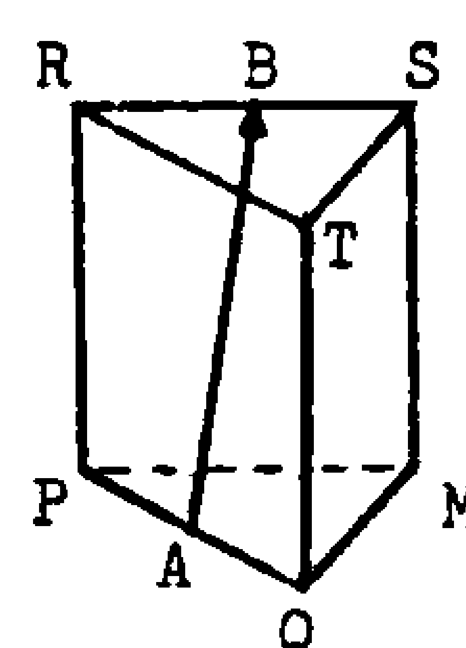


17. Los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ en R^2, cumplen que: $2\vec{a}-3\vec{b}=\vec{c}$ y $3\vec{a}-2\vec{b}=5\vec{c}$ Siendo $\vec{a}$ un vector unitario, calcular la norma de $\vec{b}-\vec{c}$.

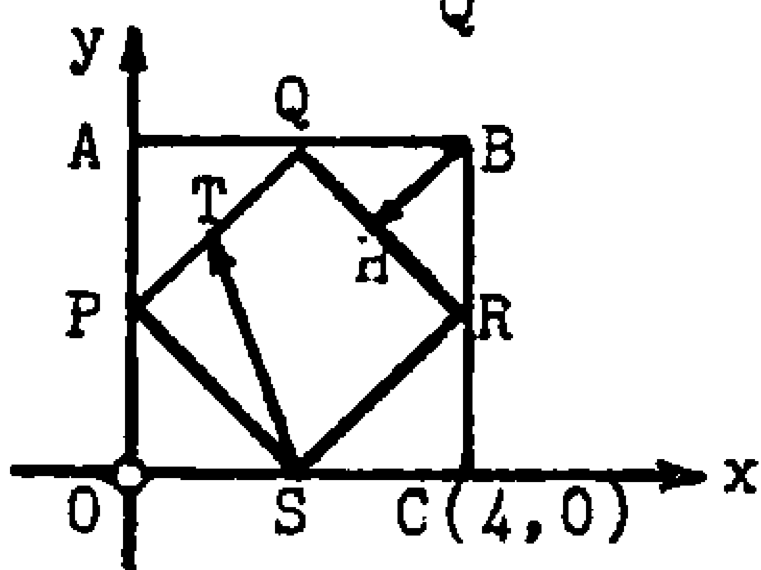
Rp. 2/13

18. Se tiene un prisma rectangular de altura 2h y cuyas bases son triángulos equiláteros de lado h. Si A y B son puntos medios de $\overline{PQ}$ y RS respectivamente, hallar $||\overline{AB}||$

Rp. $\frac{h}{2}\sqrt{17}$



19. En la figura adjunta, OABC es un cuadrado, P,Q,R y S son puntos medios de los lados $\overline{OA},\overline{AB},\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Hallar $||\overline{ST} + \overline{BH}||$ si T es punto medio de $\overline{PQ}$ y H es punto medio de $\overline{QR}$. Rp. $2\sqrt{2}$



20. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en R^2 tales que $\vec{b}$ es el opuesto de $\vec{a}$. Si $\vec{b}$ tiene el mismo sentido que el vector $\vec{c}=(-1/3,1/4)$ y la norma de $\vec{a}$ es 5, hallar el vector $\vec{x}=2\vec{b}+\vec{a}$. Rp. $\vec{x}=(-4,3)$

1.11 MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

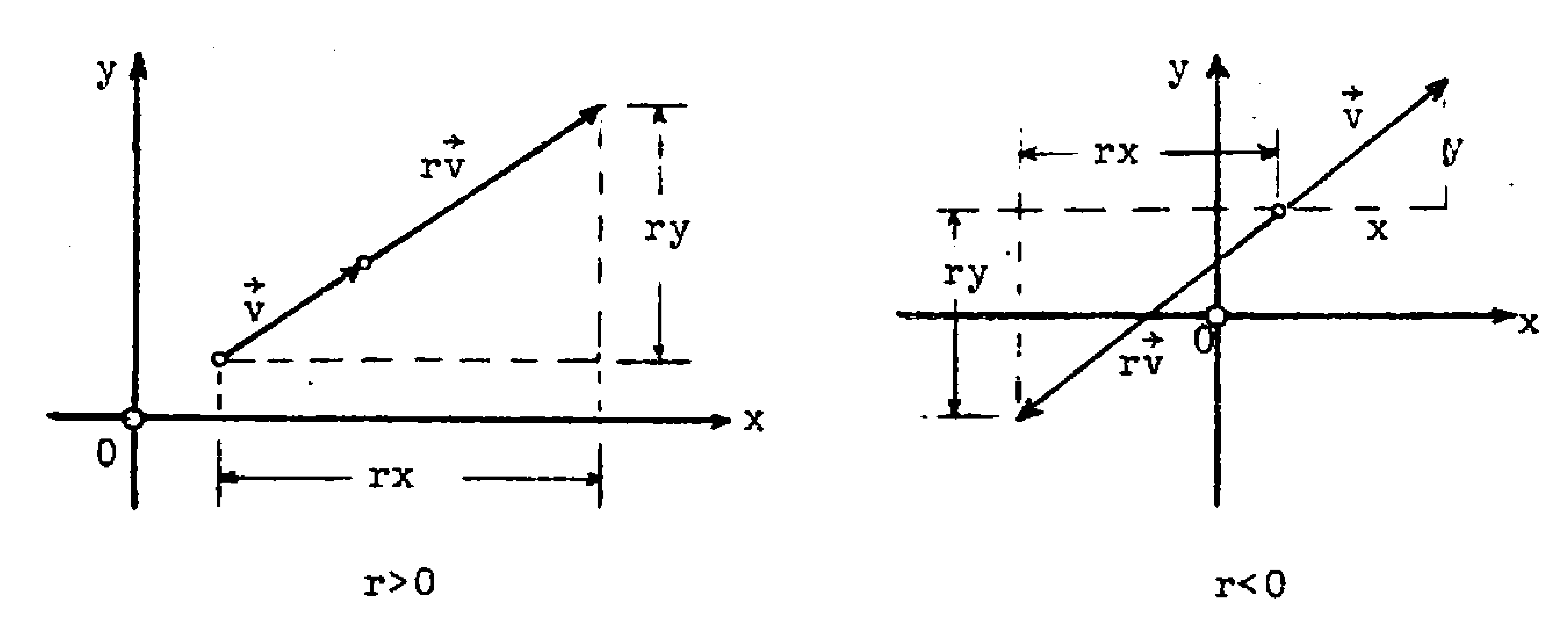
Dado un vector $\vec{v}=(x,y)\varepsilon R^2$ y un escalar $r\varepsilon R$, el producto del escalar por el vector es otro vector rv para el cual:

$$r\vec{v} = r(x,y) = (rx,ry)$$

La magnitud de rv es $||r\vec{v}||=|r|\,||\vec{v}||$ y su dirección es la misma que la de $\vec{v}$, aunque su sentido puede ser opuesto, es decir, los vectores $\vec{v}$ y $r\vec{v}$ son paralelos.

Nota. Al vector $r\vec{v}$ se denomina *múltiplo escalar de* $\vec{v}$.

REPRESENTACION GRAFICA. Según que r sea positivo o negativo la gráfica de $r\vec{v}$ puede ser:



PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores en R^2 y $r,s\varepsilon R$ (escalares), se cumplen las siguientes propiedades:

M_1:	$r\vec{a}\varepsilon R$	Clausura
M_2:	$(rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$	Asociatividad
M_3:	$1\vec{a} = \vec{a}$	Neutro multiplicativo
M_4:	$r\vec{a} = \theta \leftrightarrow r=0$ ó $\vec{a}=\theta$	Cero multiplicativo
M_5:	$-1\vec{a} = -\vec{a}$	Inverso aditivo
M_6:	$r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$	Distribuidad respecto a la adición de vectores.
	$(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$	Distribuidad respecto a la adición de escalares
M_7:	$||r\vec{a}|| = |r|.||\vec{a}||$	Magnitud respecto a múltiplos escalares.

Demostración de M_6:

i) Si $r\varepsilon R$ y $\vec{a},\vec{b}\varepsilon R^2$, tal que $\vec{a}=(x_1,y_1)$ y $\vec{b}=(x_2,y_2)$, demostraremos que:

$$r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a}+r\vec{b}$$

En efecto:
$$\begin{aligned} r(\vec{a}+\vec{b}) &= r[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] \\ &= r(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2) \\ &= [r(x_1+x_2)\ ,\ r(y_1+y_2)] \\ &= (rx_1+rx_2\ ,\ ry_1+ry_2) \\ &= (rx_1\ ,\ ry_1)+(rx_2\ ,\ ry_2) \\ &= r(x_1\ ,\ y_1)+r(x_2\ ,\ y_2) \\ &= r\vec{a}+r\vec{b} \end{aligned}$$

ii) Si $r,s\varepsilon R$ y $\vec{a}\varepsilon R^2$, tal que $\vec{a}=(x_1,y_1)$ demostraremos que:

$$r\vec{a}+s\vec{a} = (r+s)\vec{a}$$

En efecto:
$$\begin{aligned} r\vec{a}+s\vec{a} &= r(x_1,y_1)+s(x_1,y_1) \\ &= (rx_1\ ,\ ry_1)+(sx_1\ ,\ sy_1) \\ &= (rx_1+sx_1\ ,\ ry_1+sy_1) \\ &= [(r+s)x_1\ ,\ (r+s)y_1] \\ &= (r+s)(x_1\ ,\ y_1) \\ &= (r+s)\vec{a} \end{aligned}$$

1.12 VECTORES PARALELOS

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, no nulos, son paralelos o proporcionales si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro, es decir:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b} \leftrightarrow \vec{a}=r\vec{b}\ ,\ \forall r\varepsilon R \qquad (9)$$

Observaciones:

1. Si $r>0$ y $\vec{b}\neq\theta$ → $\vec{a}$ y $r\vec{b}$ tienen la misma dirección y sentido.
   Si $r<0$ y $\vec{b}\neq\theta$ → $\vec{a}$ y $r\vec{b}$ tienen la misma dirección y sentidos opuestos.

$\vec{b}$

$\vec{a}=r\vec{b}$

$r>0$

$\vec{b}$

$\vec{a}=r\vec{b}$

$r<0$

2. Es conveniente establecer que el vector nulo θ es paralelo a todo vector, esto es:

$$\theta \| \vec{a} \quad ó \quad \vec{a} \| \theta \ , \ \forall \vec{a} \in R^2$$

En efecto, si $\theta \| \vec{a} \rightarrow \theta = r\vec{a} = 0\vec{a} \quad (0 \in R)$

3. Todo vector es paralelo a si mismo.
En efecto, si $1 \in R \rightarrow \vec{a} = 1\vec{a}$, por lo que: $\vec{a} \| \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in R^2$

Ejemplo 1. Determinar si los vectores dados son paralelos.
1) $\vec{a}=(4,-1)$, $\vec{b}=(-12,3)$
2) $\vec{a}=(3,-6)$, $\vec{b}=(1,2)$

Solución. 1) Si $\vec{a} \| \vec{b} \rightarrow (4,-1)=r(-12,3) \leftrightarrow \begin{cases} 4=-24 & \rightarrow \quad r=-1/3 \\ -1=3r & \rightarrow \quad r=-1/3 \end{cases}$

Como r es único y r<0, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos, tienen la misma dirección y sentidos opuestos.

2) Si $\vec{a} \| \vec{b} \rightarrow (3,-6)=r(1,2) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 = r & \rightarrow \quad r=3 \\ -6=r & \rightarrow \quad r=-3 \end{cases}$

Como r no es único $\rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}$, es decir, no existe ningún $r \in R$ que cumple (3,-6)=r(1,2), pues esto implicaría que 3=r=-3, lo que es imposible.

Ejemplo 2. Demostrar que si $\vec{a},\vec{b} \in R^2$ son vectores paralelos y $\vec{b} \neq \theta$ entonces existe un escalar r para el cual se tiene:

$$\vec{a} = r\vec{b}$$

Demostración. En efecto, sean $\vec{a}=(x_1,y_1)$ y $\vec{b}=(x_2,y_2)$, y sean α_1 y α_2 los ángulos de dirección de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente. Según las ecuaciones (4) se tiene:

$$\text{Sen}\alpha_1 = \frac{y_1}{||\vec{a}||} \quad , \quad \text{Cos}\alpha_1 = \frac{x_1}{||\vec{a}||}$$

$$\text{Sen}\alpha_2 = \frac{y_2}{||\vec{b}||} \quad , \quad \text{Cos}\alpha_2 = \frac{x_2}{||\vec{b}||}$$

Como por hipótesis $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$, entonces:

$$m(\alpha_1) = m(\alpha_2) \quad ó \quad m(\alpha_1) = m(\alpha_2) \pm 180^\circ$$

Si $m(\alpha_1) = m(\alpha_2) \rightarrow \dfrac{y_1}{||\vec{a}||} = \dfrac{y_2}{||\vec{b}||} \ , \ \dfrac{x_1}{||\vec{a}||} = \dfrac{x_2}{||\vec{b}||}$

de donde se deduce que: $x_1 = \frac{||\vec{a}||}{||\vec{b}||}x_2$, $y_1 = \frac{||\vec{a}||}{||\vec{b}||}y_2$

Por hipótesis $||\vec{b}||\neq 0$, por lo que $\frac{||\vec{a}||}{||\vec{b}||}$ es un número real r,

entonces: $x_1 = rx_2$, $y_1 = ry_2$

Luego: $(x_1,y_1) = r(x_2,y_2)$; o sea: $\vec{a} = r\vec{b}$

Ejemplo 3. Demostrar que si: $\vec{a}||\vec{b}$, $\vec{b}||\vec{c}$ y $\vec{b}\neq\theta$ → $\vec{a}||\vec{c}$.

Demostración. En efecto, si $\vec{a}\neq\theta$ y $\vec{b}\neq\theta$, entonces:

i) $\vec{a}||\vec{b}$ → $\vec{a} = r\vec{b}$ /r∈R

ii) $\vec{b}||\vec{c}$ → $\vec{b} = s\vec{c}$ /s∈R

Luego, $\vec{a} = r\vec{b} = r(s\vec{c}) = (rs)\vec{c}$ → $\vec{a}||\vec{c}$

Ejemplo 4. Demostrar que si $\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$ y $\vec{b}||\vec{a}$, entonces:

$\vec{d}||\vec{a}$ ↔ $\vec{c}||\vec{a}$

Demostración. (→) Supongamos que $\vec{d}||\vec{a}$ → ∃r∈R/ $\vec{d}=r\vec{a}$

Pero por hipótesis: $\vec{b}||\vec{a}$ → ∃s∈R/ $\vec{b}=s\vec{a}$

Luego, si $\vec{c}=\vec{d}-\vec{b}=r\vec{a}-s\vec{a}=(r-s)\vec{a}$ → $\vec{c}||\vec{a}$

(←) Análogamente, supongamos que: $\vec{c}||\vec{a}$ → ∃t∈R/ $\vec{c}=t\vec{a}$

Pero por hipótesis $\vec{b}||\vec{a}$ → ∃s∈R/ $\vec{b}=s\vec{a}$

Luego, si $\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{a}=(s+t)\vec{a}$ → $\vec{d}||\vec{a}$

Ejemplo 5. Si $\vec{a}=(1-2m,1)$ y $\vec{b}=(-7,m+2)$, determinar los valores de m, de moso que $\vec{a}$ sea paralelo a $\vec{b}$.

Solución. Si $\vec{a}||\vec{b}$ → ∃r∈R/ $\vec{a} = r\vec{b}$

$$\rightarrow (1-2m,1) = r(-7,m+2) \leftrightarrow \begin{cases} 1-2m=-7r & (1) \\ 1=r(m+2) & (2) \end{cases}$$

Al dividir (1) entre (2) obtenemos: $2m^2+3m-9=0$

de donde: $m=-3$ ó $m=3/2$

Ejemplo 6. Si $\vec{a}=(1,18)$ lo expresamos como $\vec{a}=\vec{x}+\vec{y}$, donde $\vec{x}||\vec{b}$ e $\vec{y}||\vec{c}$. Si $\vec{b}=(-1,4)$ y $\vec{c}=(2m,3m)$, hallar el vector $\vec{x}$.

Solución. Si $\vec{x}||\vec{b}$ → $\vec{x} = r(-1,4)$

$\vec{y}||\vec{c}$ → $\vec{y} = s(2m,3m) = sm(2,3) = t(2,3)$

Luego, si $\vec{a}=\vec{x}+\vec{y} \rightarrow (1,18)=r(-1,4)+t(2,3) \leftrightarrow \begin{cases} 1=-r+2t & (1) \\ 18=4r+3t & (2) \end{cases}$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) obtenemos: r=3 y t=2

$$\therefore \vec{x} = (-3,12)$$

Ejemplo 7. Se tiene que: $\vec{a}=(m,2m)$, $\vec{a}-\vec{b}=(2m,p)$, $\vec{b}||\vec{a}$ y la norma de $\vec{a}-\vec{b}$ es 20. Hallar la norma de $\vec{b}$.

Solución. Si $\vec{b}||\vec{a} \rightarrow \vec{b} = r\vec{a} = r(m,2m) = mr(1,2)$ (1)

$\vec{a}-\vec{b} = (2m,r) \rightarrow (m,2m)-mr(1,2) = (2m,p)$

$\rightarrow (m-mr,2m-2) = (2m,p)$

Por igualdad de vectores: m-rm = 2m , de donde: r=-1

Luego, en (1): $\vec{b} = -m(1,2) \rightarrow ||\vec{b}|| = m\sqrt{5}$ (2)

Además: $\vec{a}-\vec{b} = (m,2m)+m(1,2) = 2m(1,2) \rightarrow ||a-b|| = 2m\sqrt{5}$

Si $||\vec{a}-\vec{b}||=20 \rightarrow 2m\sqrt{5} = 20 \rightarrow m=2\sqrt{5}$. Finalmente en (2):

$$||\vec{b}||= 10$$

Ejemplo 8. El vector $\vec{a}=(3,0)$ se descompone en dos vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ paralelos a los vectores $(2r,-\frac{3}{2}r)$ y $(p,-3p)$ respectivamente, donde $r\neq0$ y $p\neq0$. Hallar la longitud de $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución. Si $\vec{b}||(2r,-\frac{3}{2}r) \rightarrow \vec{b} = \frac{r}{2}(4,-3) = s(4,-3)$

$\vec{c}||(p,-3p) \rightarrow \vec{c} = p(1,-3)$

Si $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \rightarrow (3,0) = s(4,-3)+p(1,-3) \leftrightarrow \begin{cases} 3=4s+p \\ 0=-3s-3p \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos: s=1 y p=-1

Luego: $\vec{b} = (4,-3) \rightarrow ||\vec{b}|| = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = 5$

$\vec{c} = -(1-3) = (-1,3) \rightarrow ||\vec{c}|| = \sqrt{(-1)^2+(3)^2} = \sqrt{10}$

Ejemplo 9. Dados los vectores $\vec{a}=(2a,2)$, $\vec{b}=(6,n)$, $\vec{c}=(c,3n)$. Si $\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}$, calcular el valor de an+c.

Solución. Si $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow \vec{a} = t\vec{b} \rightarrow (2a,2) = t(6,n) \leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6t \\ 2 = tn \end{cases}$

Eliminando t del sistema obtenemos: an=6

Si $\vec{b}||\vec{c} \rightarrow \vec{b} = r\vec{c} \rightarrow (6,n)=r(c,3n) \leftrightarrow (6=rc)\quad(n=3rn)$

de donde: r=1/3 y c=18. Por tanto: an+c = 24

Ejemplo 10. Si $\vec{b}=(\sqrt{5},-\sqrt{20})$ y $c=(\sqrt{12},\sqrt{3})$; hallar $||\vec{v}_1||.||\vec{v}_2||$, siendo $\vec{v}_1||\vec{b}$, $\vec{v}_2||\vec{c}$ y $\vec{v}_1+\vec{v}_2=(-7,4)$.

Solución. Si $\vec{v}_1||\vec{b} \rightarrow \vec{v}_1 = s(\sqrt{5},-2\sqrt{5}) = s\sqrt{5}(1,-2) = t(1,-2)$

$\vec{v}_2||\vec{c} \rightarrow \vec{v}_2 = k(2\sqrt{3},\sqrt{3}) = k\sqrt{3}(2,1) = r(2,1)$

Entonces, si: $t(1,-2) + r(1,2) = (-7,4) \longrightarrow \begin{cases} t+2r = -7 \\ -2t+r = 4 \end{cases}$

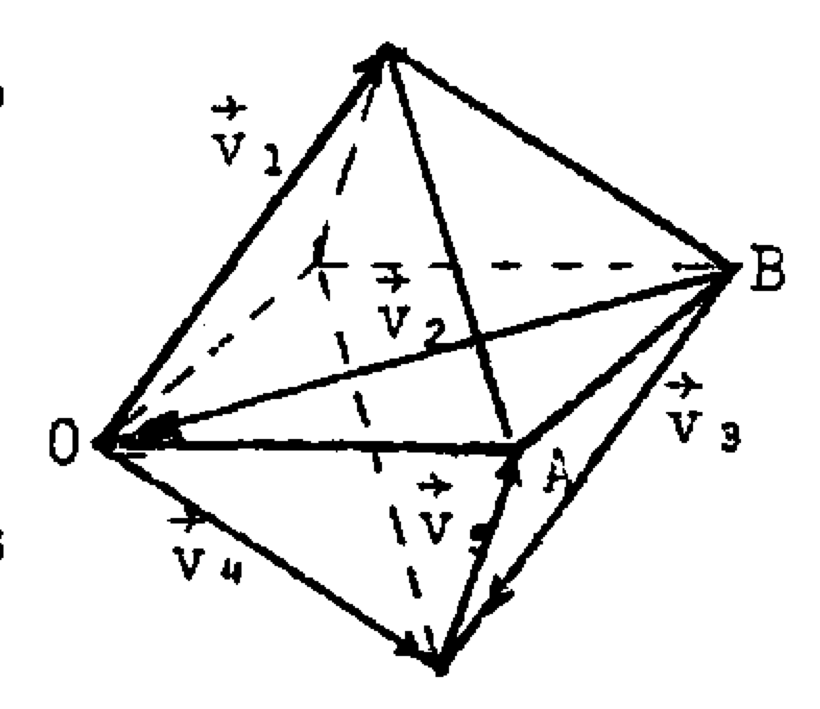
Resolviendo el sistema obtenemos: $r=-3$ y $t=-2$

Luego: $\vec{v}_1 = -2(1,-2) \rightarrow ||\vec{v}_1|| = |-2|\sqrt{(1)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{5}$

$\vec{v}_2 = -3(2,1) \rightarrow ||\vec{v}_2|| = 3\sqrt{(2)^2+(1)^2} = 3\sqrt{5}$

$\therefore ||\vec{v}_1||.||\vec{v}_2|| = 30$

Ejemplo 11. La figura adjunta es un octaedro regular de arista a en donde actuan los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ y $\vec{v}_5$. Hallar $||\vec{s}||$ si, $\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5$.

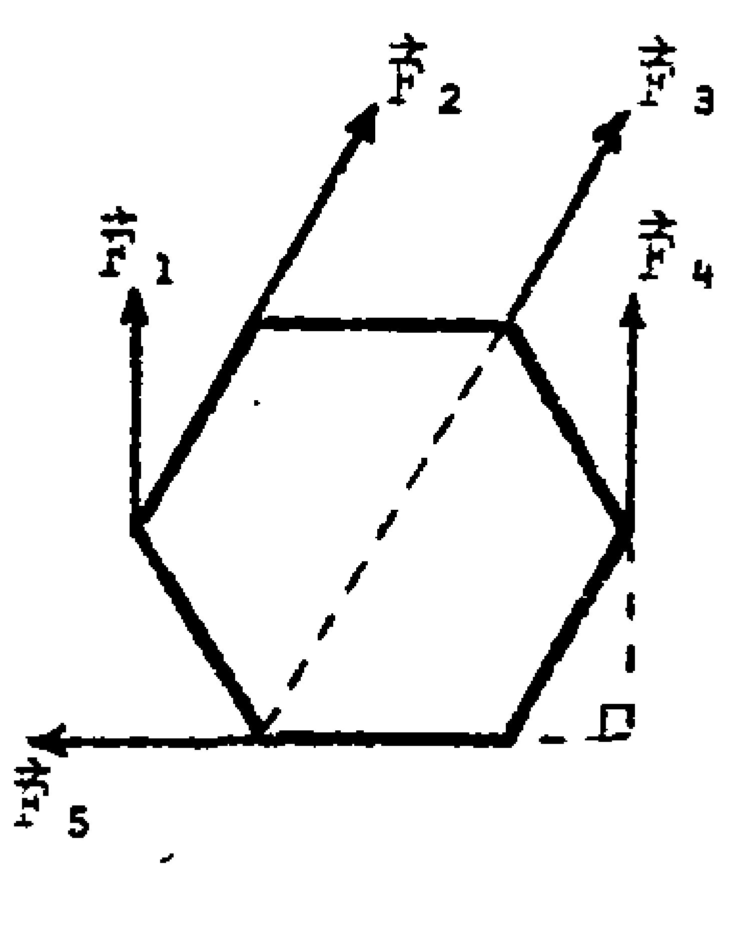


Solución. Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_3$ son paralelos y de sentido opuesto $\rightarrow \vec{v}_1 = -\vec{v}_3$

Además: $\overline{OA} = \vec{v}_4+\vec{v}_5 \rightarrow \vec{s} = \vec{v}_2 + \overline{OA} = \overline{AB}$

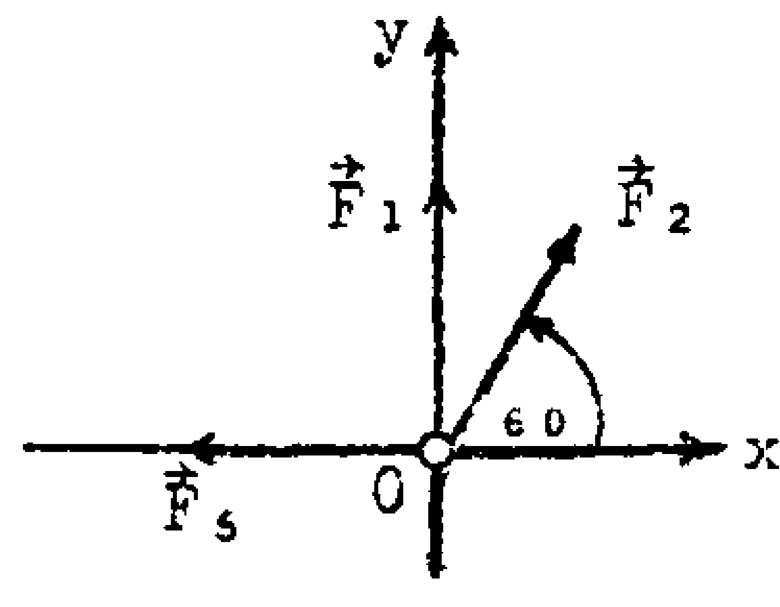
$\therefore ||\vec{s}|| = ||\overline{AB}|| = a$

Ejemplo 12. En la figura se tiene un exágono regular cuyo lado mide a . Si $||\vec{F}_1||=||\vec{F}_2||=||\vec{F}_3||=||\vec{F}_4||=||\vec{F}_5||= a$, hallar $||\vec{s}||$, donde: $\vec{s} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5$.



Solución. $\vec{F}_1=\vec{F}_4$ y $\vec{F}_2=\vec{F}_3$ por ser paralelos y de la misma magnitud, dirección y sentido. Entonces: $\vec{s} = 2\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 + \vec{F}_5$

Trasladando estos vectores a un sistema de ejes rectangulares se tiene:



$\vec{F}_1 = a(\text{Cos}90^\circ,\text{Sen}90^\circ) = a(0,1)$

$\vec{F}_2 = a(\text{Cos}60^\circ,\text{Sen}60^\circ) = a(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\vec{F}_5 = a(\text{Cos}180^\circ,\text{Sen}180^\circ) = a(-1,0)$

Luego, $\vec{s} = 2a(0,1)+a(1,\sqrt{3})+a(-1,0) = a(0,2+\sqrt{3}) \rightarrow ||\vec{s}||=a(2+\sqrt{3})$

EJERCICIOS

1. Demostrar que: $\vec{a}||\vec{c}$, $\vec{b}||\vec{c}$ y $\vec{c}\neq\theta$ $\rightarrow$ $\vec{a}||\vec{b}$

2. Demostrar que para vectores no nulos $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}$, $\vec{b}_1$:
$$\vec{a}||\vec{a}_1 \;,\; \vec{b}||\vec{b}_1 \text{ y } \vec{a}||\vec{b} \;\rightarrow\; \vec{a}_1||\vec{b}_1$$

3. Demostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección entonces:
$$||\vec{a}+\vec{b}|| = ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$$

4. Si $\vec{a}=(2,2m-3)$ y $\vec{b}=(1-m,-5)$, determinar los valores de m de modo que $\vec{a}$ sea paralelo a $\vec{b}$. Rp. $m=-1$ ó $m=7/2$

5. Si $\vec{a}=(m,5)+(3,3)$, $\vec{b}=4(-m,-3)-2(1,2)$ y $\vec{a}||\vec{b}$; determinar el valor de m. Rp. $m=2$

6. Dados los vectores $\vec{a}=(a,3m)$ y $\vec{b}=(-2m,b)$. Hallar a+b de modo que $\vec{a}+\vec{b}=(8,-4)$ y sea $\vec{a}||\vec{b}$. Rp. 5

7. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$; $\vec{a}=(a,2a)$, $\vec{a}-\vec{b}=(2a,p)$, $\vec{b}||\vec{a}$ y la norma de $\vec{a}-\vec{b}$ es $\sqrt{112}$. Hallar $||\vec{b}||$. Rp. $2\sqrt{7}$

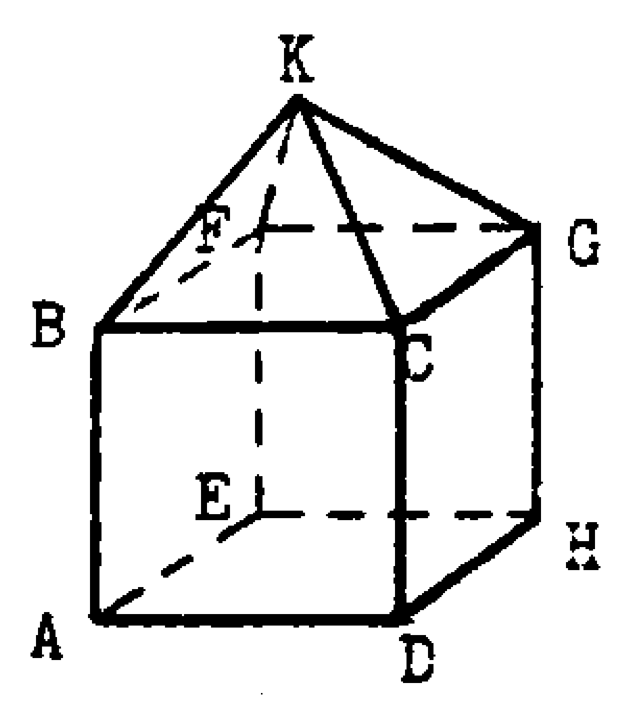
8. El vector $\vec{a}=(x,y)$ es paralelo al vector $\vec{b}=(2,4)$, tal que:
$\vec{u} = (\frac{x}{\sqrt{5}}, \frac{y}{\sqrt{5}})$ es un vector unitario paralelo a ambos. Hallar el vector $\vec{a}$. Rp. $\vec{a}=(\pm1,\pm2)$

9. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores en R^2, tales que $\vec{b}$ es el inverso aditivo de $\vec{a}$. Si $\vec{b}$ tiene el mismo sentido que el vector $\vec{c}=(-1/3,1/4)$ y $||\vec{a}||=5$, hallar $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$. Rp. $\vec{x}=(-4,3)$

10. Hallar la norma de la suma de los vectores unitarios $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si $\vec{u}||\vec{a}$ y $\vec{v}||\vec{b}$ sabiendo que $\vec{a}=(4,-3)$ y $\vec{b}=(-5,0)$. Rp. $\sqrt{10}/5$

11. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $\vec{a}$ es del mismo sentido que $\vec{b}$, $\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = (\frac{x}{\sqrt{40}}, \frac{y}{\sqrt{40}})$ y $\vec{b}=(1,3)$. Hallar $2x-\frac{1}{2}y$ Rp. 1

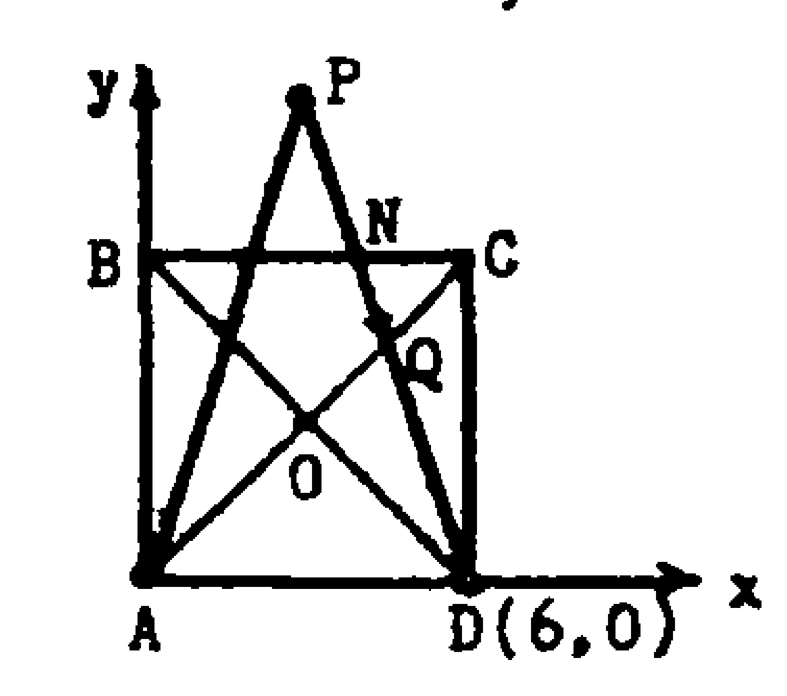
12. En la figura adjunta tenemos un cubo y como "techo" una pirámide regular, todos de arista a. Si $\vec{s} = \overline{DE} + \overline{BA} + \overline{KC} + \overline{HC} + \overline{FG}$, hallar la norma de $\vec{s}$. Rp. a



13. El vector $\vec{c}=(2,-1)$ es expresado como $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, donde los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{x}=(3m,4m)$ e $\vec{y}=(-3n,-n)$, respectivamente, siendo $m\neq0$ y $n\neq0$. Hallar $\vec{a}-\vec{b}$. Rp. $-\frac{1}{9}(48,31)$

14. En la figura adjunta, sea O la intersección de las diagonales de un cuadrado ABCD. Si O es el baricentro del triángulo isósceles APD con $||\overline{AP}||=||\overline{PD}||$. Hallar $\overline{NQ}$.

Rp. $\overline{NQ}=(1/2,-3/2)$

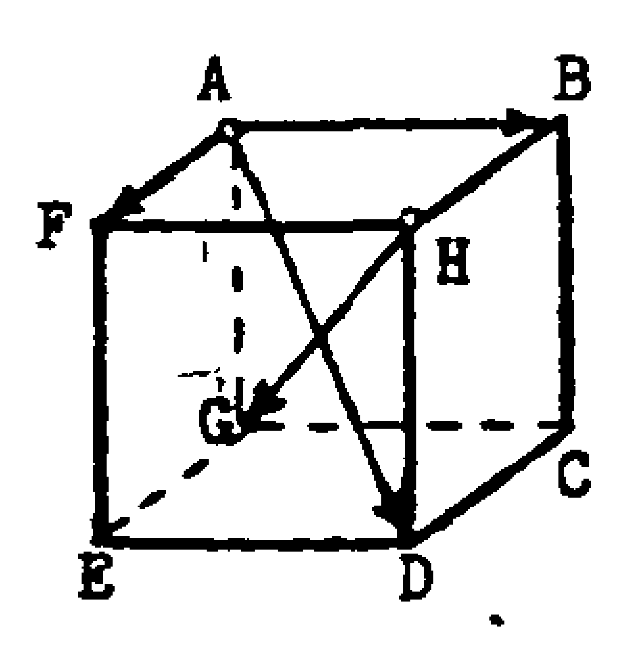


15. Dados los vértices consecutivos de un paralelogramo A(7,-1), B(-3,1) y C(-5,5). Determinar el cuarto vértice D y la longitud de la diagonal $\overline{BD}$. Rp. D(5,3) , $2\sqrt{17}$

16. La figura mostrada es un paralelogramo rectangular donde $||\overline{AB}||=4a$, $||\overline{AF}||=3a$ $||\overline{AG}||=6a$. Hallar $||\vec{s}||$ si:

$$\vec{s} = \overline{AD} + \overline{HG} + \overline{AB} + \overline{AF}$$

Rp. 13a

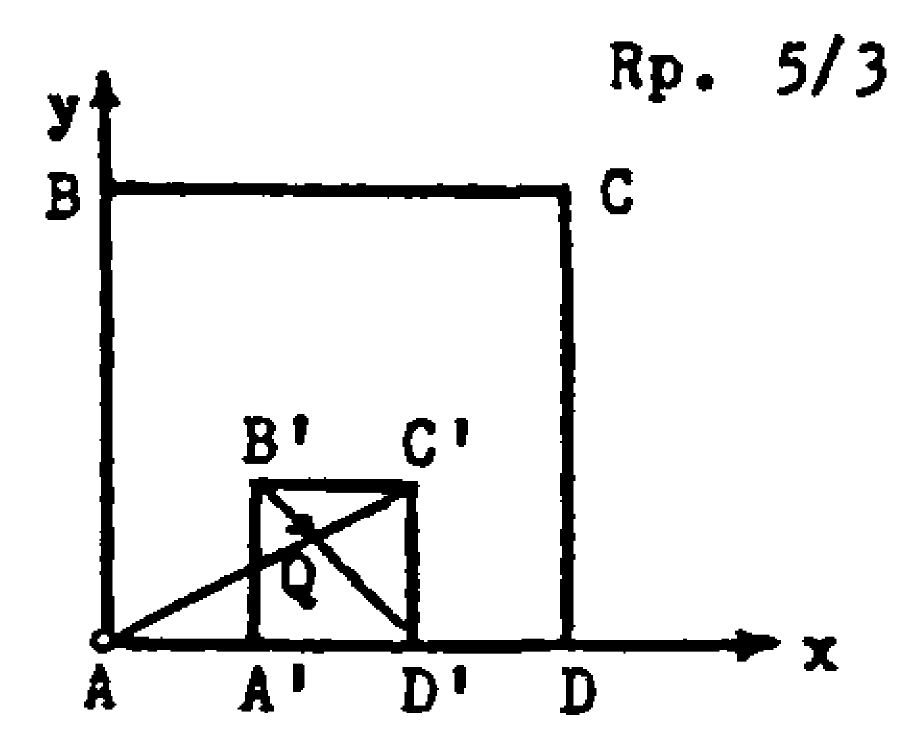


17. Si $\vec{a}=(a,b)$ y $\vec{b}=(1/2,-4/3)$ son dos vectores en R^2. Hallar a+b si $||\vec{a}||=(1/3)\sqrt{73}$ y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen sentidos opuestos.

Rp. 5/3

18. En la figura ABCD es un cuadrado de lado 3a y A'B'C'D' es un cuadrado de lado a, si $||\overline{D'D}||=a$ hallar $\overline{B'Q}$.

Rp. $\overline{B'Q} = \frac{1}{3}(a,-a)$

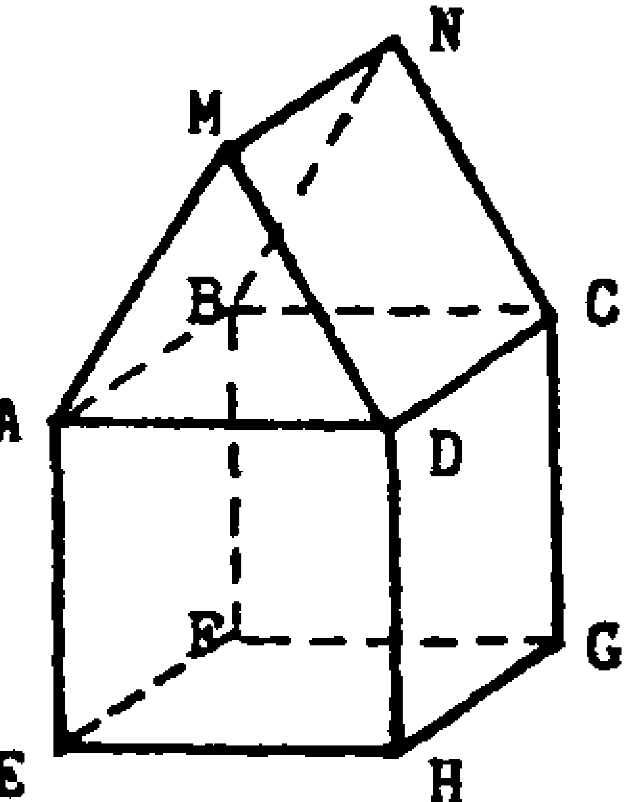


19. La figura representa un prisma superpuesto a un cubo, si todas las aristas son de longitud a y si:

$$\vec{s} = \overline{EC} + \overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{BA} + \overline{AM} + \frac{1}{2}\overline{GC}$$

Hallar el valor de $||\vec{s}||^2$.

Rp. $(\frac{15}{4} + \sqrt{5})a^2$



1.13 PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Dados los vectores $\vec{a}=(a_1,a_2)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2)$, el producto escalar o interno de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota por $\vec{a}.\vec{b}$, y se define por:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1,a_2).(b_1,b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 \qquad (10)$$

Observaciones:

i) El producto escalar de vectores es una operación cuyo resultado es un escalar y no un vector.

ii) Si $\vec{A},\vec{B}\varepsilon R^n$, entonces:

$$\vec{A}.\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR. Si $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores en R^2 y $r\varepsilon R$ es un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

E_1: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ — Conmutatividad

E_2: $r(\vec{a}.\vec{b}) = (r\vec{a}).\vec{b}$ — Asociatividad escalar

E_3: $\vec{c}.(\vec{a}+\vec{c}) = \vec{c}.\vec{a} + \vec{c}.\vec{b}$
$\quad (\vec{a}+\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$ — Distribuidad

E_4: $\vec{a}.\vec{a} = ||\vec{a}||^2 \geqslant 0$ — Magnitud respecto al producto escal.

E_5: $\vec{a}.\vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{a} = \theta$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO ESCALAR EN R^2

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores y $\vec{a}-\vec{b}$ (el vector que va de B a A). Si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$, ocurre que la representación geométrica de los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ es un triángulo rectángulo, para los cuales, por aplicación del teorema de Pitágoras se tiene que:

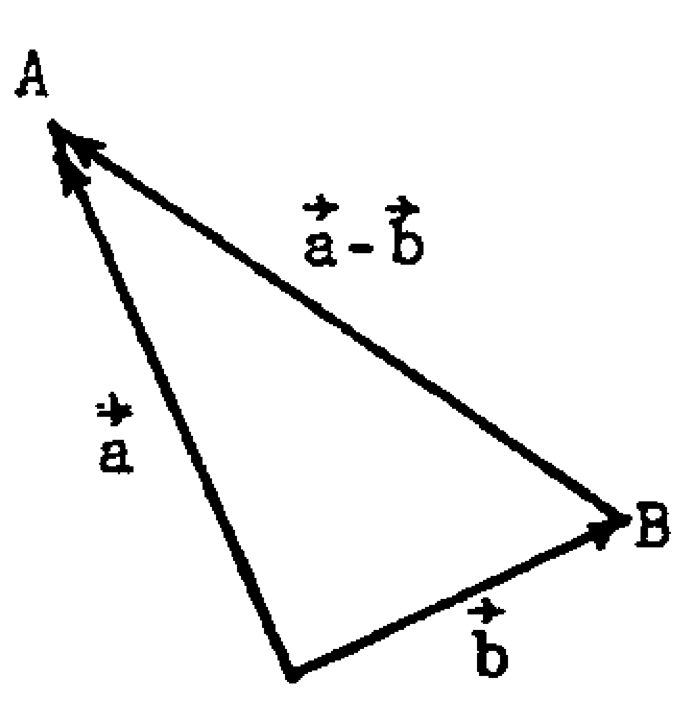
$||\vec{a}-\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2$

$\rightarrow \ (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 \qquad (E_4)$

$\rightarrow \ \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2 \qquad (E_3)$

$\rightarrow \ ||\vec{a}||^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2 \qquad (E_4)$

de donde: $-2\vec{a}.\vec{b} = 0 \ \leftrightarrow \ \vec{a}.\vec{b} = 0$



Como hemos establecido la condición de perpendicularidad para $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces podemos dar

la siguiente definición.

1.14 VECTORES ORTOGONALES Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $\vec{a}.\vec{b}=0$.

Si es el caso que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ambos no nulos, entonces se dice que los vectores son perpendiculares y anotaremos:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \leftrightarrow \quad \vec{a}.\vec{b} = 0 \tag{11}$$

Por ejemplo, si $\vec{a}=(1/2,-3)$ y $\vec{b}=(-2,-1/3)$, entonces según (10):

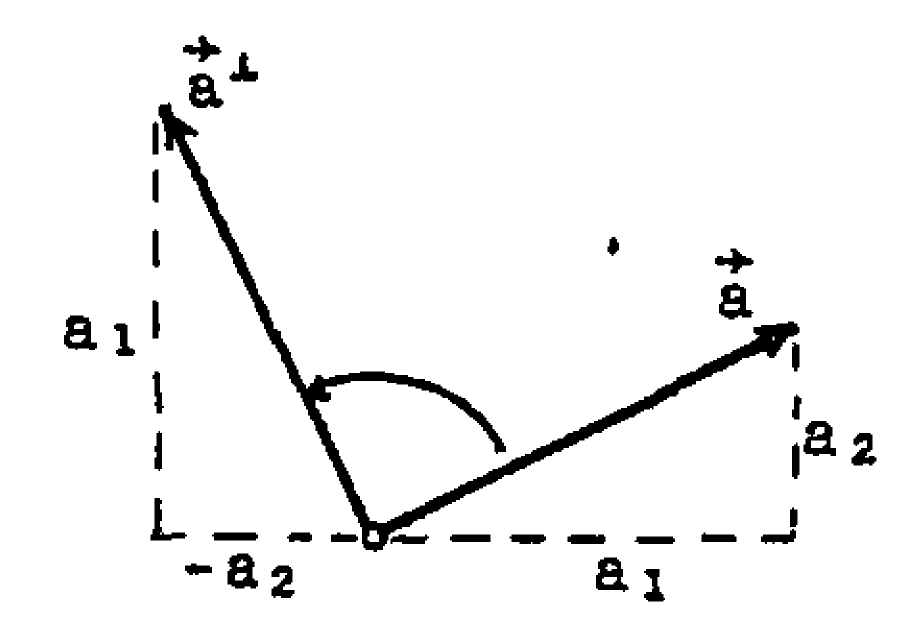
$$\vec{a}.\vec{b} = (1/2)(-2) + (-3)(-1/3) = -1 + 1 = 0$$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son nulos, entonces: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

DEFINICION 6. Para cada vector $\vec{a}=(a_1,a_2)\varepsilon R^2$, definimos un correspondiente vector $\vec{a}^{\perp}\varepsilon R^2$, que se lee *ortogonal a* $\vec{a}$, mediante:

$$\vec{a}^{\perp} = (-a_2,a_1) \tag{13}$$

Gráficamente el vector $\vec{a}^{\perp}$ se obtiene haciendo rotar el vector $\vec{a}$, sobre su punto inicial, un ángulo de 90^{o} en dirección contraria a las agujas del reloj.



Se verifica luego que si $\vec{a} \perp \vec{a}^{\perp}$, entonces $\vec{a}.\vec{a}^{\perp}=0$.

En efecto, $\vec{a}.\vec{a}^{\perp} = (a_1,a_2).(-a_2,a_1)$

$= -a_1a_2 + a_2a_1 = 0$

$\therefore \quad \vec{a} \perp \vec{a}^{\perp}$

PROPOSICION 1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en R^2, entonces se cumple:

i) $|\vec{a}.\vec{b}| \leq ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}||$

ii) $|\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \rightarrow \vec{a}||\vec{b}$

Demostración. i) Si $\vec{a}=\theta$ ó $\vec{b}=\theta$, entonces se nota claramente que la proposición es válida.

Supongamos que $\vec{a}\neq\theta$ y $\vec{b}\neq\theta$ y consideremos la función para un número $r\varepsilon R$:

$$f(r) = ||\vec{a}+r\vec{b}||^2 = (\vec{a}+r\vec{b}).(\vec{a}+r\vec{b}) \tag{1}$$

y ocurre que $f(r) \geq 0$, $\forall r\varepsilon R$

Desarrollando (1) nos dá el polinomio de segundo grado:

$$f(r) = (\vec{b}.\vec{b})r^2+2(\vec{a}.\vec{b})r + (\vec{a}.\vec{a})$$

Completando cuadrados se tiene:

$$f(r) = (\vec{b}.\vec{b})\left[r^2 + \frac{2(\vec{a}.\vec{b})}{(\vec{b}.\vec{b})} r + \frac{(\vec{a}.\vec{b})^2}{(\vec{b}.\vec{b})^2}\right] - \frac{(\vec{a}.\vec{b})^2}{(\vec{b}.\vec{b})} + (\vec{a}.\vec{a})$$

$$= (\vec{b}.\vec{b}) \left(r + \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\right)^2 + \frac{(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{b})^2}{\vec{b}.\vec{b}}$$

Si hacemos $r_o = -\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}} \rightarrow f(r_o) = \frac{(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{b})^2}{\vec{b}.\vec{b}}$ (2)

Como $f(r_o) \geq 0$ y $\vec{b}.\vec{b} = ||\vec{b}||^2>0$, esto implica que:

$$(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{b})^2\geq 0 \leftrightarrow (\vec{a}.\vec{b})^2 \leq (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})$$

$$\leftrightarrow |\vec{a}.\vec{b}|^2 \leq ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2$$

$$\therefore |\vec{a}.\vec{b}| \leq ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$$

ii) Demostraremos que: $|\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| \leftrightarrow \vec{a}||\vec{b}$

($\rightarrow$) Si $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow |\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$

En efecto, si $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow \vec{a}=r\vec{b}$

Luego: $|\vec{a}.\vec{b}| = |(r\vec{b}).\vec{b}| = |r(\vec{b}.\vec{b})| = |r|\,||\vec{b}||^2$

$= |r|\,||\vec{b}||\,||\vec{b}|| = ||r\vec{b}||\,||\vec{b}||$

$\therefore |\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$

($\leftarrow$) Si $|\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\,||\vec{b}|| \rightarrow \vec{a}||\vec{b}$

En efecto, si $|\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\,||\vec{b}|| \rightarrow (\vec{a}.\vec{b})^2=||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2$

$\rightarrow (\vec{a}.\vec{b})^2=(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})$

Sustituyendo en (2) ocurre que: $f(r_o)=|\vec{a}+r_o\vec{b}|=0$

$\rightarrow \vec{a} + r_o\vec{b} = \vec{a} - (\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}})\vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} = r\vec{b}$

Por tanto: $\vec{a}||\vec{b}$

PROPOSICION 1.3 (Desigualdad triangular). Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en R^2, entonces: $||\vec{a}+\vec{b}|| \leq ||\vec{a}||+||\vec{b}||$

Más aún: $||\vec{a}+\vec{b}||=||\vec{a}||+||\vec{b}||$ si y sólo si un vector es un múltiplo escalar no negativo del otro.

Demostración. En efecto: $||\vec{a}+\vec{b}||^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$

$$= ||\vec{a}||^2+ 2\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2$$

$$\rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + 2|\vec{a}.\vec{b}| + \|\vec{b}\|^2$$

Por la desigualdad de Schwartz, se tiene que:

$$\rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2$$

$$\leq (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

$$\therefore \quad \|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

Ejemplo 1. Demostrar que: $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$

Demostración. En efecto: $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$ (E_4)

$= \vec{a}.(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{b}.(\vec{a}+\vec{b})$ (E_3)

$= \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$ (E_3)

$= \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{b}$ $(E_1$ y $E_2)$

$\therefore \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$ (E_4)

Ejemplo 2. Demostrar que $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$.

Demostración. Demostraremos primero la ortogonalidad.
En efecto, por hipótesis:

$$\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\| \rightarrow \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2$$

$$\rightarrow \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 0$$

$$\rightarrow (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = 0$$

Por tanto, según (11), $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son ortogonales.

Ahora demostraremos la igualdad de las magnitudes.
En efecto, por hipótesis, $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son ortogonales

$$\rightarrow (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = 0$$

$$\rightarrow \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{b} = 0$$

$$\rightarrow \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 0 \rightarrow \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2$$

Por tanto: $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$

Ejemplo 3. Demostrar que: $(\vec{a}+\vec{b})^{\perp} = \vec{a}^{\perp} + \vec{b}^{\perp}$

Demostración. En efecto, sean: $\vec{a}=(a_1,a_2)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2)$

$$\rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2)$$

$$\rightarrow (\vec{a} + \vec{b})^{\perp} = (-a_2-b_2, a_1+b_1)$$

$$= (-a_2, a_1) + (-b_2, b_1)$$

$$\therefore\ (\vec{a} + \vec{b})^{\perp} = \vec{a}^{\perp} + \vec{b}^{\perp}$$

Ejemplo 4. Demostrar que si el vector $\vec{v}=(\vec{b}^{\perp}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})\vec{b}$ es paralelo al vector $\vec{c}$.

Demostración. En efecto, sean $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ y $\vec{c}=(c_1,c_2)$ vectores en R^2.

$$(\vec{b}^{\perp}.\vec{c})\vec{a} = [(-b_2,b_1).(c_1,c_2)](a_1,a_2)$$
$$= (-b_2c_1+b_1c_2)(a_1,a_2)$$
$$= (-a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2\ ;\ -a_2b_2c_1 + a_2b_1c_2) \qquad (1)$$

$$(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})\vec{b} = [(-a_2,a_1).(c_1,c_2)](b_1,b_2)$$
$$= (-a_2c_1+a_1c_2)(b_1,b_2)$$
$$= (-a_2b_1c_1 + a_1b_1c_2\ ,\ -a_2b_2c_1 + a_1b_2c_2) \qquad (2)$$

Restando (1)-(2) obtenemos:

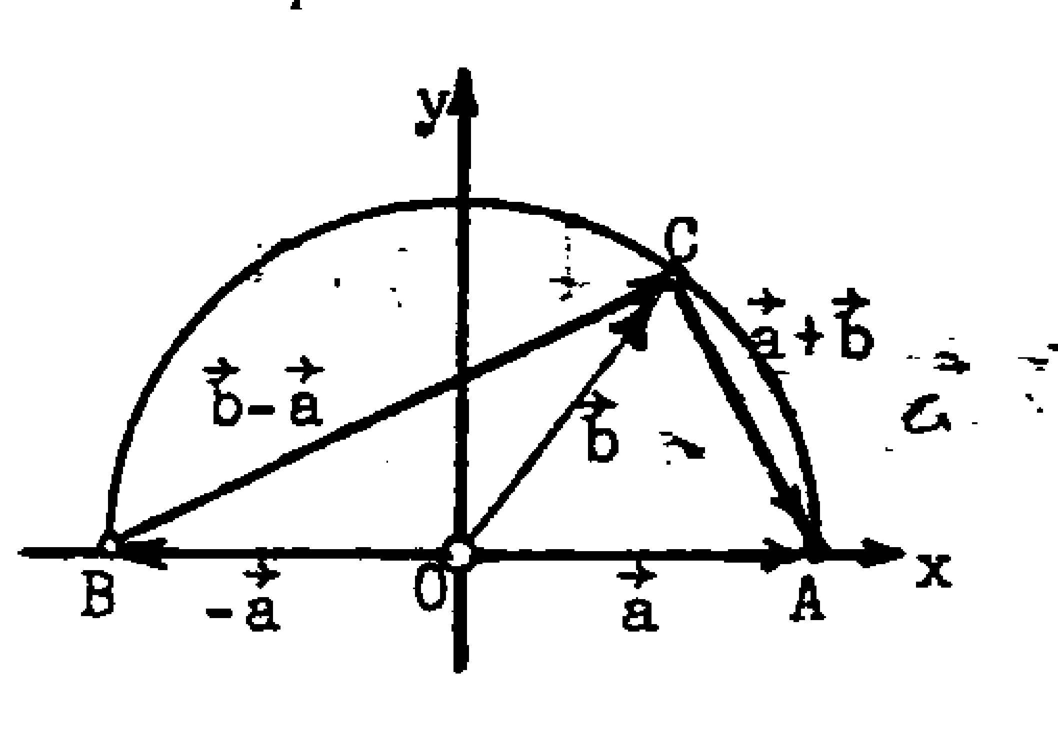
$$\vec{v} = (a_2b_1c_1-a_1b_2c_1\ .\ a_2b_1c_2-a_1b_2c_2)$$
$$= [(a_2b_1-a_1b_2)c_1\ ,\ (a_2b_1-a_1b_2)c_2]$$
$$= (a_2b_1-a_1b_2)(c_1,c_2)$$

El coeficiente de c es un escalar, por tanto:

$$\vec{v} = .r\vec{c} \rightarrow \vec{v}\,||\,\vec{c}$$

Ejemplo 5, Demostrar por métodos vectoriales, que un triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo.

Demostración. Supongamos el ΔBCA inscrito en el semicírculo cuyo centro es el origen y cuyo radio es $||\vec{b}||$.



Según la figura debemos probar que $\overline{BC}\perp\overline{CA}$.

En efecto, $\overline{BC}.\overline{CA} = (\vec{b}-\vec{a}).(\vec{b}+\vec{a})$
$$= \vec{b}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{a}$$
$$= ||\vec{b}||^2-||\vec{a}||^2$$

Pero $||\vec{b}||=||\vec{a}||$ por ser radios del semicírculo.

Por tanto: $\overline{BC}.\overline{CA} = 0 \rightarrow \overline{BC}\perp\overline{CA}$

Ejemplo 6. Resolver la ecuación: $2\left[(1/2,6) + \vec{i}^{\perp} - \vec{x}\right] = \vec{j}^{\perp} - 2\vec{x}^{\perp}$ si $\vec{i}=(1,0)$ y $\vec{j}=(0,1)$.

Solución. $2\left[(1/2,6) + (1,0)^{\perp} - (x_1,x_2)\right] = (0,1)^{\perp} - 2(x_1,x_2)^{\perp}$

$\rightarrow\ (1,2) + (0,2) - 2(x_1,x_2) = (-1,0) - 2(-x_2,x_1)$

$\rightarrow\ (2,14) = 2(x_1,x_2) - 2(-x_2,x_1)$

$$\rightarrow\ (1,7) = (x_1+x_2, x_2-x_1) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = x_1 + x_2 \\ 7 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

de donde obtenemos: $x_1=-3$ y $x_2=4 \rightarrow \vec{x} = (-3,4)$

Ejemplo 7. Sean $\vec{a}.\vec{b}\varepsilon R^2$, demostrar que si $2\vec{a}^{\perp}-\vec{b} = 2\vec{b}^{\perp}-\vec{a}$, entonces $\vec{a}+\vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}-\vec{b}$.

Demostración. En efecto, si $2\vec{a}^{\perp}-\vec{b}=2\vec{b}^{\perp}-\vec{a} \rightarrow \vec{a}-\vec{b} = 2(\vec{b}^{\perp}-\vec{a}^{\perp})$ (1)

Aplicando el ortogonal a ambos miembros de (1) y haciendo uso de las propiedades: $(\vec{a}+\vec{b})^{\perp} = \vec{a}^{\perp}+\vec{b}^{\perp}$

$(\vec{a}^{\perp})^{\perp} = -\vec{a}$

se tiene: $(\vec{a}-\vec{b})^{\perp} = 2(\vec{b}^{\perp}-\vec{a}^{\perp})^{\perp}$

$\rightarrow\ \vec{a}^{\perp}-\vec{b}^{\perp} = 2(-\vec{b} + \vec{a}) \rightarrow 4(\vec{a}-\vec{b}) = 2(\vec{a}^{\perp}-\vec{b}^{\perp})$ (2)

Sumando (1) y (2) obtenemos: $5(\vec{a}-\vec{b})=\theta \rightarrow \vec{a}-\vec{b}=\theta$

Luego, $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a}+\vec{b}).\theta = 0$

Por tanto, según (11): $(\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b})$

Ejemplo 8. Hallar la norma del vector $\vec{b}=(-3m,m)$, sabiendo que ha sido descompuesto en el vector $\vec{a}=(-5,3)$ y en otro vector paralelo al vector $\vec{c}=(1,1)$.

Solución. Si $\vec{b}=m(-3,1) \rightarrow ||\vec{b}|| = |m|\sqrt{(-3)^2+(1)^2} = |m|\sqrt{10}$ (1)

y si: $\vec{b}=\vec{a}+r\vec{c} \rightarrow m(-3,1) = (-5,3)+r(1,1)$

Multiplicando cada extremo, escalarmente por $(1,1)^{\perp}$, se tiene:

$m(-3,1).(-1,1) = (-5,3).(-1,1) + r(1,1).(-1,1)$

$\rightarrow m(3+1) = (5+3) + r(0)$, de donde: $m=2$

Por tanto, en (1) se tiene: $||\vec{b}|| = 2\sqrt{10}$

Ejemplo 9. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores unitarios y paralelos, hallar la norma de $\vec{a}^{\perp}+\vec{b}$.

Solución. Sabemos que si: $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow \vec{a} = r\vec{b}$

o bien: $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow \vec{a}^{\perp}.\vec{b} = 0$

Entonces: $||\vec{a}^{\perp}+\vec{b}||^2 = ||\vec{a}^{\perp}||^2+2\vec{a}^{\perp}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2$

$= (1) + 2(0) + (1)$

$\therefore\ ||\vec{a}^{\perp}+\vec{b}|| = \sqrt{2}$

Ejemplo 10. Si $\vec{a}=(-6,15)$, $\vec{b}=(-2,9)$ y $\vec{c}=(-2m,3m)$ y se sabe que: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$, $\vec{x}||\vec{b}$ e $\vec{y}||\vec{c}$. Hallar $\vec{x}.\vec{y}^{\perp}$.

Solución. Si $\vec{x}||\vec{b} \rightarrow \vec{x} = t\vec{b} \rightarrow \vec{x} = t(-2,9)$ (1)
$\vec{y}||\vec{c} \rightarrow \vec{y} = s\vec{c} \rightarrow \vec{y} = sm(-2,3) = r(-2,3)$ (2)

Luego, si: $t(-2,9)+r(-2,3) = (-6,15) \rightarrow \begin{cases} -2t-2r=-6 \rightarrow t+r=3 \\ 9t+3r=15 \rightarrow 3t+r=5 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos: $t=1$ y $r=2$
Sustituyendo en (1) y (2): $\vec{x}=(-2,9)$, $\vec{y}=(-4,6)$

$$\therefore\ \vec{x}.\vec{y}^{\perp} = (-2,9).(-6,-4) = 12-36 = -24$$

Ejemplo 11. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ son vectores unitarios, hallar la norma del vector $\vec{a}-\vec{b}$.

Solución. Si el vector $\vec{a}+\vec{b}$ es unitario $\rightarrow ||\vec{a}+\vec{b}||=1$

$\rightarrow ||\vec{a}+\vec{b}||^2=1 \rightarrow ||\vec{a}||^2+2\vec{a}.\vec{b}+||\vec{b}||^2=1$
$\rightarrow 1 + 2\vec{a}.\vec{b} + 1 = 1 \leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = -1/2$

Luego: $||\vec{a}-\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 1-2(-1/2)+1 = 3$

$$\therefore\ ||\vec{a}-\vec{b}|| = \sqrt{3}$$

Ejemplo 12. Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\theta$ y $||\vec{a}||=2$, $||\vec{b}||=5$, $||\vec{c}||=8$; hallar $\vec{a}.\vec{b}$

Solución. Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\theta \rightarrow \vec{a}+\vec{b} = -\vec{c} \rightarrow ||\vec{a}+\vec{b}||^2 = ||-\vec{c}||^2$
$\rightarrow ||\vec{a}||^2+2\vec{a}.\vec{b}+||\vec{b}||^2 = ||\vec{c}||^2$
$\rightarrow 4 + 2\vec{a}.\vec{b} + 25 = 64$

de donde: $\vec{a}.\vec{b} = 35/2$

Ejemplo 13. Si $\vec{a}=(1,x)$, $\vec{b}=(2x,x)$ y $\vec{c}=(2x,-1)$, donde x es un número real; hallar la suma de los elementos del conjunto $M = \{(x,y)/(a-c).b = a.c-1\}$.

Solución. Tenemos: $\vec{a}-\vec{c} = (1,x)-(2x,-1) = (1-2x,x+1)$
$\rightarrow M = \{(x,y)/(1-2x,x+1).(2x,x) = (1,x).(2x,-1)-1\}$
$= \{(x,y)/2x-4x^2+x^2+x = 2x-x-1\}$
$= \{(x,y)/3x^2-2x-1=0\}$

Por tanto, si $M = \{x_1,x_2\} \rightarrow x_1+x_2=2/3$

Ejemplo 14. Dado el vector $\vec{b}=(2,3)$ y la función $f:R^2\to R/f(\vec{p})=\vec{p}.\vec{b}$ El vector $\vec{a}$ es tal que $f(\vec{a})=-16$ y $\vec{a}||\vec{c}=(1,2)$. Calcular la norma de $\vec{a}$.

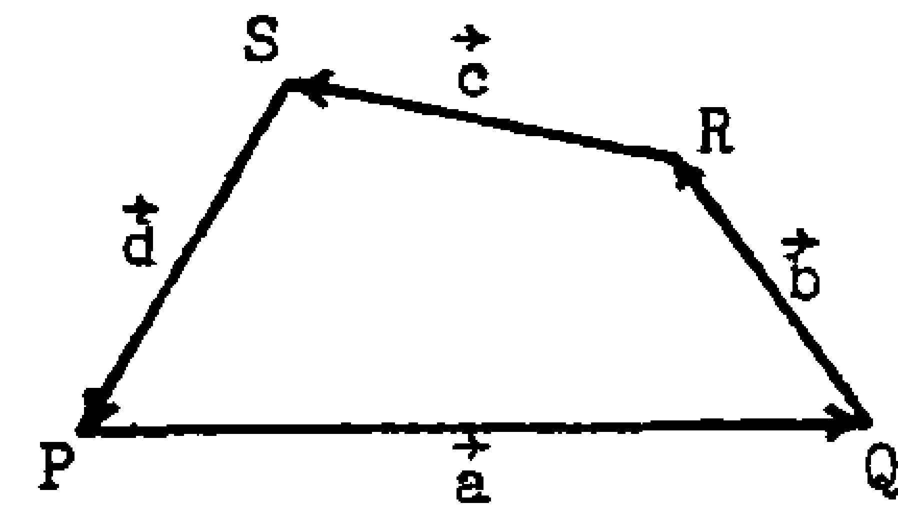
Solución. Si $f(\vec{p})=\vec{p}.\vec{b} \to f(\vec{a}) = \vec{a}.\vec{b} = -16$

$\vec{a}||\vec{c} \to \vec{a} = r\vec{c} = r(1,2)$ (1)

Entonces: $\vec{a}.\vec{b} = r(1,2).(2,3) \leftrightarrow -16 = r(2+6) \to r=-2$

Luego, en (1): $\vec{a} = -2(1,2) \to ||\vec{a}|| = |-2|\sqrt{1+4} = 2\sqrt{5}$

Ejemplo 15. Sea el cuadrilátero PQRS. Sean: $\vec{a}=\overline{PQ}$, $\vec{b}=\overline{QR}$, $\vec{c}=\overline{RS}$ y $\vec{d}=\overline{SP}$. Hallar $\vec{c}.\vec{d}$ si se sabe que: $||\vec{a}+\vec{b}||=7$, $||\vec{c}||=3$ y $||\vec{d}||=5$.



Solución. De la figura obtenemos:

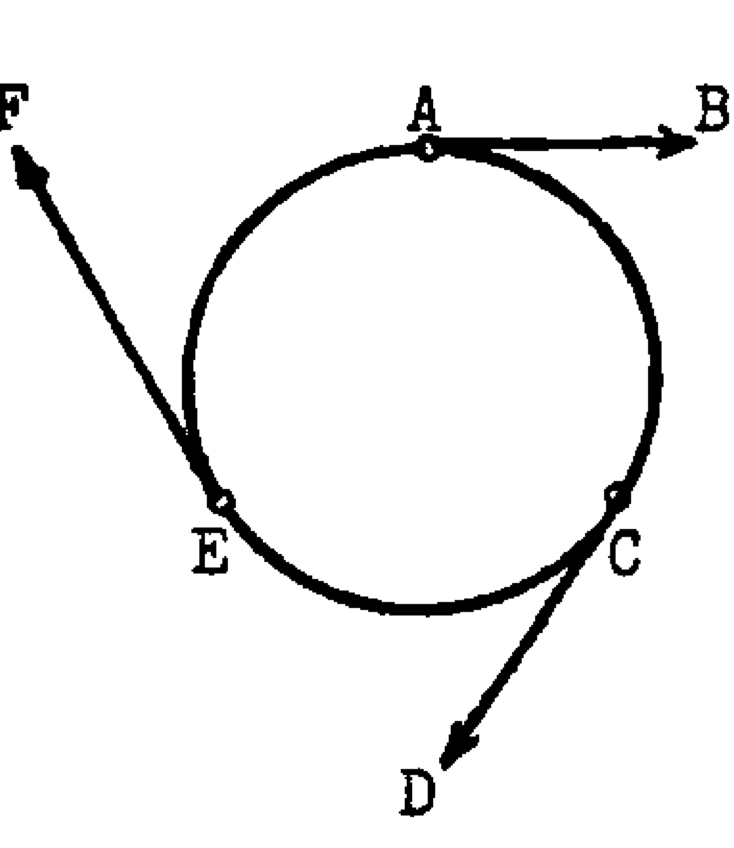
$\vec{d} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \to ||\vec{d}-\vec{c}||=||\vec{a}+\vec{b}||=7$

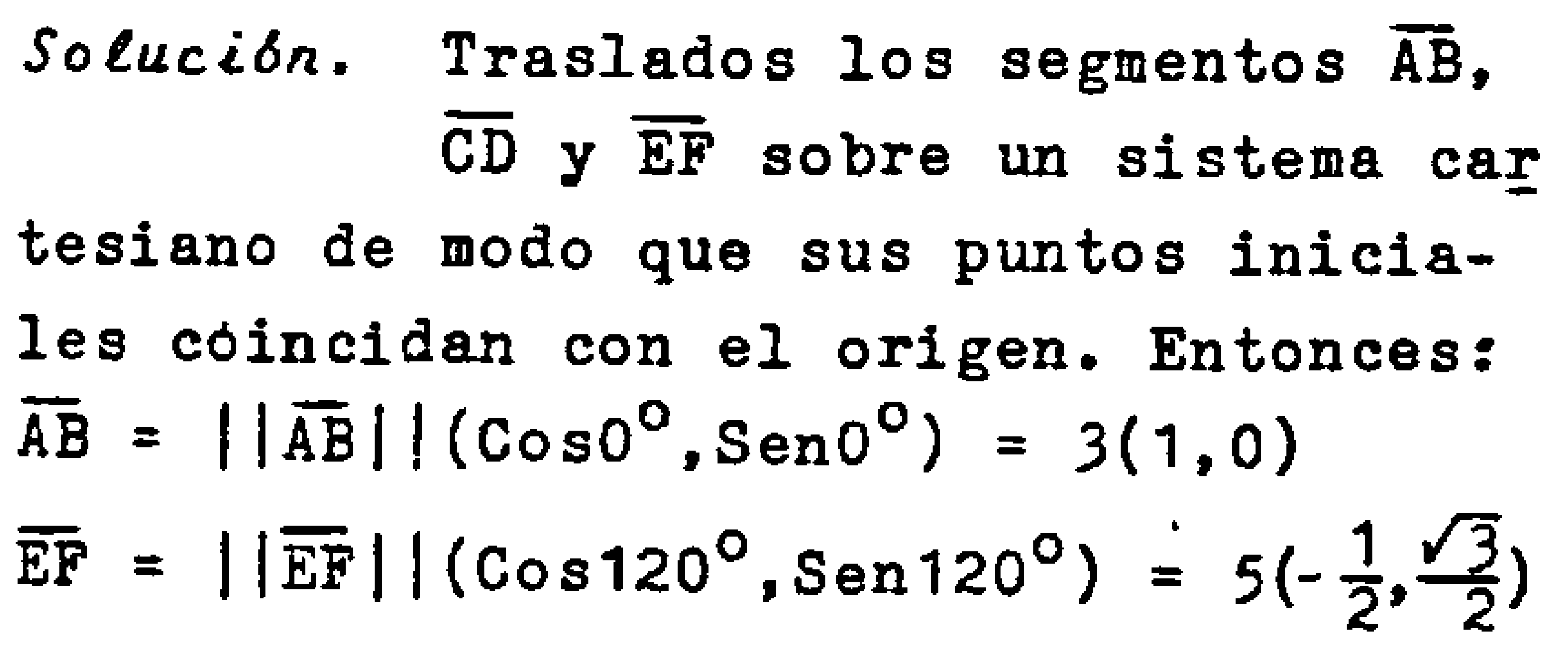
Elevando al cuadrado: $||\vec{d}||^2-2\vec{d}.\vec{c}+||\vec{c}||^2= 49$

$\to 25 - 2\vec{c}.\vec{d} + 9 = 49$

de donde: $\vec{c}.\vec{d} = -7.5$

Ejemplo 16. En la figura A , C y E son puntos correspondientes a vértices de un triángulo equilátero inscrito y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son tangentes a la circunferencia tales que $||\overline{AB}||=3$, $||\overline{CD}||=4$, $||\overline{EF}||=5$. Hallar $\vec{s}.\vec{u}$, si $\vec{s} = \overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$ y $\vec{u} = (2,2\sqrt{3})$.

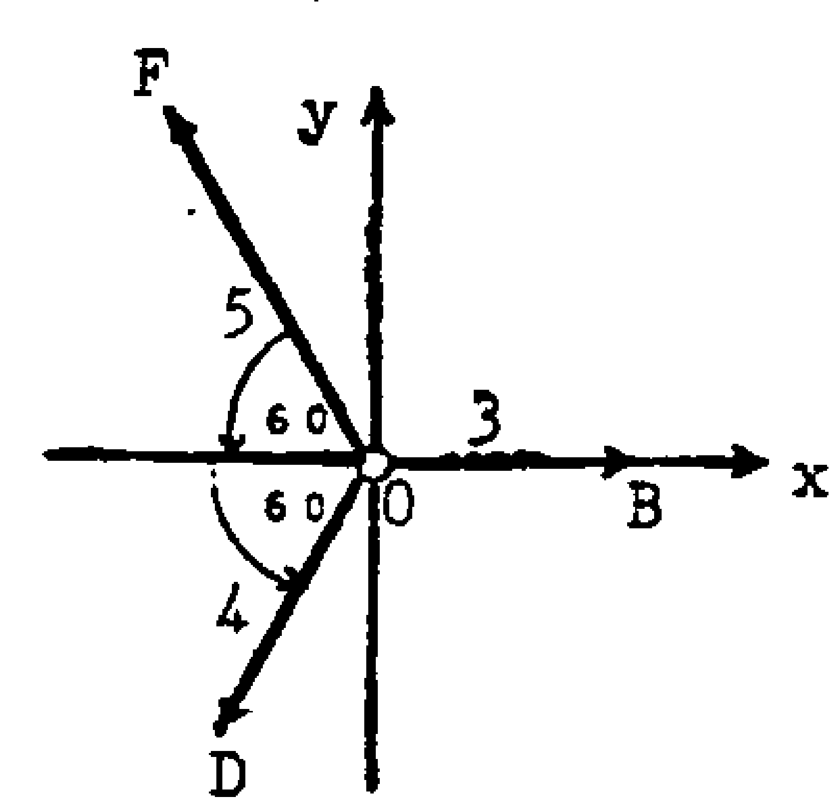




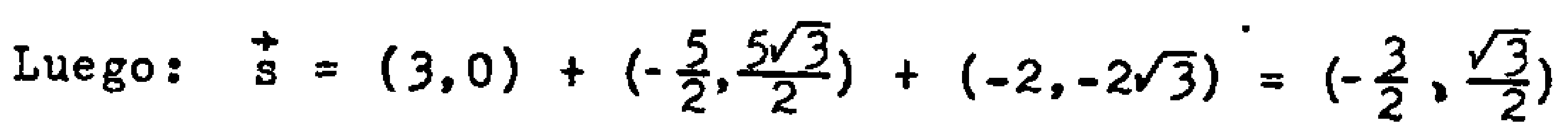
Solución. Traslados los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ sobre un sistema cartesiano de modo que sus puntos iniciales coincidan con el origen. Entonces:

$\overline{AB} = ||\overline{AB}||(\text{Cos}0^\circ,\text{Sen}0^\circ) = 3(1,0)$

$\overline{EF} = ||\overline{EF}||(\text{Cos}120^\circ,\text{Sen}120^\circ) = 5(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$



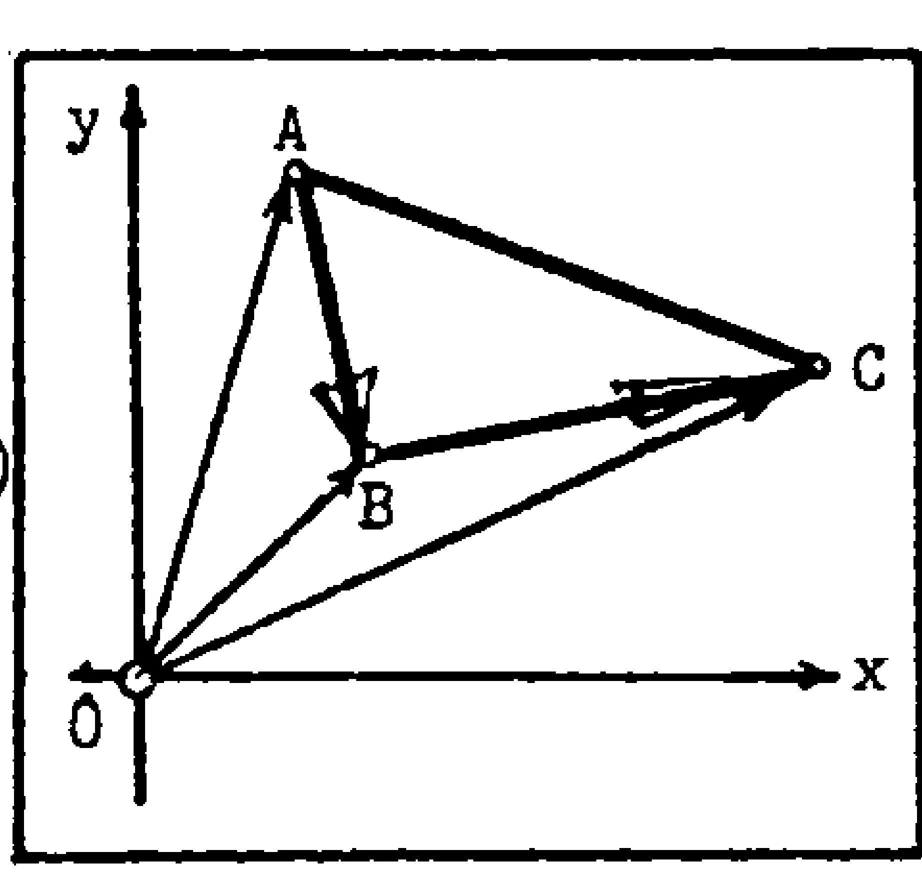
$\overline{CD} = ||\overline{CD}||(\text{Cos}240^\circ,\text{Sen}240^\circ) = 4(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$



Luego: $\vec{s} = (3,0) + (-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}) + (-2,-2\sqrt{3}) = (-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

Por consiguiente: $\vec{s}.\vec{u} = \frac{1}{2}(-3,\sqrt{3}).2(1,\sqrt{3}) = -3+3 = 0$

Ejemplo 17. En la figura, $m(\measuredangle ABC)=90^{\circ}$ y $||\overline{OB}||=3$. Hallar x si:
$x = \overline{OB}.\overline{OC} + \overline{OA}.\overline{OB} - \overline{OA}.\overline{OC}$



Solución. $x = \overline{OB}.(\overline{OB}+\overline{BC})+\overline{OA}.\overline{OB}-\overline{OA}.(\overline{OB}+\overline{BC})$

$\rightarrow x = ||\overline{OB}||^2+\overline{OB}.\overline{BC}+\overline{OA}.\overline{OB}-\overline{OA}.\overline{OB}-\overline{OA}.\overline{BC}$

$= ||\overline{OB}||^2+\overline{BC}(\overline{OB}-\overline{OA}) = ||\overline{OB}||^2+\overline{BC}.\overline{AB}$

Pero: $\overline{BC}\perp\overline{AB} \rightarrow \overline{BC}.\overline{AB} = 0$

$\therefore x = ||\overline{OB}||^2 = (3)^2 = 9$

Ejemplo 18. Dados $\vec{a}=(m,3p)$ y $\vec{b}=(-2p,n)$. Hallar el valor de $\frac{m+n}{p}$ de modo que: $\vec{a}+\vec{b}=(8,-4)$ y $\vec{a}.\vec{b}=0$.

Solución. Si $(m,3p)+(-2p,n)=(8,-4) \rightarrow \begin{cases} m-2p=8 \rightarrow m=2p+8 & (1) \\ 3p+n=-4 \rightarrow n=-3p-4 & (2) \end{cases}$

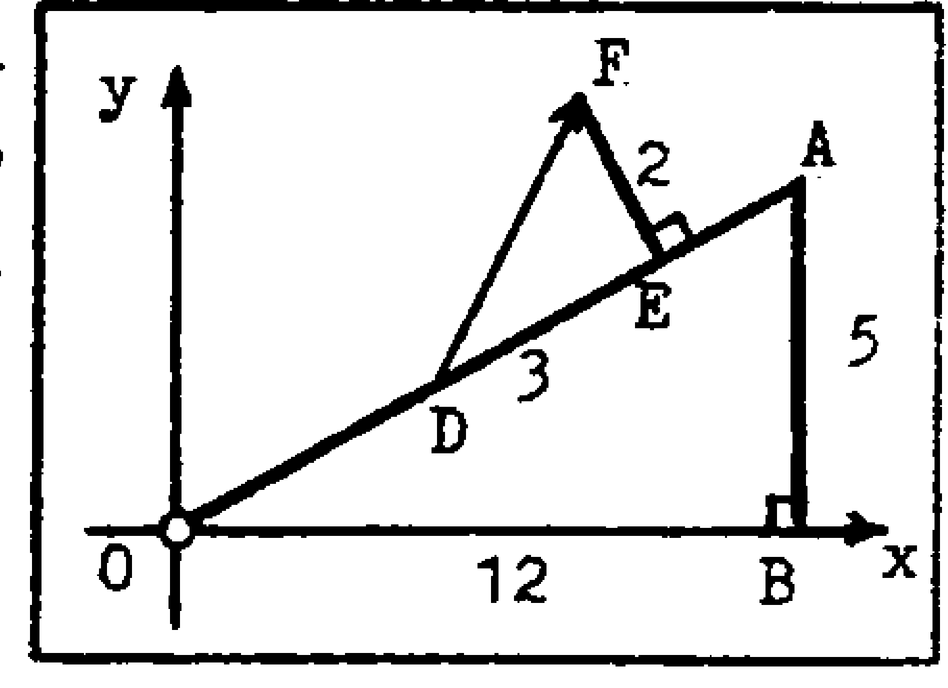
Además: $(m,3p).(-n,-2p)=0 \rightarrow -mn-6p^2=0 \rightarrow mn = -6p^2$ (3)

Sustituyendo (1) y (2) en (3) se tiene: $(2p+8)(-3p-4)=-6p^2$

de donde: p=-1 , luego, en (1) y (2) obtenemos: m=6 y n=-1

$\therefore \frac{m+n}{p} = -5$

Ejemplo 19. Un triángulo DEF se encuentra sobre un plano inclinado como se muestra en la figura adjunta. Hallar el vector $\overline{DF}$.



Solución. Tenemos: $\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF}$

$||\overline{OA}|| = \sqrt{(12)^2+(5)^2} = 13$

Un vector unitario en el sentido de $\overline{OA}$ es: $\vec{u} = \frac{(12,5)}{13}$

Entonces: $\overline{DE} = 3\vec{u} = (\frac{36}{13},\frac{15}{13})$; $\overline{EF} = 2\vec{u}^{\perp} = 2(-\frac{5}{13},\frac{12}{13}) = (-\frac{10}{13},\frac{24}{13})$

$\therefore \overline{DF} = (\frac{36}{13},\frac{15}{13}) + (-\frac{10}{13},\frac{24}{13}) = (2,3)$

Ejemplo 20. Dados tres vectores unitarios $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que satisfacen la condición $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\theta$, calcular el valor de: $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{c}$.

Solución. Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\theta \rightarrow \vec{a}+\vec{b} = -\vec{c} \rightarrow ||\vec{a}+\vec{b}|| = ||-\vec{c}||$

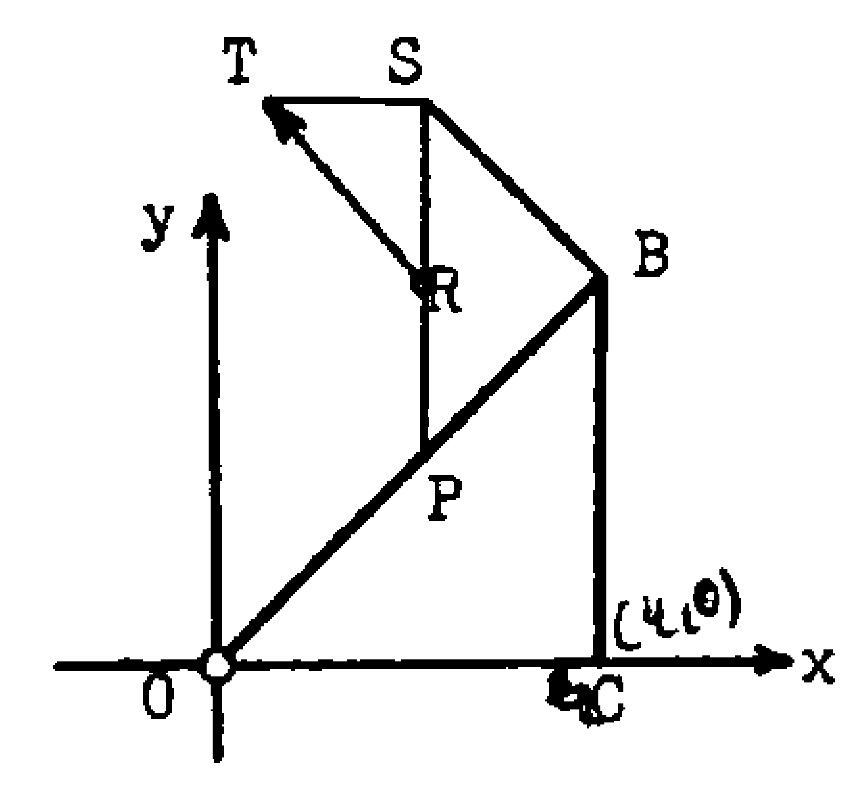
Elevando al cuadrado ambos miembros se tiene:

$$||\vec{a}||^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = ||\vec{c}||^2 \leftrightarrow 1+2\vec{a}.\vec{b}+1=1 \quad \rightarrow \quad \vec{a}.\vec{b} = -1/2$$

Análogamente se obtiene: $\vec{b}.\vec{c} = -1/2$, $\vec{a}.\vec{c} = -1/2$

$$\therefore \quad \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{c} = -3/2$$

Ejemplo 21. En la figura adjunta, los triángulos OCB, PBS y RST son todos ellos semejantes. Hallar $\overline{RT}$ si P y R son puntos medios de $\overline{OB}$ y $\overline{PS}$ respectivamente.



Solución. La figura muestra tres triángulos rectángulos isósceles, en donde: $||\overline{OB}||=4\sqrt{2}$ y $||\overline{PS}||= \sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2} = 4$

Un vector unitario en el sentido de $\overline{OB}$ es: $\vec{u} = \dfrac{(4,4)}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$

Entonces: $\overline{PB} = 2\sqrt{2}\vec{u} = 2(1,1)$; $\overline{BS} = 2\sqrt{2}\vec{u}^{\perp} = 2(-1,1) = (-2,2)$

Luego: $\overline{PS} = \overline{PB} + \overline{BS} = (2,2) + (-2,2) = (0,4)$

Un vector unitario en el sentido de $\overline{PS}$ es: $\vec{v} = \dfrac{(0,4)}{4} = (0,1)$

Entonces: $\overline{RS} = 2\vec{v} = (0,2)$ y $\overline{ST} = 2\vec{v}^{\perp} = (-2,0)$

$$\therefore \quad \overline{RT} = \overline{RS} + \overline{ST} = (-2,2)$$

Ejemplo 22. Sea ABCD un rectángulo, una de cuyas diagonales tiene por extremos A=(-6,1) y C=(-2,8). Si los lados de mayor longitud tienen el mismo sentido del vector $\vec{a}=(2,1)$; hallar los vértices B y D.

Solución. $\overline{AC} = \bar{C}-\bar{A} = (-2,8)-(-6,1)=(4,7)$

Si $\overline{AB}||\vec{a} \rightarrow \overline{AB} = r(2,1)$

$\overline{BC}||\vec{a} \rightarrow \overline{BC} = t(-1,2)$

Como $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$\rightarrow (4,7) = r(2,1) + t(-1,2)$

De donde obtenemos: r=3 y t=2

Por tanto: $\overline{AB}=3(2,1)=(6,3) \rightarrow \bar{B} = \bar{A}+\overline{AB} = (6,3)+(-6,1) = (0,4)$

$\overline{BC} = \overline{AD} = 2(-1,2) = (-2,4) \rightarrow \bar{D} = \bar{A}+\overline{AD} = (-6,1)+(-2,4) = (-8,5)$

EJERCICIOS

1. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en R^2. Utilizando las propiedades del producto escalar, demostrar:

   a) $||\vec{a}+\vec{b}||^2 - ||\vec{a}-\vec{b}||^2 = 4\vec{a}.\vec{b}$

   b) $||\vec{a}+\vec{b}||^2 + ||\vec{a}-\vec{b}||^2 = 2(||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2)$

2. Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^2 son ortogonales, si y sólo si:

   $$||\vec{a}+\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2$$

3. Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, demostrar que:

   a) $(\vec{a}^{\perp})^{\perp} = -\vec{a}$ c) $\vec{a}^{\perp}.\vec{b}^{\perp} = \vec{a}.\vec{b}$

   b) $\vec{a}^{\perp}.\vec{b} = -\vec{a}.\vec{b}^{\perp}$ d) $||\vec{a}^{\perp}|| = ||\vec{a}||$

4. Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, demostrar que:

   a) $\vec{a}.\vec{b} = -||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| \leftrightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen sentidos opuestos

   b) $||\vec{a}+\vec{b}|| = ||\vec{a}|| + ||\vec{b}|| \leftrightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido

5. Deducir de la desigualdad triangular que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están en R^2, entonces:

   $$\Big|\,||\vec{a}||-||\vec{b}||\,\Big| \leq ||\vec{a}+\vec{b}|| \leq ||\vec{a}||+||\vec{b}||$$

   (Sug. Escribir: $\vec{a}=\vec{b}-(\vec{a}-\vec{b})$, y aplicar la Proposición 1.3)

6. Demostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores paralelos en R^2, entonces: $|\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$

7. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores en R^2, demostrar que:

   a) $|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| \leq ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$

   b) $|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| \leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

8. Demostrar mediante un contrejemplo que $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}$ no implica ni que $\vec{b}=\vec{c}$, ni que $\vec{a}=\theta$.

9. Siendo $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(-2,1)$ y $\vec{c}=(3,2)$, hallar un vector unitario ortogonal al vector $\vec{v}=5\vec{a}-3(\vec{b}+\vec{c})$. Rp. $\vec{u}=(\frac{24}{25},\frac{7}{25})$

10. Si $\vec{a}=(4m,m-3)$ y $\vec{b}=2,m+3)$, determinar los valores de m tales que $\vec{a}$ sea perpendicular a $\vec{b}$. Rp. m=1 ó m=-9

11. Expresar en la forma $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}$ el vector cuya longitud es $3\sqrt{5}$ y es ortogonal al vector $\vec{w}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$, siendo $\vec{a}=(-1,2)$, $\vec{b}=(3,-5)$, $\vec{c}=(3,-4)$. Rp. $\vec{v}=3\vec{i}-6\vec{j}$ ó $\vec{v}=-3\vec{i}+6\vec{j}$

12. Sean los vectores $\vec{a}=(m^2-3,m-1)$, $\vec{b}=(4/m^2,4/m)$, donde $m\neq 0$ es un número real positivo. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, hallar el vector $\vec{v}=9\vec{b}-4\vec{a}$. Rp. $\vec{v}=(19,22)$

13. Si $\vec{i}=(1,0)$ y $\vec{j}=(0,1)$ resolver para $\vec{x}$:

a) $3\left[\vec{i}^{\perp}+\vec{x}-(4/3,2)\right] = (9,-11)+2\vec{x}^{\perp}-5\vec{j}$ Rp. $\vec{x}=(5,-1)$

b) $(6,12)+3\left[(-2,1/3)-2\vec{j}+3\vec{i}^{\perp}+\vec{x}\right] = 4\vec{i}+2\vec{j}^{\perp}-\vec{x}^{\perp}$ Rp. $\vec{x}=(-1,-5)$

c) $3(-2,-3)^{\perp} + \frac{1}{2}\left[\vec{x}+\vec{i}^{\perp}-(3,-1)\right]^{\perp} = (5,2)^{\perp}-2\vec{x}^{\perp}$ Rp. $\vec{x}=(5,4)$

14. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores en R^2. Si $\vec{a}$ es unitario y se cumple que $\vec{a}.\vec{b}=9/4$ y $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{j})=3$, hallar $\vec{a}$. Rp. $\vec{a}=(\pm\sqrt{7}/4,3/4)$

15. Sean los vectores $\vec{a}=(x,x+4)$, $\vec{b}=(5x-5,x-4)$. Si $x>0$ y $\vec{a}.\vec{b}=-10$, hallar $||\vec{a}+\vec{b}||$. Rp. 5

16. Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que: $||\vec{a}||=\sqrt{26}$, $||\vec{b}||=3\sqrt{2}$ y $\vec{b}.\vec{c}=12$. Si $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$, hallar $||\vec{c}||$. Rp. $4\sqrt{2}$

17. Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que: $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, $||\vec{a}||=5$, $||\vec{b}||= 2\sqrt{5}$ y $\vec{b}.\vec{c}=10$. Hallar $||\vec{c}||$. Rp. 5

18. Si $\vec{a}=(2,x)$, $\vec{b}=(x,-2x)$ y $\vec{c}=(x-2,x+1)$, donde $x>0$ y si $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}= \vec{a}.\vec{b}+1$, hallar el vector $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Rp. $\vec{v}=(5,1)$

19. Si $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\theta$ y $||\vec{a}||=2$, $||\vec{b}||=4\sqrt{3}$, $||\vec{c}||=8$; calcular $\vec{a}.\vec{c}$
Rp. 10

20. Sea el rectángulo ABCD de área $48u^2$ y cuyos dos vértices consecutivos son $A=(-2,5)$ y $B=(2,1)$. Si la diagonal AC tiene el mismo sentido del vector $\vec{v}=(5,1)$, hallar los vértices C y D.
Rp. $C=(8,7)$, $D=(4,11)$

21. Si $a\in R$ y $\vec{u}=(a-2,5-3a)$ es un vector unitario, hallar el valor de: $||a(\vec{u}+2\vec{u}^{\perp})+2\vec{u}^{\perp}||$. Rp. 5 ó $2\sqrt{10}$

22. Sean $\vec{a},\vec{b}\in R^2$, ambos unitarios, demostrar que: $||\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}|| < 1$

RELACIONES ENTRE VECTORES

1.15 ANGULO FORMADO POR DOS VECTORES

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos que tienen el mismo origen y sea θ el menor de los ángulos positivos formado por dichos vectores, que satisface: $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ forman un triángulo cuyos lados miden $||\vec{a}||$, $||\vec{b}||$ y $||\vec{a}-\vec{b}||$. (Figura 10)
Por la ley de los cosenos se tiene:

$$||\vec{a}-\vec{b}||^2=||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2-2||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}\theta$$

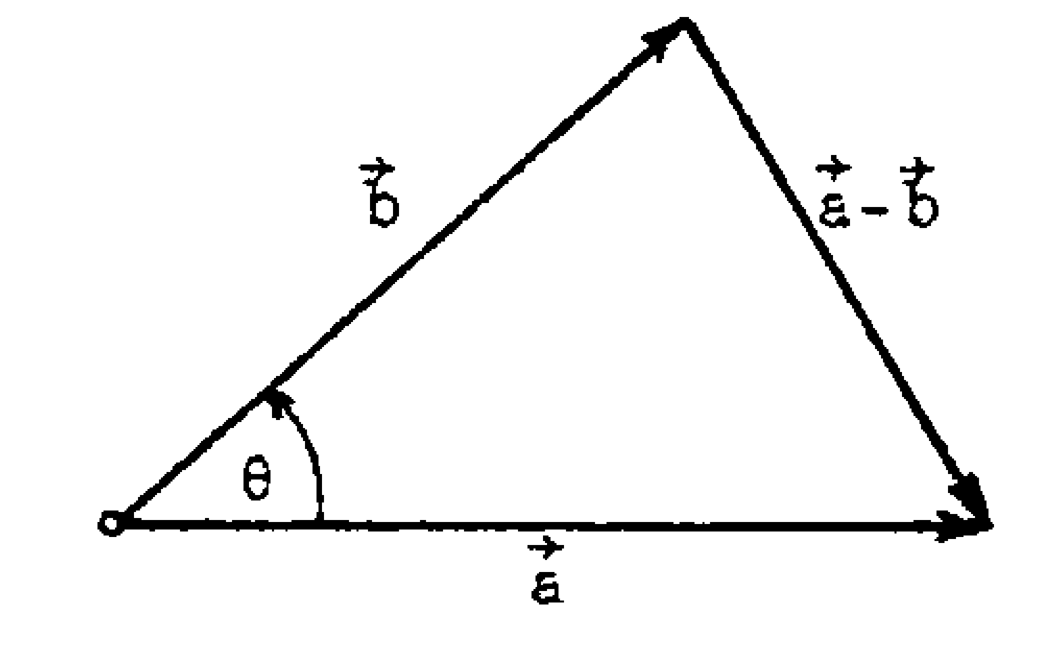


Figura 10

Desarrollando el cuadrado del primer miembro obtenemos:

$$||\vec{a}-\vec{b}||^2=||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2-2\vec{a}.\vec{b}$$

Comparando ambas ecuaciones se deduce que:

$$\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\;||\vec{b}||\text{Cos}\theta \qquad (12)$$

de donde:

$$\text{Cos}\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{a}||\;||\vec{b}||} \qquad (13)$$

Ejemplo 1. Hallar el valor del ángulo que forma el vector $\vec{a}$ que va de A(4,5) a B(6,4), con el vector $\vec{b}$ que va de C(-3,1) a D(-2,-2).

Solución. $\vec{a} = \overline{AB} = (6,4)-(4,5) = (2,-1) \rightarrow ||\vec{a}|| = \sqrt{5}$

$\vec{b} = \overline{CD} = (-2,-2)-(-3,1) = (1,-3) \rightarrow ||\vec{b}|| = \sqrt{10}$

Luego, según (13): $\text{Cos}\theta = \frac{(2,-1).(1,-3)}{(\sqrt{5})(\sqrt{10})} = \frac{2+3}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \theta = 45^\circ$

Ejemplo 2. Hallar la norma del vector $\vec{d}$, sabiendo que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 60°, $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$, $||\vec{a}||=3$ y $||\vec{b}||=5$.

Solución. Si $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b} \rightarrow ||\vec{d}|| = ||\vec{a}+\vec{b}||$

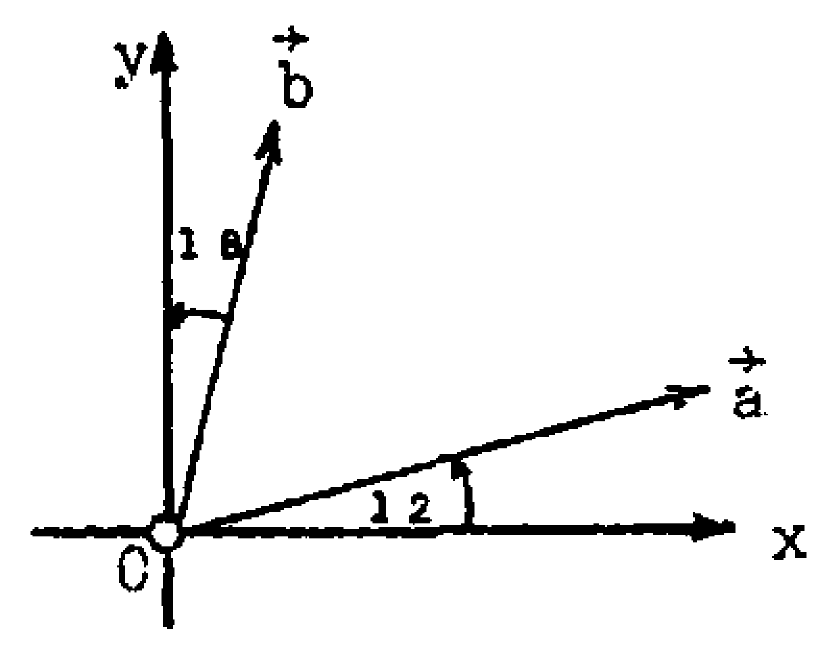
Elevando al cua . se tiene: $||\vec{d}||^2 = ||\vec{a}||^2+2\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2$

Según la ecuación (12): $||\vec{d}||^2= ||\vec{a}||^2+2||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}60^o+||\vec{b}||^2$

$$= 9 + 2(3)(5)(1/2) + 25 = 49$$

$$\therefore\ ||\vec{d}|| = 7$$

Ejemplo 3. Calcular $\vec{a}.\vec{b}$ donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores de la figura adjunta para los cuales: $||\vec{a}||=4$ y $||\vec{b}||=2\sqrt{3}$.



Solución. Si θ es el ángulo que forman ambos vectores, entonces:

$\theta = 90^o-(12^o+18^o) = 60^o$

Luego, según (12): $\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}\theta = (4)(2\sqrt{3})\text{Cos}60^o$

$$\therefore\ \vec{a}.\vec{b} = 4\sqrt{3}$$

Ejemplo 4. Los vectores $\vec{a}$ y b forman un ángulo de π/6 radianes. Sabiendo que $||\vec{a}||=\sqrt{3}$ y $||\vec{b}||=1$, hallar el ángulo q' forman los vectores $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

Solución. Según la ecuación (12) tenemos:

$\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}(\pi/6) = (\sqrt{3})(1)(\sqrt{3}/2)= 3/2$

$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\text{Cos}\theta$

$\rightarrow\ (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = ||\vec{a}+\vec{b}||\,||\vec{a}-\vec{b}||\text{Cos}\theta$

$\rightarrow\ ||\vec{a}||^2-||\vec{b}||^2= (\sqrt{||\vec{a}||^2+2\vec{a}.\vec{b}+||\vec{b}||^2})(\sqrt{||\vec{a}||^2-2\vec{a}.\vec{b}+||\vec{b}||^2})\text{Cos}\theta$

$\rightarrow\ (\sqrt{3})^2-(1)^2 = (\sqrt{(\sqrt{3})^2+2(3/2)+(1)^2})(\sqrt{(\sqrt{3})^2-2(3/2)+(1)^2})\text{Cos}\theta$

de donde: $\text{Cos}\theta = 2/\sqrt{7}\ \rightarrow\ \theta = \text{arcCos}(2/\sqrt{7})$

Ejemplo 5. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman dos a dos un ángulo de 60^o, sabiendo que $||\vec{a}||=4$, $||\vec{b}||=2$ y $||\vec{c}||=6$, determinar el módulo del vector $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Solución. Si $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \rightarrow\ ||\vec{v}|| = ||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||$

Elevando al cuadrado se tiene:

$||\vec{v}||^2= ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+||\vec{c}||^2+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{a}.\vec{c}+2\vec{b}.\vec{c}$

$= ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+||\vec{c}||^2+2(||\vec{a}||\,||\vec{b}||+||\vec{a}||\,||\vec{c}||+||\vec{b}||\,||\vec{c}||)$ $\text{Cos}60^o$.

$||\vec{v}||^2 = 16+4+36 + 2(4\times2 + 4\times6 + 2\times6)(1/2) = 100$

$$\therefore\ ||\vec{v}|| = 10$$

Ejemplo 6. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen igual longitud y forman un ángulo de 60^o. Si la longitud de $\vec{a}+\vec{b}$ es 4 unidades mayor que la longitud de uno de ellos, hallar la longitud de $\vec{a}$.

Solución. Tenemos: $\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}60^o \rightarrow 2\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||$

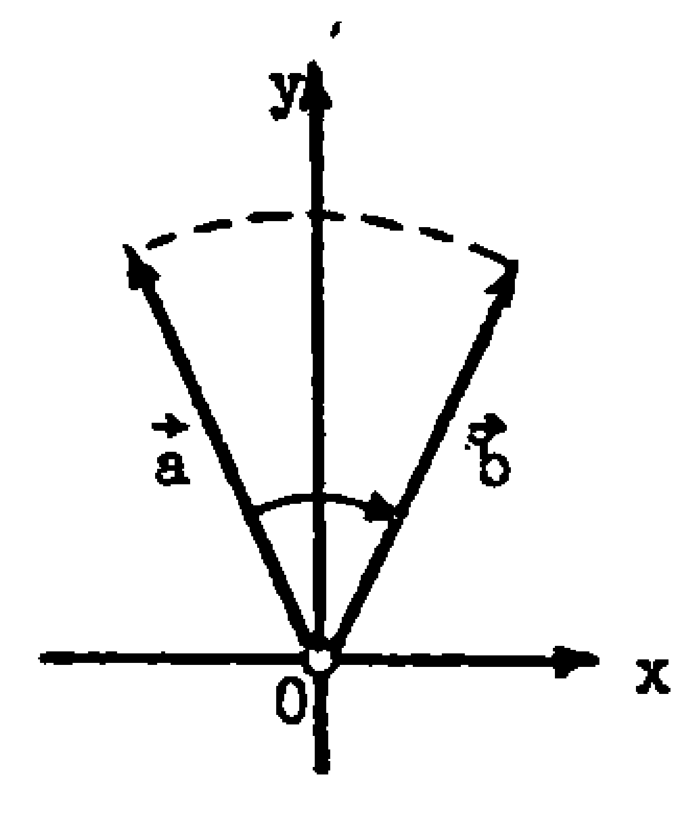
$||\vec{a}+\vec{b}|| = 4 + ||\vec{a}||$

Elevando al cuadrado: $||\vec{a}||^2+2\vec{a}.\vec{b}+||\vec{b}||^2 = 16+8||\vec{a}||+||\vec{a}||^2$

Como $||\vec{a}||=||\vec{b}|| \rightarrow ||\vec{a}||^2-4||\vec{a}||-8=0 \leftrightarrow ||\vec{a}|| = 2 \pm \sqrt{4+8}$

$$\therefore\ ||\vec{a}|| = 2+2\sqrt{3}$$

Ejemplo 7. Si el vector $\vec{a}=(-\sqrt{8},\sqrt{50})$ gira 45^o en el sentido horario se determina el vector $\vec{b}=(x,y)$. Hallar x+y.



Solución. Si $||\vec{b}||=||\vec{a}|| \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8+50}$

$\rightarrow x^2+y^2 = 58 \qquad (1)$

$\text{Cos}45^o = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{(-2\sqrt{2},5\sqrt{2}).(x,y)}{(\sqrt{58})(\sqrt{58})}$

de donde: $2x-5y+29=0 \rightarrow y = \frac{1}{5}(2x+29) \qquad (2)$

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos:

$x^2+4x-21=0 \leftrightarrow x=-7$ ó $x=3$

Elegimos x=3 por cuanto el lado terminal de $\vec{b}$ está en el primer cuadrante. Luego, en (2) se tiene: y=7

$$\therefore\ x+y = 10$$

Ejemplo 8. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 45^o y la norma de a es $\sqrt{48}$. Hallar $||\vec{b}||$, sabiendo que $\vec{a}-\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{a}$.

Solución. Si $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a} \rightarrow (\vec{a}-\vec{b}).\vec{a} = 0$

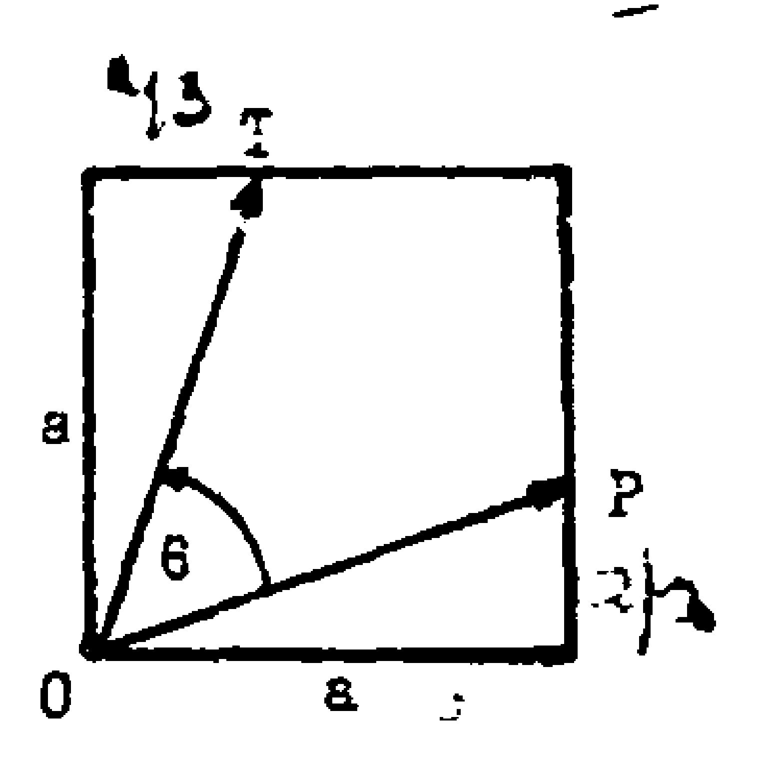
$\rightarrow \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} = 0 \rightarrow ||\vec{a}||^2 = \vec{a}.\vec{b}$

$\rightarrow ||\vec{a}||^2 = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}30^o$

$\rightarrow 4\sqrt{3} = ||\vec{b}||(\sqrt{3}/2)$

$$\therefore\ ||\vec{b}|| = 8$$

Ejemplo 9. En el cuadrado adjunto, el lado mide a unidades. Hallar el valor del ángulo θ, si P y T son puntos que trisecan los lados del cuadrado.



Solución. Como P y T trisecan a los lados del cuadrado, entonces:

$\overline{OP}=(a,a/3)$ y $\overline{OT}=(a/3,a)$

Luego: $||\overline{OP}|| = ||\overline{OT}|| = \sqrt{a^2+(a/3)^2} = \frac{a}{3}\sqrt{10}$

$$\overline{OP}.\overline{OT} = (a,\tfrac{a}{3}).(\tfrac{a}{3},a) = \tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{1}{3}a^2 = \tfrac{2}{3}a^2$$

Si $\text{Cos}\theta = \dfrac{\overline{OP}.\overline{OT}}{||\overline{OP}||\ ||\overline{OT}||} \rightarrow \text{Cos}\theta = \dfrac{(2/3)a^2}{(\frac{a}{3}\sqrt{10})^2} = \dfrac{3}{5}$

$$\therefore\ \theta = \text{arcCos}(3/5)$$

Ejemplo 10. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores unitarios en R^2. Demostrar que la suma es un vector unitario si y sólo si el ángulo formado por dichos vectores es de 120°.

Demostración. i) Primero demostraremos que $||\vec{a}+\vec{b}||=1$

En efecto, supongamos que $\theta=120^\circ$ es el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Entonces:

$$\begin{aligned}||\vec{a}+\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+2\vec{a}.\vec{b}\\ &= ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+2||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}\theta\\ &= 1 + 1 + 2(1)(1)(-1/2) = 1\end{aligned}$$

$$\therefore\ ||\vec{a}+\vec{b}|| = 1$$

ii) Demostraremos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 120°.

En efecto, por hipótesis: $||\vec{a}||=||\vec{b}||=||\vec{a}+\vec{b}||= 1$

Luego, si $||a+b||^2 = 1 \rightarrow ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+2\vec{a}.\vec{b} = 1$

$$\rightarrow 1 + 1 + 2||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}\theta = 1$$

de donde: $\text{Cos}\theta = -1/2 \rightarrow \theta = 120^\circ$

Ejemplo 11. Hallar el valor de $r=||\vec{a} - \frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}||$, si $||\vec{a}||=1$, $||\vec{b}||=2$ y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es 60°.

Solución. Tenemos: $\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}60^\circ = (1)(2)(1/2) = 1$

$r = \frac{1}{3}||2\vec{a}+\vec{b}|| \rightarrow r^2 = \frac{1}{9}(4||\vec{a}||^2+4\vec{a}.\vec{b}+||\vec{b}||^2) = \frac{12}{9}$

$\therefore\ r = 2\sqrt{3}/3$

Ejemplo 12. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores en R^2. Suponer que $||\vec{a}||=1$, $||\vec{b}||=1$ y $||\vec{c}||=4$. Si $||\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}||=||\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}||$ y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ mide $\pi/4$; hallar el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución. Tenemos: $\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}(\pi/4) = (1)(1)(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$||\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}||^2 = ||\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}||^2$

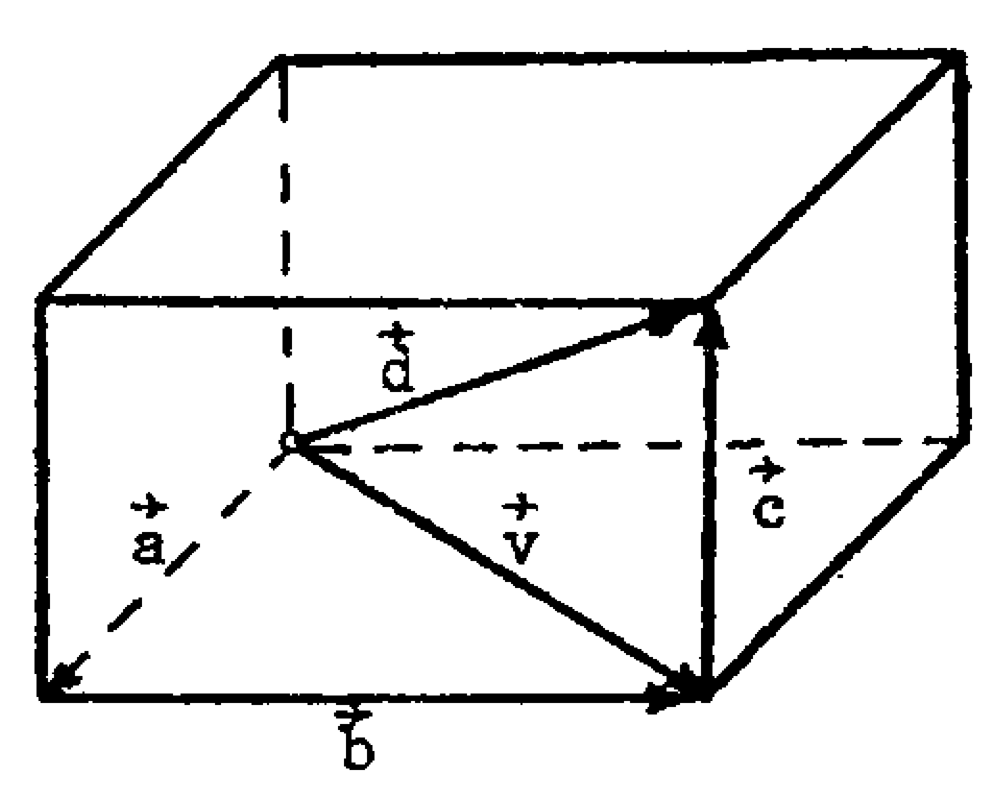
$\rightarrow ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+||\vec{c}||^2+2(-\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{c}) = ||\vec{a}||^2+4||\vec{b}||^2+||\vec{c}||^2+2(2\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+2\vec{b}.\vec{c})$

de donde: $||\vec{b}||^2+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c} = 0$

$\rightarrow 1 + 2(\sqrt{2}/2) + 2||\vec{b}||\,||\vec{c}||\text{Cos}\theta \leftrightarrow \text{Cos}\theta = -\frac{1+\sqrt{2}}{8}$

Ejemplo 13. Por métodos vectoriales, determinar los cosenos de los ángulos formados por las aristas y las diagonales de un paralelepípedo rectangular.

Solución. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ las aristas y $\vec{d}$ una de las diagonales del paralelepípedo rectangular; además, sean: $\alpha=m^o(d,a)$, $\beta=m^o(d,b)$, $\gamma=m^o(d,c)$



En la figura: $\vec{d} = \vec{v}+\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\rightarrow \vec{d}.\vec{a} = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} = ||\vec{a}||^2$

$\vec{d}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{b} = ||\vec{b}||^2$

$\vec{d}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{c} = ||\vec{c}||^2$

Entonces: $\text{Cos}\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{d}}{||\vec{a}||\ ||\vec{d}||} = \frac{||\vec{a}||^2}{||\vec{a}||\ ||\vec{b}||} = \frac{||\vec{a}||}{||\vec{d}||}$

$\text{Cos}\beta = \frac{\vec{b}.\vec{d}}{||\vec{b}||\ ||\vec{d}||} = \frac{||\vec{b}||^2}{||\vec{b}||\ ||\vec{d}||} = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{d}||}$

$\text{Cos}\gamma = \frac{\vec{c}.\vec{d}}{||\vec{c}||\ ||\vec{d}||} = \frac{||\vec{c}||^2}{||\vec{c}||\ ||\vec{d}||} = \frac{||\vec{c}||}{||\vec{d}||}$

Ejemplo 14. En la figura OACB es un paralelogramo. Si $\overline{OC}=(5,3)$, $\overline{BA}=(-3,9)$ y α el ángulo determinado por $\overline{OA}$ y $\overline{OB}^{\perp}$, hallar el coseno de α.

Solución. Si $\overline{BA}=(-3,9) \rightarrow \vec{A}-\vec{B}=(-3,9)$ (1)

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$, pero $\overline{AC}=\overline{OB}$

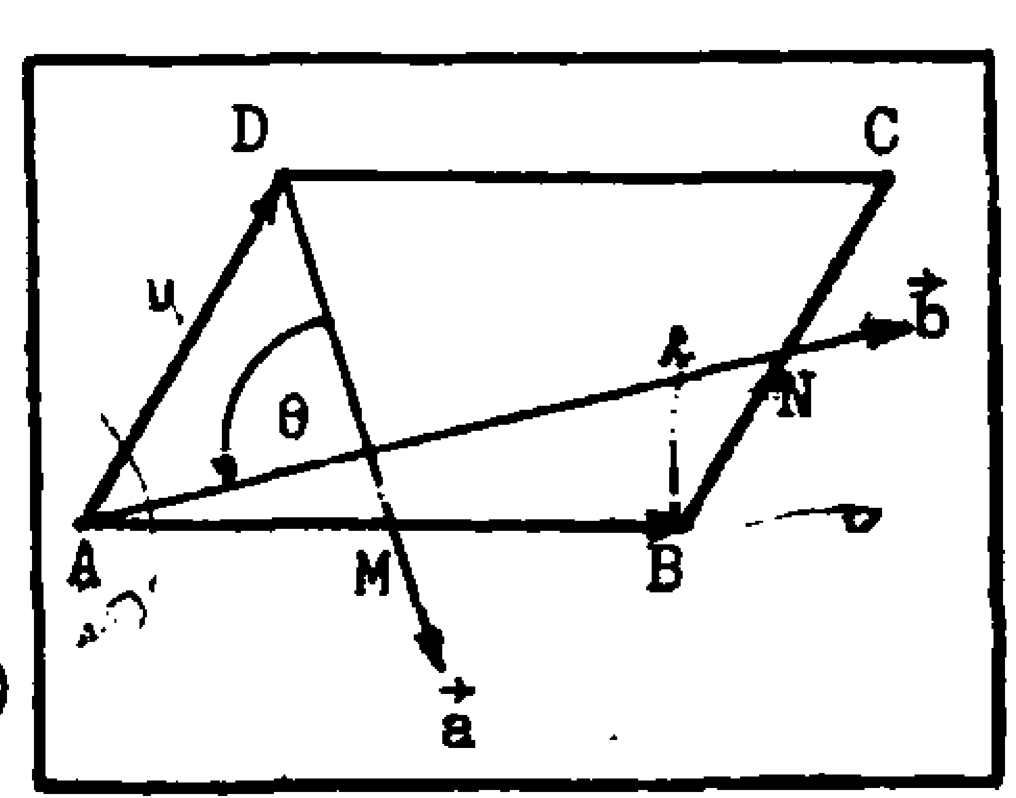
Entonces: $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} \rightarrow \vec{A}+\vec{B}=(5,3)$ (2)

De (1) y (2) obtenemos: $\vec{A}=(1,6)$ y $\vec{B}=(4,-3)$

$\rightarrow \vec{B}^{\perp}=(3,4)$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}^{\perp}}{||\vec{A}||\ ||\vec{B}^{\perp}||} = \frac{(1,6).(3,4)}{(\sqrt{1+36})(\sqrt{9+16})} = \frac{3+24}{5\sqrt{37}} = \frac{27}{5\sqrt{37}}$$

Ejemplo 15. En el paralelogramo ABCD se tiene: $||\overline{AB}||=6$, $||\overline{AD}||=4$, $m(\measuredangle A)=60^{\circ}$; M es punto medio del lado $\overline{AB}$ y N es punto medio del lado $\overline{BC}$. Hallar $\text{Cos}\theta$, sabiendo que: $||\vec{a}||=6$ y $||\vec{b}||=4\sqrt{13}$.



Solución. $\overline{AD} = 4(\text{Cos}60^{\circ},\text{Sen}60^{\circ}) = 2(1,\sqrt{3})$

$\overline{AB} = 6(\text{Cos}0^{\circ},\text{Sen}0^{\circ}) = 6(1,0)$

Luego: $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3(1,0)$ y $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{AD} = (1,\sqrt{3})$

$\overline{DM} = \overline{AM}-\overline{AD} = 3(1,0)-2(1,\sqrt{3}) = (1,-\sqrt{3})$

Pero: $\vec{a} = r\overline{DM} \rightarrow ||\vec{a}||=r||\overline{DM}|| \rightarrow 6 = r\sqrt{1+3}$, de donde: $r=3$

$\therefore a=3(1,-\sqrt{3})$

Análogamente: $\overline{AN} = \overline{AB}+\overline{BN} = 6(1,0)+(1,\sqrt{3}) = (7,\sqrt{3})$

Si $\vec{b}=tAN \rightarrow ||\vec{b}||=t||\overline{AN}|| \rightarrow 4\sqrt{13} = t\sqrt{49+3}$, de donde: $t=2$

$\therefore \vec{b} = 2(7,\sqrt{3})$

$$\text{Por tanto: Cos}\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{a}||\ ||\vec{b}||} = \frac{3(1,-\sqrt{3}).2(7,\sqrt{3})}{(3\sqrt{1+3})(2\sqrt{49+3})} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Ejemplo 16. En un ΔABC se tiene: $\overline{AC}=(-2,4)$ y $\overline{AB}=(3,-1)$. Hallar el ángulo que forma el vector $\overline{BC}$ con el vector $\vec{i}^{\perp}$.

Solución. Tenemos: $\vec{C}-\vec{A}=(-2,4)$ y $\vec{B}-\vec{A}=(3,-1)$

Restando se tiene: $\vec{C}-\vec{B}=(-5,5) \rightarrow \overline{BC}=5(-1,1)$

$$\therefore \text{Cos}\theta = \frac{\overline{BC}.\vec{i}^{\perp}}{||\overline{BC}||} = \frac{5(-1,1).(0,1)}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta=45^{\circ}$$

EJERCICIOS

1. Hallar la medida del ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si $\vec{a}$ va de A(2,5) a B(4,4) y $\vec{b}$ va de C(3,-2) a D(2,1).

   Rp. $\theta=135^o$

2. Si ABC es un triángulo y $\overline{AC}=(4,1)$, $\overline{AB}=(-4,-3)$, hallar el coseno del ángulo que forma el vector BC con el vector unitario $\vec{j}=(0,1)$. Rp. $\text{Cos}\theta=\sqrt{5}/5$

3. En un triángulo ABC se tiene: $\overline{AB}=(2\sqrt{6},2\sqrt{2})$ y $\overline{AC}=(\sqrt{6},-\sqrt{2})$. Determinar la medida del ángulo formado por $\overline{BC}$ y el semieje positivo de las abscisas. Rp. $\theta=120^o$

4. En un plano cartesiano, los puntos A(r,s), B(na+r,nb+s) y C(-mb+r,ma+s) son diferentes del origen y $m\neq0$, $n\neq0$. Hallar la medida del ángulo formado por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

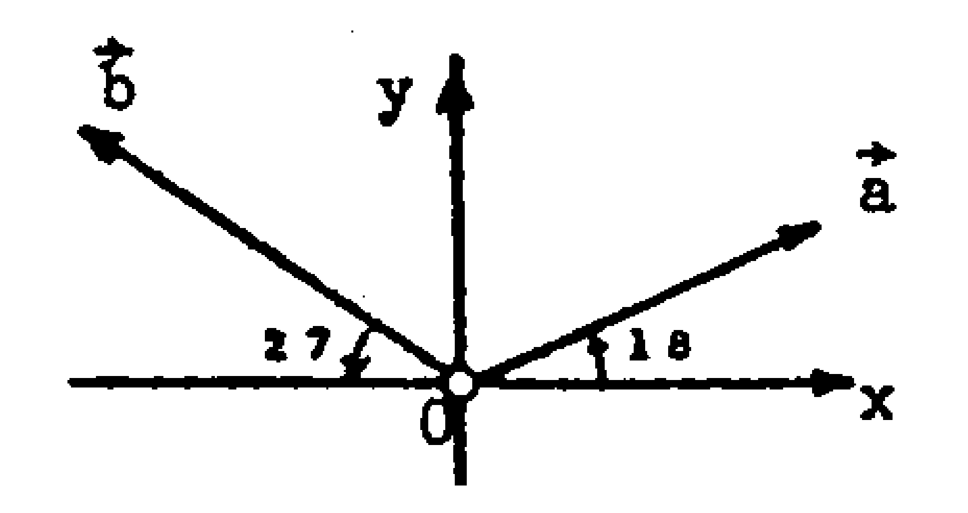
   Rp. $\theta=90^o$

5. Hallar el ángulo que forman el vector $\vec{a}$ que va de A(-1,3) a B(6,4) con el vector $\vec{b}$ que va de C(5,-1) a D(2,-5).

   Rp. $\theta=135^o$

6. Calcular $\vec{a}.\vec{b}$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores de la figura adjunta, para los cuales: $||\vec{a}||=8$ y $||\vec{b}||=\sqrt{72}$

   Rp. -48



7. Calcular $||\vec{a}+\vec{b}||$ sabiendo que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 150^o y que: $||\vec{a}||=\sqrt{48}$ y $||\vec{b}||=6$ Rp. $2\sqrt{3}$

8. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores diferentes de cero, y supuesto que el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es igual al ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$; para que valor de t es el vector $\vec{c}$ perpendicular al vector:
   $\vec{d} = ||\vec{b}||\vec{a} + t\vec{b}$. Rp. $t=-||\vec{a}||$

9. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 60^o, sabiendo que $||\vec{a}||=5$, $||\vec{b}||=8$, determinar: $||\vec{a}+\vec{b}||$ y $||\vec{a}-\vec{b}||$.

   Rp. $\sqrt{129}$ y 7

10. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 120°, sabiendo que $\|\vec{a}\|=3$ y $\|\vec{b}\|=5$, determinar: $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\|$.
Rp. $\sqrt{19}$ y 7

11. Qué condición deben satisfacer los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que el vector $\vec{a}+\vec{b}$ bisecte al ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
Rp. $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$

12. El vector $\vec{a}=(x,y)$ se obtiene girando al vector $\vec{b}=(-2,4)$ 60° en el sentido horario. Hallar el vector $\vec{a}$.
Rp. $\vec{a}=(2\sqrt{3}-1, 2+\sqrt{3})$

13. Si $\|\vec{a}\|=a$ y $\|\vec{b}\|=b$, demostrar que el vector $\vec{c} = \frac{a\vec{b}+b\vec{a}}{a+b}$ biseca el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

14. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos tales que $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=m$. Si el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\pi/3$ radianes, y la norma de su diferencia es 2-m; hallar m.
Rp. m=1

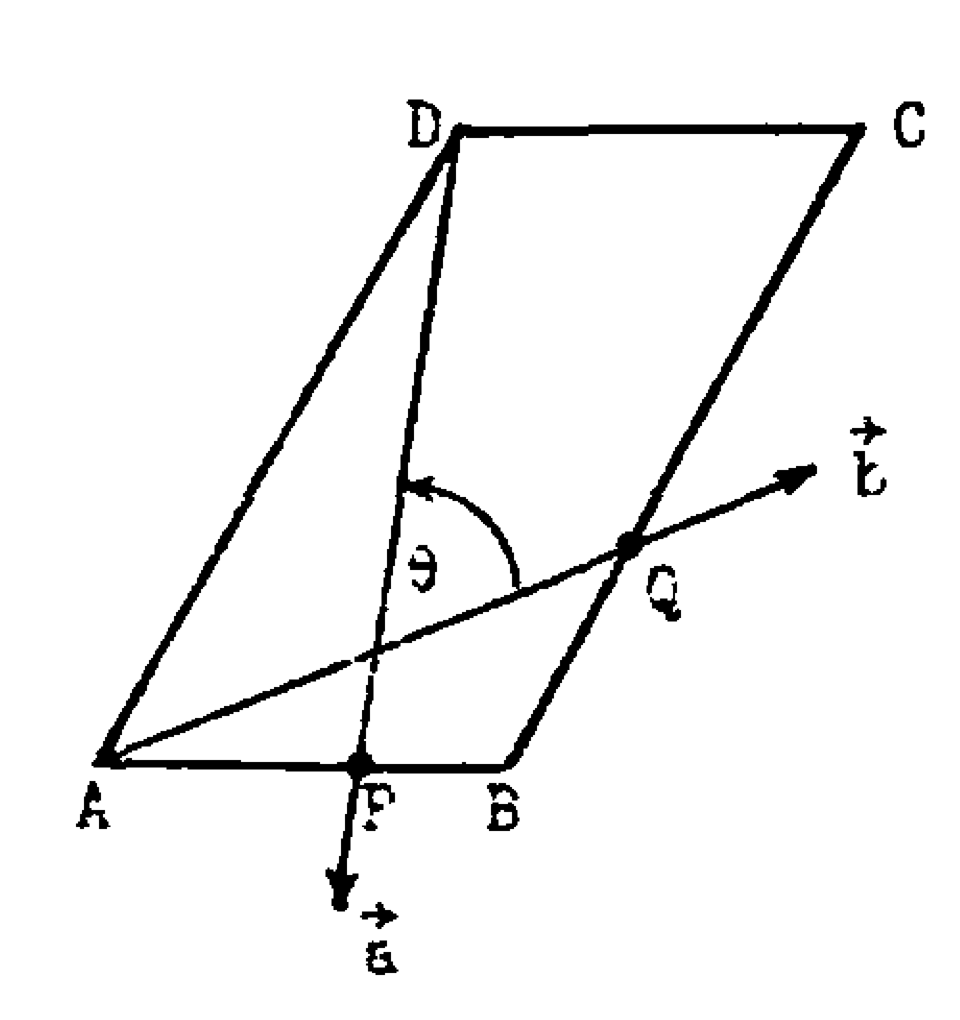
15. Tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c} \in R^2$ satisfacen las siguientes propiedades: $\|\vec{a}\|=\|\vec{c}\|=5$, $\|\vec{b}\|=1$ y $\|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\|=\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|$. Si el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\pi/8$, hallar el que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
Rp. $7\pi/8$

16. Dados tres vectores no nulos en R^2: $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Supuesto que el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es igual al que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Demostrar que $\vec{c}$ es ortogonal al vector $\|\vec{b}\|\vec{a}-\|\vec{a}\|\vec{b}$.

17. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 60° y el módulo de $\vec{a}$ es 6. Hallar el módulo de $\vec{b}$ para que $\vec{a}-\vec{b}$ forme con $\vec{a}$ un ángulo de 30°.
Rp. 3

18. En el paralelogramo ABCD se tiene: $\|\overline{AB}\|=3$, $\|\overline{AD}\|=6$, $m(\measuredangle A)=60°$, P y Q son puntos de trisección de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Hallar $\cos\theta$ sabiendo que $\|\vec{a}\|=4\sqrt{7}$ y $\|\vec{b}\|=3\sqrt{19}$.

Rp. $\cos\theta = \frac{13}{\sqrt{133}}$



1.16 DESCOMPOSICION DE VECTORES

Sean los vectores no paralelos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^2. Si dese un punto de vista gráfico un vector $\vec{v}$ del plano podemos expresarlo como una suma de componentes vectoriales $r\vec{a}$ y $t\vec{b}$, que son múltiplos escalares de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces se dice que se ha efectuado una *descomposición* del vector $\vec{v}$ en sus componentes paralelos a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (Figura 11).

También se dice que $\vec{v}$ puede expresarse como una *combinación lineal* de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, los cuales reciben el nombre de *bases* del conjunto de vectores $\vec{v}\varepsilon R^2$.

Podemos afirmar entonces que todo vector $\vec{v}\varepsilon R^2$ se puede expresar como una suma de múltiplos escalares de vectores unitarios ortogonales: $\vec{i}=(1,0)$ y $\vec{j}=(0,1)$

En efecto: $\vec{v} = (x,y) = (x,0) + (0,y)$
$= x(1,0) + y(0,1)$

de donde:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Expresión en la cual, los escalares x e y se llaman *componentes escalares* de $\vec{v}$ paralelas a $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Los vectores $x\vec{i}$ e $y\vec{j}$ son las *componentes vectoriales* de $\vec{v}$ paralelas a $\vec{i}$ y $\vec{j}$ (Figura 12).

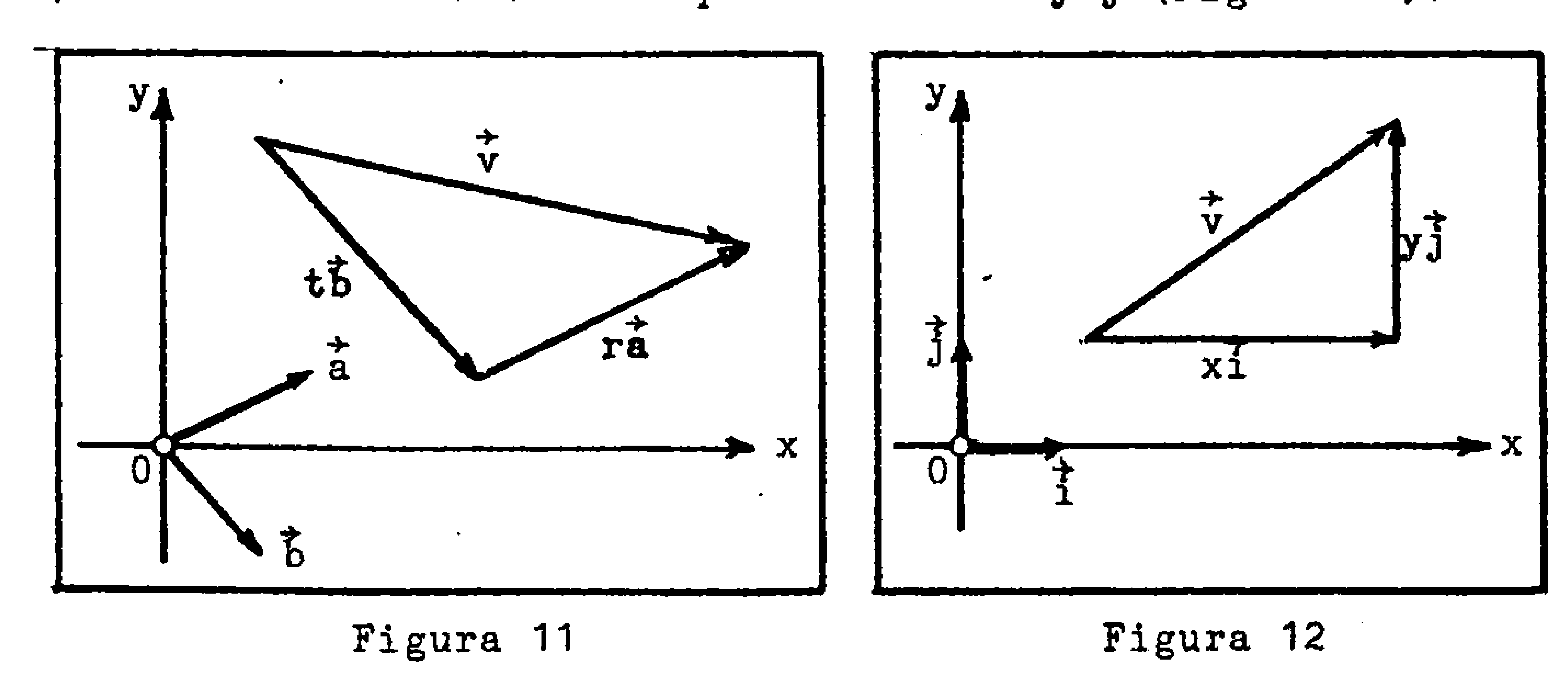


Figura 11 Figura 12

1.17 COMBINACION LINEAL

Todo vector $\vec{a}\varepsilon R^2$, puede expresarse mediante una y sólo una combinación lineal de un par dado de vectores unitarios ortogonales $\vec{u}$ y $\vec{u}^{\perp}$. Es decir, existe una y sólo una pareja de escalares

s y t tales que:

$$\vec{a} = s\vec{u} + t\vec{u}^{\perp} \qquad (14)$$

Al multiplicar escalarmente por $\vec{u}$ se tiene:

$$\vec{u}.\vec{a} = s\vec{u}.\vec{u} + t\vec{u}.\vec{u}^{\perp} = s||\vec{u}||^2 + 0$$

de donde: $\vec{u}.\vec{a} = s \qquad (1)$

Al multiplicar (14) por $\vec{u}^{\perp}$, se tiene:

$$\vec{u}^{\perp}.\vec{a} = s\vec{u}^{\perp}.\vec{u} + t\vec{u}^{\perp}.\vec{u}^{\perp} = 0 + t||\vec{u}^{\perp}||^2$$

de donde: $\vec{u}^{\perp}.\vec{a} = t \qquad (2)$

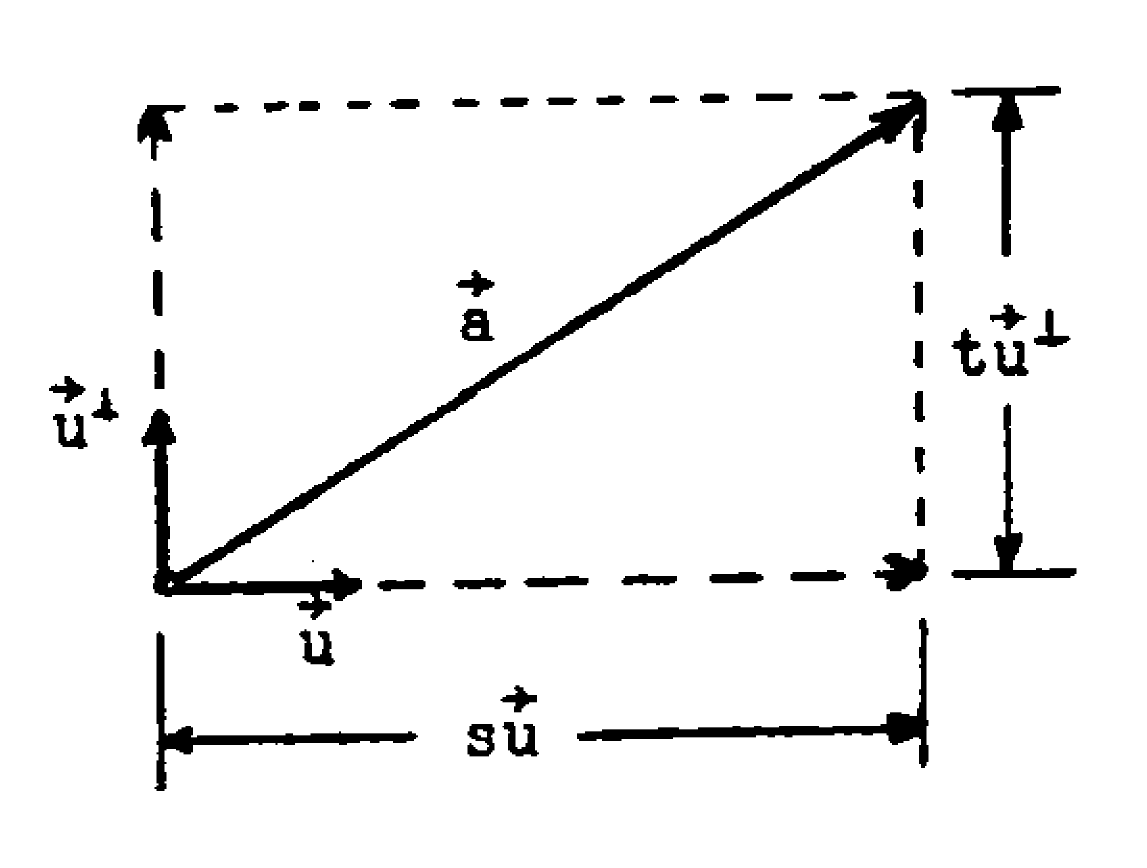


Figura 13

Por sustitución de (1) y (2) en (14) obtenemos:

$$\vec{a} = (\vec{u}.\vec{a})\vec{u} + (\vec{u}^{\perp}.\vec{a})\vec{u}^{\perp} \qquad (15)$$

También podemos afirmar que el vector $\vec{a}$ se puede expresar como una suma de múltiplos escalares de vectores ortogonales no nulos que no sean unitarios.

En efecto, si $\vec{u} = \dfrac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$ y $\vec{u}^{\perp} = \dfrac{\vec{u}^{\perp}}{||\vec{u}^{\perp}||} = \dfrac{\vec{u}^{\perp}}{||\vec{u}||}$

entonces por (15) se tiene:

$$\vec{a} = \left(\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} \cdot \vec{a}\right)\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} + \left(\frac{\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}||} \cdot \vec{a}\right)\frac{\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}||}$$

que equivale a:

$$\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\right)\vec{b} + \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}||^2}\right)\vec{b}^{\perp} \qquad (16)$$

Ejemplo 1. Dados los vectores $\vec{a}=(-2,2)$ y $\vec{b}=(3,1)$, expresar $\vec{a}$ como una combinación lineal de $\vec{b}$ y $\vec{b}^{\perp}$.

Solución. Si $\vec{b}=(3,1) \rightarrow \vec{b}^{\perp} = (-1,3)$ y $||\vec{b}||=\sqrt{10}$

Haciendo uso de la ecuación (16) se tiene:

$$\vec{a} = \left[\frac{(-2,2).(3,1)}{10}\right](3,1) + \left[\frac{(-2,2).(-1,3)}{10}\right](-1,3)$$

$$= \left(\frac{-6+2}{10}\right)(3,1) + \left(\frac{2+6}{10}\right)(-1,3)$$

$$= -\frac{2}{5}(3,1) + \frac{4}{5}(-1,3)$$

Verificación: $\vec{a} = \left(-\frac{6}{5},-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right) = (-2,2)$

1.17 PROYECCION ORTOGONAL

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores y $\vec{b}$ no nulo. La proyección ortogonal o componente vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$, denotada por $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$, es el vector:

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\right)\vec{b} \ , \ \vec{b}\neq\theta \qquad (17)$$

Si aplicamos (17) a (16), obtenemos:

$$\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a} \qquad (18)$$

Geométricamente esta definición significa que se puede construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el vector $\vec{a}$ y cuyos catetos contienen a los vectores $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}$.

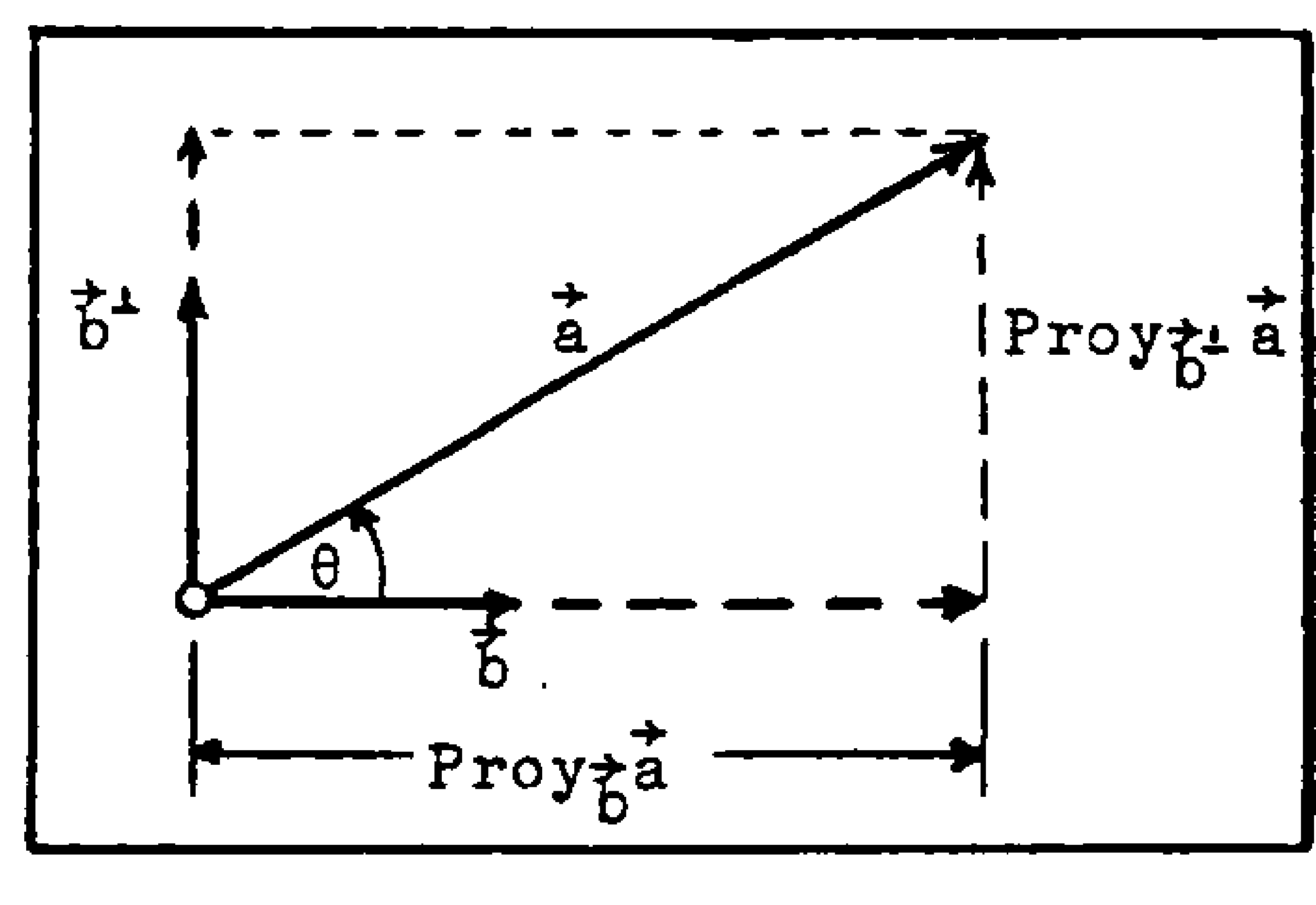


Figura 14

Figura 15

Propiedades. i) $\text{Proy}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{Proy}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{c}}\vec{b}$

ii) $\text{Proy}_{\vec{b}}(r\vec{a}) = r\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$

Observación. Los vectores $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ son paralelos de tal modo que si el ángulo θ entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es agudo entonces $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen la misma dirección y sentido (Fig. 14), en tanto que si θ es obtuso entonces $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen la misma dirección y sentido opuestos. (Fig. 15)

Ejemplo 2. Si $\vec{a}=(12,5)$ y $\vec{b}=(-3,4)$, hallar $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Solución. Según (17) se tiene:

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(12,5).(-3,4)}{(\sqrt{9+16})^2} = -\frac{16}{25}(-3,4)$$

Vemos que $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos y tienen sentidos opuestos en este caso.

1.19 COMPONENTES ESCALARES

Al número $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||}$ se denomina *componente escalar* de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$, siendo b no nulo, y se denota por:

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||} \tag{19}$$

Toda vez que $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||}\right)\dfrac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$, se puede establecer la relación siguiente entre proyección (un vector) y componente (un número).

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = (\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a})\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} \tag{20}$$

Si $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}>0$, entonces la $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tiene el mismo sentido de $\vec{b}$, del mismo modo, si $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}<0$ entonces la $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tiene sentido opuesto a $\vec{b}$. (Fig. 15)

Por lo que, podemos afirmar que la componente escalar de un vector es la longitud dirigida u orientada del vector. Esto es, si $\dfrac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$ es un vector unitario, la ecuación (20) se puede escribir:

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \pm||\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}|| \tag{21}$$

Nota. El signo se debe elegir según que $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tengan o no el mismo sentido. Para los vectores de la Figura 15 se toma: $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = -||\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}||$.

Propiedades. i) $\text{Comp}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{Comp}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{Comp}_{\vec{c}}\vec{b}$

ii) $\text{Comp}_{\vec{b}}(r\vec{a}) = r\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}$

Ejemplo 3. Hallar la proyección ortogonal y la componente escalar del vector $\vec{a}=(-3,-4)$ sobre el vector $\vec{b}=(4,-2)$

Solución. Si $\vec{b}=(4,-2) \rightarrow ||\vec{b}||=\sqrt{20}$, luego según (17) se tiene:

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{(-3,-4).(4,-2)}{(\sqrt{20})^2}\right)(4,-2) = -\frac{1}{5}(4,-2) = \left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$$

Obtenemos la componente aplicando (19), esto es:

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(-3,-4).(4,-2)}{\sqrt{20}} = \frac{-12+8}{2\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Como la $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}<0$, la $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen sentidos opuestos.

Calculando la longitud de la proyección:

$$||\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}|| = \sqrt{(-4/5)^2+(2/5)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

observamos que: $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = -||\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}||$

Ejemplo 4. Hallar las componentes escalares de $\vec{a}=(-2,2)$ que son paralelas a los vectores $\vec{b}=(3,1)$ y $\vec{b}$.

Solución. Si $\vec{b}=(3,1) \rightarrow ||\vec{b}||=\sqrt{10}$ y $\vec{b}^{\perp}=(-1,3)$

De la ecuación (16): $\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||}\right)\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} + \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}||}\right)\frac{\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}||}$

Entonces: $\vec{a} = \left[\frac{(-2,2).(3,1)}{\sqrt{10}}\right]\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} + \left[\frac{(-2,2).(-1,3)}{\sqrt{10}}\right]\frac{\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}||}$

$$= \left(-\frac{4}{\sqrt{10}}\right)\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} + \left(\frac{8}{\sqrt{10}}\right)\frac{\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}||}$$

De donde: $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = -\frac{4}{\sqrt{10}}$ y $\text{Comp}_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a} = \frac{8}{\sqrt{10}}$

Ejemplo 8. Los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$. Si $||\vec{a}||=5$, $||\vec{b}||=3$ y $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}=-5/2$, hallar la longitud del lado $\vec{a}-\vec{b}$.

Solución. Si $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = -5/2 \rightarrow \frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||} = -\frac{5}{2} \rightarrow \vec{a}.\vec{b} = -15/2$

Luego: $||\vec{a}-\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2-2\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2$

$$= (5)^2 - 2(-15/2) + (3)^2 = 49$$

$$\therefore ||\vec{a}-\vec{b}|| = 7$$

Ejemplo 6. Los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$. Si $||\vec{a}||=5$, $||\vec{b}||=2\sqrt{2}$ y $||\vec{a}+\vec{b}||=\sqrt{53}$; hallar el valor de $2\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}-\text{Comp}_{\vec{a}}(\vec{a}+\vec{b})$.

Solución. Si $||\vec{a}+\vec{b}||=\sqrt{53} \rightarrow ||\vec{a}||^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 53$

$$\rightarrow (5)^2+2a.b+(2\sqrt{2})^2=53 \rightarrow \vec{a}.\vec{b}=10$$

Luego: $2\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = 2\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||}\right) = 2\left(\frac{10}{2\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}$

$$\text{Comp}_{\vec{a}}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{a}}{||\vec{a}||} = \frac{||\vec{a}||^2 + \vec{b}.\vec{a}}{5} = \frac{25+10}{5} = 7$$

$$\therefore\ 2\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} - \text{Comp}_{\vec{a}}(\vec{a}+\vec{b}) = 5\sqrt{2}-7$$

Ejemplo 7. Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\theta$, $||\vec{a}+\vec{b}||=a$, $||\vec{c}||=b$ y $||\vec{d}||=c$. Hallar $\text{Comp}_{\vec{c}}\vec{d}$.

Solución. Tenemos: $\vec{a}+\vec{b} = -(\vec{c}+\vec{d}) \rightarrow ||\vec{a}+\vec{b}||=||\vec{c}+\vec{d}|| \rightarrow a=||\vec{c}+\vec{d}||$

Elevando al cuadrado: $a^2 = ||\vec{c}||^2+2\vec{c}.\vec{d}+||\vec{d}||^2$

Entonces: $a^2 = b^2 + 2\vec{c}.\vec{d} + b^2$, de donde; $\vec{c}.\vec{d} = \frac{1}{2}(a^2-b^2-c^2)$

Luego: $\text{Comp}_{\vec{c}}\vec{d} = \frac{\vec{c}.\vec{d}}{||\vec{c}||} = \frac{1}{2b}(a^2-b^2-c^2)$

Ejemplo 8. Si el vector $\vec{b}$ forma un ángulo de 30° con el semieje positivo de las X, $||\vec{b}||=2$, $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}=-2$ y $\text{Comp}_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}=2\sqrt{3}$. Hallar el vector $\vec{a}$.

Solución. $\vec{b} = ||\vec{b}||(\text{Cos}30^{\circ},\text{Sen}30^{\circ}) = (\sqrt{3},1)$

Según la ecuación (18): $\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}$

$$\rightarrow \vec{a} = (\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a})\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} + (\text{Comp}_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a})\frac{\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}||} = (-2)\frac{(\sqrt{3},1)}{2} + (2\sqrt{3})\frac{(-1,\sqrt{3})}{2}$$

$$\therefore\ \vec{a} = (-\sqrt{3},-1)+(-\sqrt{3},3) = (-2\sqrt{3},2)$$

Ejemplo 9. Si $\vec{a}=(-2,\sqrt{12})$ y $\vec{b}=(-3,\sqrt{3})$, hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}$.

Solución. Sea: $\vec{c} = \text{Proy}_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}^{\perp}||^2}\right)\vec{b}^{\perp}$

Entonces: $\vec{c} = \left[\frac{(-2,\sqrt{12}).(-\sqrt{3},-3)}{(\sqrt{3+9})^2}\right](-\sqrt{3},-3) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3},3) = \frac{3}{4}(1,\sqrt{3})$

Sean: $\vec{u}||\vec{a}$ y $\vec{v}||\vec{c} \rightarrow \vec{u}=(-1,\sqrt{3})$ y $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$

El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el mismo que forman $\vec{a}$ y $\vec{c}$.

Luego: $\text{Cos}\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||} = \frac{(-1,\sqrt{3}).(1,\sqrt{3})}{(\sqrt{1+3})(\sqrt{1+3})} = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ \theta = 60^{\circ}$$

Ejemplo 10. Si $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}=(-2,8)$, $\text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}=(4,1)$ y $\vec{b}=\vec{a}+\vec{a}^\perp$, hallar la norma de $\vec{b}$.

Solución. Si $\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a} \rightarrow \vec{a} = (-2,8)+(4,1) = (2,9)$

Luego: $\vec{b} = (2,9)+(-9,2) = (-7,11)$

$$\therefore \ ||\vec{b}|| = \sqrt{170}$$

Ejemplo 11. Dado el vector $\vec{a}=(-4,2)$ y $\text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}=(-3,3)$; supuesto que $\text{Comp}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}$ es positivo, hallar $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}$.

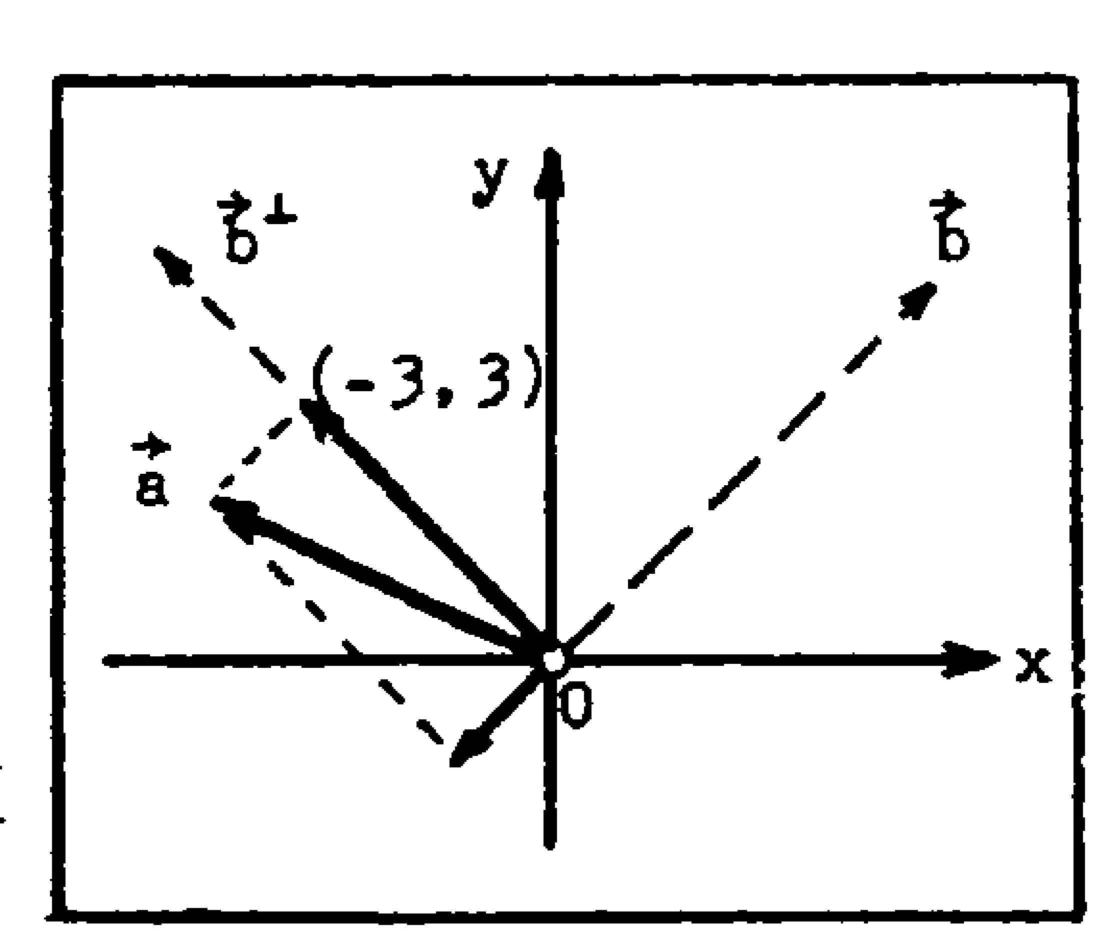
Solución. Si $\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}$

$\rightarrow (-4,2) = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + (-3,3)$

de donde: $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = (-1,-1)$

Según (21): $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \pm||\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}||$

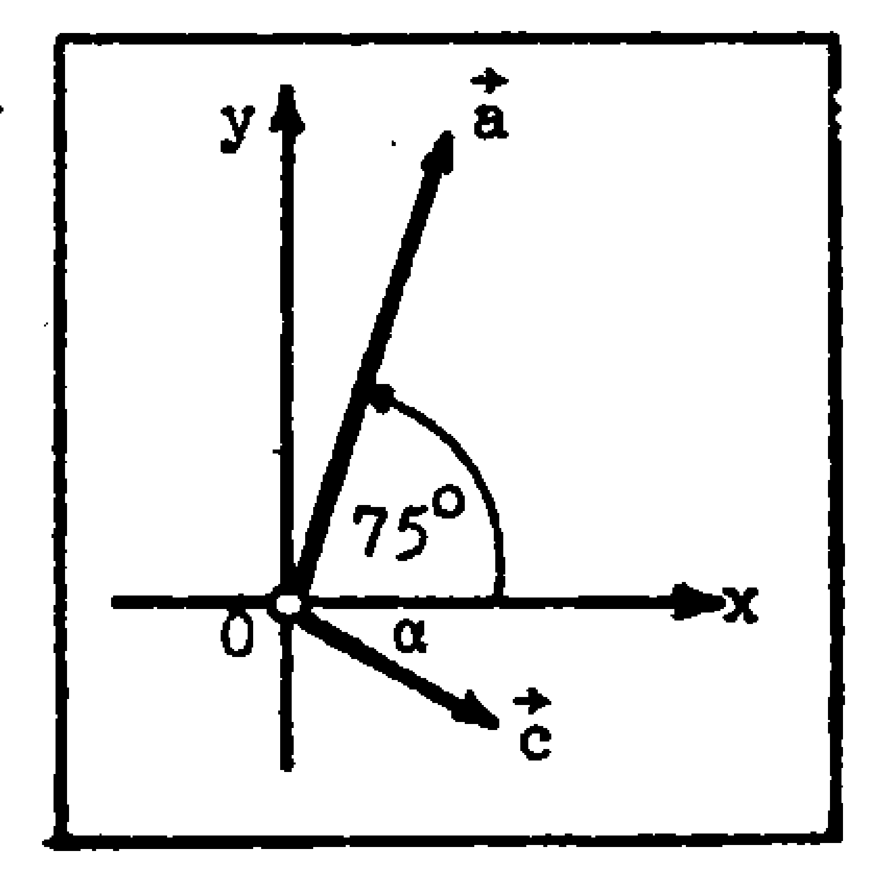
$\rightarrow \text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \pm\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \pm\sqrt{2}$



En la figura se observa que $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen sentidos opuestos, por tanto:

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = -\sqrt{2}$$

Ejemplo 12. En la gráfica adjunta, $\vec{c}$ es un vector unitario tal que: $\text{Cotg}\alpha = 3\sqrt{3}$. Si $\vec{a}+\vec{v}=\vec{a}^\perp$, hallar $\text{Comp}_{\vec{v}}\vec{c}$.



Solución. Dado $\text{Cotg}\alpha=3\sqrt{3}$ y α en el IV cuadrante, entonces:

$$\text{Sen}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{7}} \quad \text{y} \quad \text{Cos}\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

Luego, si $\vec{c}=(\text{Cos}\alpha,\text{Sen}\alpha) \rightarrow \vec{c} = \frac{\sqrt{7}}{14}(3\sqrt{3},-1)$

$\text{Sen}75^\circ = \text{Sen}(45^\circ+30^\circ) = \text{Sen}45^\circ\text{Cos}30^\circ+\text{Sen}30^\circ\text{Cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$

$\text{Cos}75^\circ = \text{Cos}(45^\circ+30^\circ) = \text{Cos}45^\circ\text{Cos}30^\circ-\text{Sen}45^\circ\text{Sen}30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

$\rightarrow \vec{a} = ||\vec{a}||(\text{Cos}75^\circ,\text{Sen}75^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}||\vec{a}||(\sqrt{3}-1,1+\sqrt{3}) = r(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$

Luego: $\vec{v} = \vec{a}^\perp - \vec{a} = r(-\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1)-r(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1) = 2r(-\sqrt{3},-1)$

Por tanto: $\text{Comp}_{\vec{v}}\vec{c} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{14}(3\sqrt{3},-1)\cdot 2r(-\sqrt{3},-1)}{2r\sqrt{3+1}} = -\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

Ejemplo 13. Dado el exágono regular de lado a, hallar la proyección ortogonal de $\overline{FC}$ sobre $\overline{BE}$.

Solución. $\overline{FC} = ||\overline{FC}||(\text{Cos}60^\circ, \text{Sen}60^\circ)$

$= 2a(1/2, \sqrt{3}/2) = a(1, \sqrt{3})$

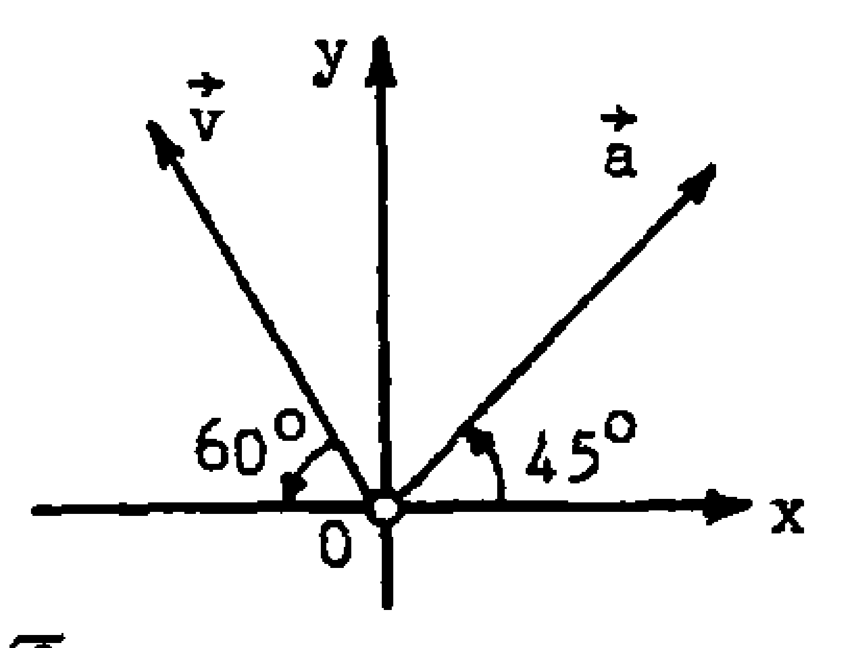
$\overline{BE} = ||\overline{BE}||(\text{Cos}300^\circ, \text{Sen}300^\circ) = 2a(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\rightarrow \overline{BE} = a(1, -\sqrt{3})$

Luego: $\text{Proy}_{\overline{BE}}\overline{FC} = \dfrac{\overline{FC}.\overline{BE}}{||\overline{BE}||^2}\overline{BE} = \dfrac{a(1,\sqrt{3}).a(1,-\sqrt{3})}{a^2(\sqrt{1+3})^2}a(1,-\sqrt{3})$

$\therefore \text{Proy}_{\overline{BE}}\overline{FC} = -\frac{a}{2}(1, -\sqrt{3})$

Ejemplo 14. Un avión vuela en sentido del vector $\vec{a}$. La velocidad del viento es de 50 Km/m en sentido del vector $\vec{v}$. Hallar el duplo de la componente de la velocidad del viento en la dirección del avión.



Solución. $\vec{a} = ||\vec{a}||(\text{Cos}45^\circ, \text{Sen}45^\circ) = ||\vec{a}||\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$

$\vec{v} = ||\vec{v}||(\text{Cos}120^\circ, \text{Sen}120^\circ) = 50(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 25(-1, \sqrt{3})$

Luego: $\text{Comp}_{\vec{a}}\vec{v} = \dfrac{\vec{v}.\vec{a}}{||\vec{a}||} = \dfrac{25(-1,\sqrt{3}).\frac{\sqrt{2}}{2}||\vec{a}||(1,1)}{||\vec{a}||} = \dfrac{25\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{3})$

$\therefore 2\text{Comp}_{\vec{a}}\vec{v} = 25\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

Ejemplo 15. Dados los puntos A(-1,3), B(5,6) y C(7,5); si P divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\overline{AP}:\overline{PB}=2$, hallar la proyección del vector $\overline{AP}$ sobre el vector $\overline{BC}$.

Solución. Sea el punto P(x,y). Si $\frac{AP}{PB} = 2 \rightarrow \overline{AP} = 2\overline{PB}$

$\rightarrow (x+1, y-3) = 2(5-x, 6-y) \leftrightarrow \begin{cases} x+1=10-2x & \rightarrow x=3 \\ y-3=12-2y & \rightarrow y=5 \end{cases}$

Luego: $P(3,5) \rightarrow \overline{AP} = (3,5)-(-1,3) = (4,2)$

$\overline{BC} = (7,5)-(5,6) = (2,-1)$

Entonces: $\text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{AP} = \left(\dfrac{\overline{AP}.\overline{BC}}{||\overline{BC}||^2}\right)\overline{BC} = \dfrac{(4,2).(2,-1)}{(\sqrt{4+1})^2}(2,-1)$

$\therefore \ \text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{AP} = \frac{6}{5}(2,-1)$

Ejemplo 16. En la figura adjunta se tiene: $||\vec{a}||=2$, $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{2}||\vec{b}||$. Sea $\vec{u}$ tal que $\vec{b}^{\perp}+\vec{u}=\vec{b}$ y α el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Hallar $\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{a}$.

Solución. $\vec{a} = ||\vec{a}||(\text{Cos}60^\circ,\text{Sen}60^\circ) = (1,\sqrt{3})$

Si $\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}\alpha$

$\rightarrow \sqrt{2}||\vec{b}|| = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}\alpha$, de donde: $\text{Cos}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha=45^\circ$

Luego: $\vec{b} = ||\vec{b}||(\text{Cos}105^\circ,\text{Sen}105^\circ) = \frac{||\vec{b}||}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6},\sqrt{2}+\sqrt{6})$

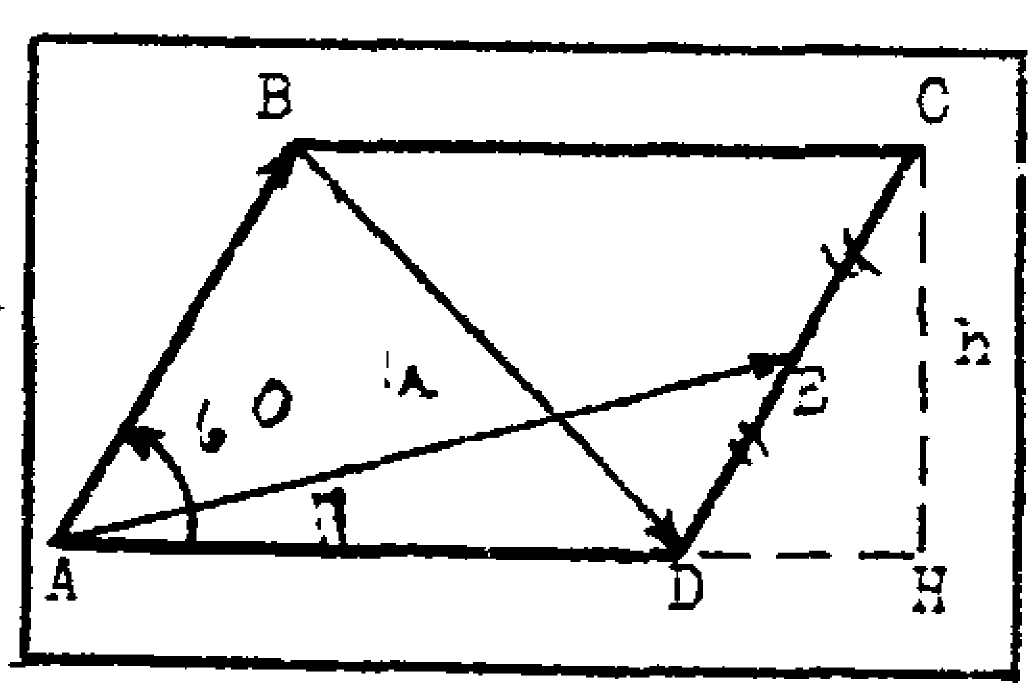
$\rightarrow \vec{b}^{\perp} = \frac{||\vec{b}||}{4}(-\sqrt{2}-\sqrt{6},\sqrt{2}-\sqrt{6})$

Si $\vec{b}^{\perp}+\vec{u}=\vec{b} \rightarrow \vec{u} = \vec{b}-\vec{b}^{\perp} = \frac{||\vec{b}||}{2}(\sqrt{2},\sqrt{6}) = r(\sqrt{2},\sqrt{6})$

Por tanto: $\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{a} = \left(\dfrac{\vec{a}.\vec{u}}{||\vec{u}||^2}\right)\vec{u} = \dfrac{(1,\sqrt{3}).r(\sqrt{2},\sqrt{6})}{r^2(\sqrt{2+6})^2}\,r(\sqrt{2},\sqrt{6})$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{18}}{8}(\sqrt{2},\sqrt{6}) = (1,\sqrt{3})$$

Ejemplo 17. En el paralelogramo de la figura se tiene: $\overline{DE} = \overline{EC}$, $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. La altura relativa a la base $\overline{AD}$ es h. Si $\overline{M} = \overline{AB} + \overline{AE} - \overline{BD}$ y $\overline{P} = \text{Proy}_{\overline{AD}}\overline{M}$, hallar $||\vec{P}||$ en función de h.



Solución. Tenemos: $\overline{M} = \overline{AB} + \overline{AE} - \overline{BD}$

Pero: $\overline{AE} = \overline{AE} + \overline{DE}$, $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$

$\rightarrow \overline{M} = \overline{AB} + (\overline{AD} + \overline{DE}) - (\overline{AD} - \overline{AB}) = 2\overline{AB} + \overline{DE} = 2\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{5}{2}\overline{AB}$

$\rightarrow ||\vec{P}|| = ||\text{Proy}_{\overline{AD}}\overline{M}|| = \dfrac{\overline{M}.\overline{AD}}{||\overline{AD}||} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{\overline{AB}.\overline{AD}}{||\overline{AD}||}\right) = \dfrac{5}{2}\left[\dfrac{||\overline{AB}||\,||\overline{AD}||\text{Cos}60}{||\overline{AD}||}\right]$

de donde: $||\vec{P}|| = \frac{5}{4}||\overline{AB}||$

En el ADHC: $h = ||\overline{DC}||\text{Sen}60^\circ = ||\overline{AB}||\text{Sen}60^\circ \rightarrow ||\overline{AB}|| = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$

$\therefore \ ||\vec{P}|| = \frac{5}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}h\right) = \frac{5\sqrt{3}}{6}h$

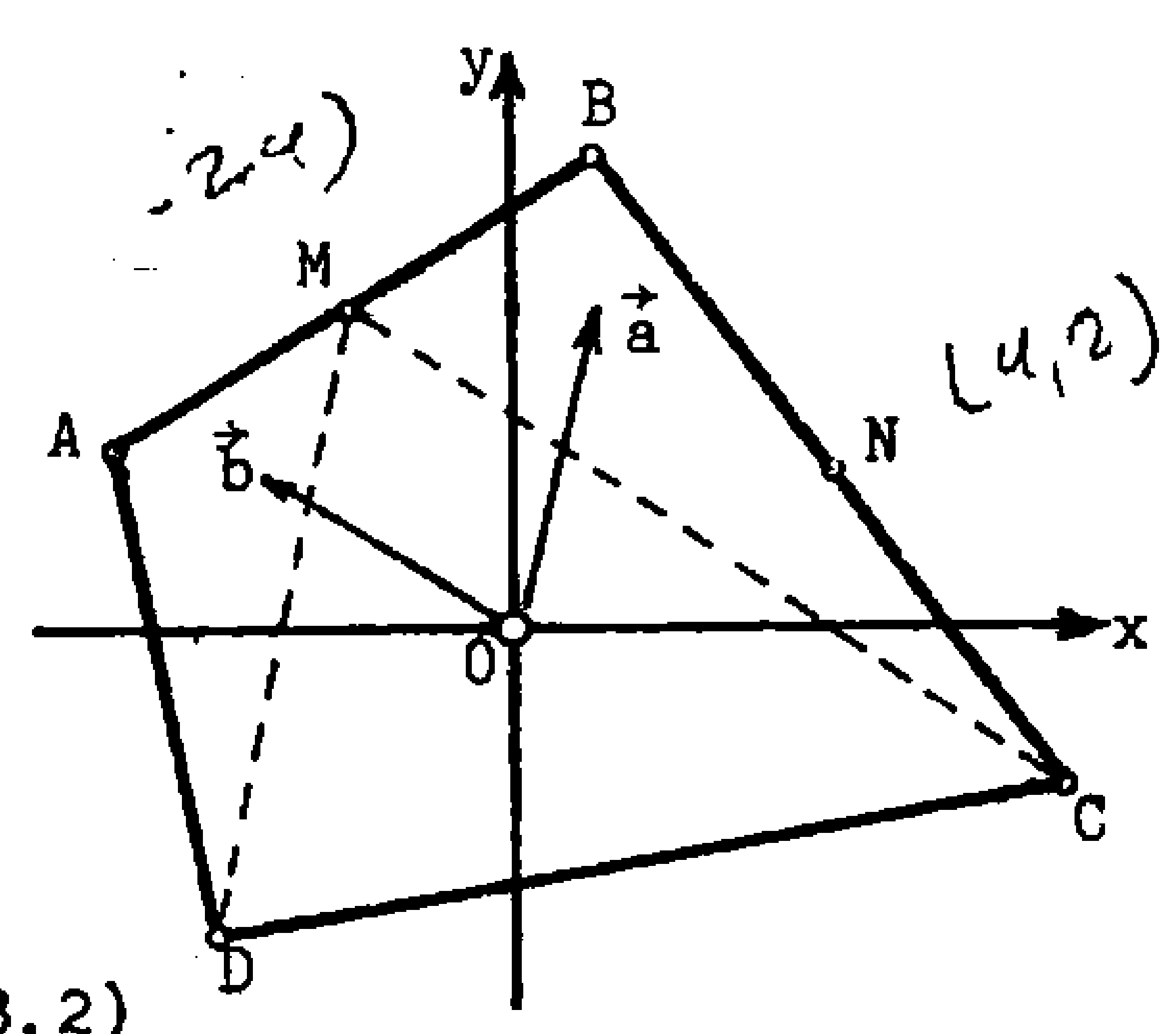
Ejemplo 18. Sea el cuadrilátero ABCD tal que M(-2,4) y N(4,2) son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente; $\overline{DM}$ es paralelo al vector $\vec{a}=(1,4)$, $\overline{CM}$ es paralelo al vector $\vec{b}=(-3,2)$ y $\text{Proy}_{\overline{AB}}\overline{DN} = \frac{36}{13}(3,2)$. Hallar los vértices del cuadrilátero.

Solución. Dado que $\overline{AB}||\text{Proy}_{\overline{AB}}\overline{DN}$,

entonces: $\overline{AB} = r(3,2)$

Si $\overline{DM}||\vec{a} \rightarrow \overline{DM}=t(1,4) \rightarrow \vec{M}-\vec{D}=t(1,4)$

$\rightarrow \vec{D} = (-2,4)-t(1,4)$ (1)



$\overline{DN} = \vec{N}-\vec{D} = (4,2)-(-2,4)+t(1,4)$

$= (6+t,-2+4t)$

Luego, si: $\text{Proy}_{\overline{AB}}\overline{DN} = \left(\frac{\overline{DN}.\overline{AB}}{||\overline{AB}||^2}\right)\overline{AB}$

$\rightarrow \frac{36}{13}(3,2) = \frac{(6+t,-2+4t).r(3,2)}{r^2(\sqrt{9+4})^2}\, r(3,2)$

de donde obtenemos: t=2 . Sustituyendo en (1): $\vec{D}=(-4,-4)$

Como M es punto medio de $\overline{AB} \rightarrow \overline{AB}=2\overline{MB}$

o sea: $r(3,2) = 2(\vec{B}-\vec{M}) \rightarrow \vec{B} = \frac{1}{2}(3r-4,2r+8)$ (2)

$\overline{CM}||\vec{b} \rightarrow \vec{M}-\vec{C} = s(-3,2) \rightarrow \vec{C} = (-2,4)-s(-3,2) = (-2+3s,4-2s)$ (3)

N es punto medio de $\overline{BC} \rightarrow \vec{N} = \frac{1}{2}(\vec{B}+\vec{C})$

Entonces: $2(4,2) = \frac{1}{2}(3r-4,2r+8) + (-2+3s,4-2s)$

$\rightarrow (16,8)=(3r+6s-8,2r-4s+16) \leftrightarrow \begin{cases} 16 = 3r+6s-8 \rightarrow 3r+6s = 24 \\ 8 = 2r-4s+16 \rightarrow r-2s = -4 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos: r=2 y s=3

Luego, en (2) y (3) tenemos: $\vec{B}=(1,6)$ y $\vec{C}=(7,-2)$

$\overline{AB}=2(3,2) \rightarrow \vec{B}-\vec{A}=(6,4) \rightarrow \vec{A}=(1,6)-(6,4)=(-5,2)$

Ejemplo 19. La figura adjunta es un trapecio rectángulo en donde: $\vec{a}=(5,12)$ y $\vec{c}=(-2,3)$. Hallar su área.

Solución. $||\vec{a}|| = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

$||\vec{h}|| = \text{Comp}_{\vec{a}^\perp}\vec{c} = \frac{\vec{c}.\vec{a}^\perp}{||\vec{a}||} = \frac{(-2,3).(-12,5)}{13} = 3$

$||\vec{d}|| = \text{Comp}_{\vec{a}}\vec{c} = \frac{\vec{c}.\vec{a}}{||\vec{a}||} = \frac{(-2,3).(5,12)}{13} = 2$

$||\vec{b}|| = ||\vec{a}||-||\vec{d}|| = 13-2 = 11$

Area del trapecio: $S = \frac{1}{2}(||\vec{a}||+||\vec{b}||)||\vec{h}|| = \frac{1}{2}(13+11)3 = 36u^2$

Ejemplo 20. Sean $\vec{a},\vec{b}\in R^2-\{\theta\}$ y $r\neq 0$. Establecer el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) $Proy_{\vec{b}^\perp}\vec{a} = Proy_{\vec{a}^\perp}\vec{b} \rightarrow \vec{a}=\vec{b}$

b) $Proy_{\vec{a}}(Proy_{\vec{b}}\vec{a}) = Proy_{\vec{b}}(Proy_{\vec{a}}\vec{b}) \rightarrow \vec{a}||\vec{b}^\perp$ ó $||\vec{a}||=||\vec{b}||$

c) $|Comp_{\vec{a}}(\vec{a}^\perp+\vec{b})| \leq ||\vec{b}||$

d) Si $r>0 \rightarrow Comp_{\vec{b}^\perp}\vec{a} = -Comp_{r\vec{b}}\vec{a}^\perp$

e) $Proy_{r\vec{b}}(r\vec{a}) = Proy_{\vec{b}}\vec{a}$

Solución. a) Si $Proy_{\vec{b}^\perp}\vec{a} = Proy_{\vec{a}^\perp}\vec{b} \rightarrow \vec{b}^\perp||Proy_{\vec{a}^\perp}\vec{b}$

Pero como: $Proy_{\vec{a}^\perp}\vec{b}||\vec{a}^\perp \rightarrow \vec{b}^\perp||\vec{a}^\perp \rightarrow \vec{b}||\vec{a}$

Por tanto, la afirmación es *falsa*

b) Si $Proy_{\vec{a}}(Proy_{\vec{b}}\vec{a}) = Proy_{\vec{b}}(Proy_{\vec{a}}\vec{b})$, entonces:

$$\left[\frac{(Proy_{\vec{b}}\vec{a}).\vec{a}}{||\vec{a}||^2}\right]\vec{a} = \left[\frac{(Proy_{\vec{a}}\vec{b}).\vec{b}}{||b||^2}\right]\vec{b}$$

$$\rightarrow \left[\frac{(\vec{a}.\vec{b})(\vec{b}.\vec{a})}{||\vec{b}||^2||\vec{a}||^2}\right]\vec{a} = \left[\frac{(\vec{b}.\vec{a})(\vec{a}.\vec{b})}{||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2}\right]\vec{b} \qquad (1)$$

La igualdad (1) se verifica si y sólo si:

$\vec{a}.\vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \rightarrow \vec{a}||\vec{b}^\perp$

$\vec{a}.\vec{b} \neq 0$, en (1) se tiene: $\vec{a}=\vec{b} \rightarrow ||\vec{a}||=||\vec{b}||$

Luego, la afirmación es *verdadera.*

c) $|Comp_{\vec{a}}(\vec{a}^\perp+\vec{b})| \leq ||\vec{b}|| \rightarrow \left|\frac{\vec{a}.(\vec{a}^\perp+\vec{b})}{||\vec{a}||}\right| \leq ||\vec{b}||$

$$\leftrightarrow \left|\frac{\vec{a}.\vec{a}^\perp + \vec{a}.\vec{b}}{||\vec{a}||}\right| \leq ||\vec{b}||$$

$$\leftrightarrow |\vec{a}.\vec{b}| \leq ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$$

La afirmación es *verdadera* porque se trata de la disigualdad de Cauchy-Schwartz.

d) $-Comp_{r\vec{b}}(\vec{a}^\perp) = -\frac{(r\vec{b}).\vec{a}^\perp}{||r\vec{b}||} = -\frac{r\vec{a}^\perp.\vec{b}}{|r|\ ||\vec{b}||}$

Dado que: $r>0 \rightarrow |r|=r \rightarrow -Comp_{r\vec{b}}(\vec{a}^\perp) = -\frac{\vec{a}^\perp.\vec{b}}{||\vec{b}||}$

Pero: $\vec{a}^{\perp}.\vec{b} = -\vec{a}.\vec{b}^{\perp}$ y $||\vec{b}|| = ||\vec{b}^{\perp}||$

Entonces: $-Comp_{r\vec{b}}(\vec{a}^{\perp}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}{||\vec{b}^{\perp}||} = Comp_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}$

Luego, la afirmación es *verdadera*.

e) $Proy_{r\vec{b}}(r\vec{a}) = \left[\dfrac{(r\vec{a}).(r\vec{b})}{||r\vec{b}||^2}\right] r\vec{b} = r\left[\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\right]\vec{b} = rProy_{\vec{b}}\vec{a}\ ,\ \forall r\neq 0$

La igualdad se cumple solo cuando r=1, por tanto, la afirmación es *falsa*.

Ejemplo 21. Sean los vectores $\vec{a}=(k,-2)$ y $\vec{b}=(2k,k+2)$, donde $k\varepsilon R$. Hallar los valores de k de modo que $Proy_{\vec{b}}\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan sentidos opuestos.

Solución. Si $Proy_{\vec{b}}\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen sentidos opuestoa $\rightarrow$ $Comp_{\vec{b}}\vec{a}<0$,

o sea: $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||} < 0$; pero como $||\vec{b}||>0$ $\rightarrow$ $\vec{a}.\vec{b}<0$

$\rightarrow$ $(k,-2).(2k,k+2)<0$ $\rightarrow$ $2k^2-2(k+2)<0$ $\leftrightarrow$ $k^2-k-2<0$

$\rightarrow$ $(k+1)(k-2)<0$ $\leftrightarrow$ $(k+1<0 \wedge k-2>0) \vee (k+1>0 \wedge k-2<0)$

$\leftrightarrow$ $(k<-1 \wedge k>2) \vee (k>-1 \wedge k<2)$

$\leftrightarrow$ $(\ \phi\ ) \vee (-1<k<2)$ $\leftrightarrow$ $k\varepsilon\langle -1,2\rangle$

Ejemplo 22. En la figura:
$\overline{TP}||\overline{OX}$, $||\overline{OP}||=8$

Si $\overline{OT}=m\overline{OP}+n\overline{OP}$, hallar m.n

Solución. $\overline{OP}=||\overline{OP}||(Cos30^\circ,Sen30^\circ)=(4\sqrt{3},4)$

Componentes de $\overline{OT}$: y=x

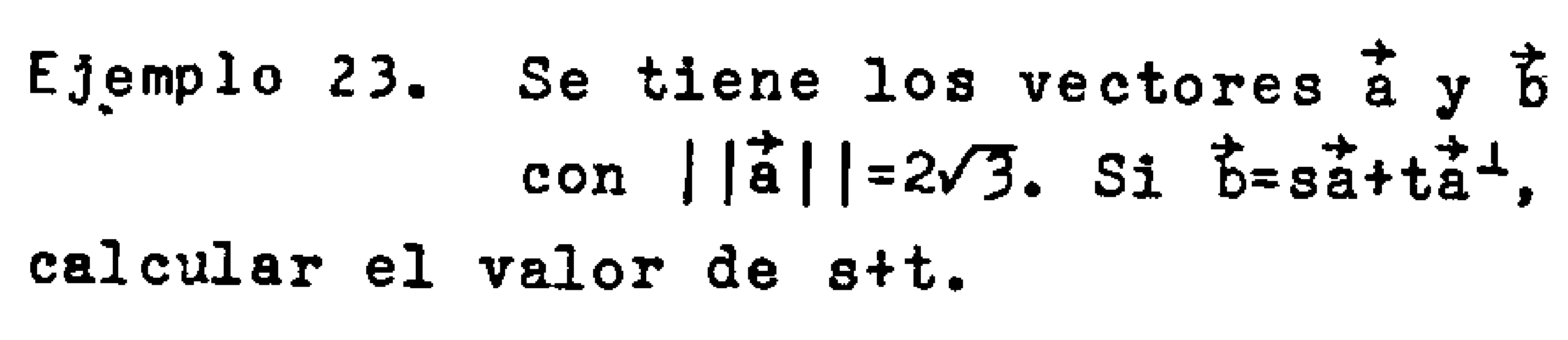
Pero: y = ordenada de $\overline{OP}$ = 4 $\rightarrow$ $\overline{OT}=(4,4)$

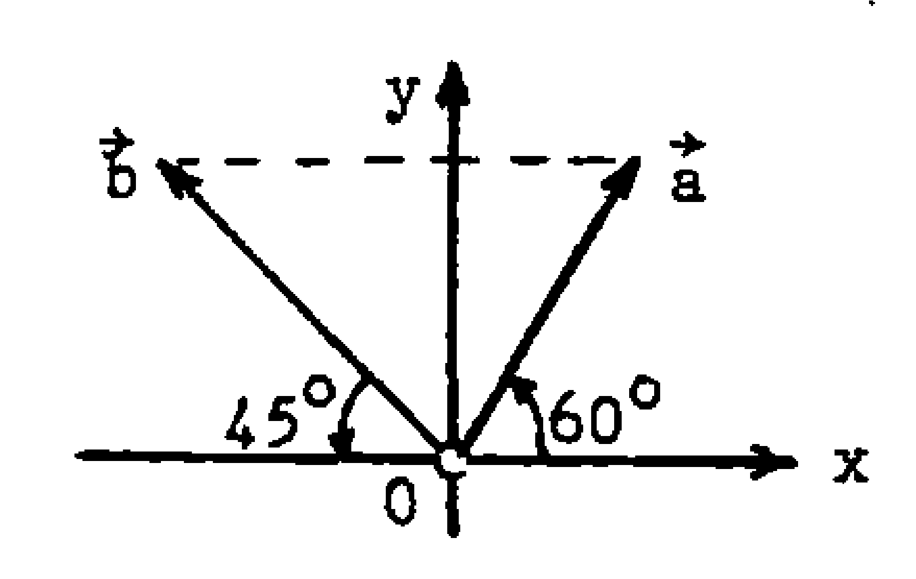
Luego: $(4,4) = m(4\sqrt{3},4) + n(-4,4\sqrt{3})$

$\rightarrow$ $(1,1) = m(\sqrt{3},1) + n(-1,\sqrt{3})$ $\leftrightarrow$ $\begin{cases} 1 = \sqrt{3}m - n \\ 1 = m + \sqrt{3}n \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos: $m = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)$, $n = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$

$\therefore$ m.n = 1/8


Ejemplo 23. Se tiene los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con $||\vec{a}||=2\sqrt{3}$. Si $\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{a}^{\perp}$, calcular el valor de s+t.



Solución. $\vec{a} = ||\vec{a}||(Cos60^\circ,Sen60^\circ)$

$\rightarrow\ \vec{a} = 2\sqrt{3}(1/2,\sqrt{3}/2) = (\sqrt{3},3)$

Ordenada de $\vec{b}$ = Ordenada de $\vec{a}$ $\rightarrow$ $y = 3 = -x$ $\therefore\ \vec{b}=(-3,3)$

Si $\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{a}^{\perp}$ $\rightarrow$ $(-3,3) = s(\sqrt{3},3) + t(-3,\sqrt{3})$ (1)

Usaremos un método más directo para calcular s y t.

Multiplicamos escalarmente la ecuación (1) por $(-3,\sqrt{3})^{\perp}$:

$$(-3,3).(-\sqrt{3},-3) = s(\sqrt{3},3).(-\sqrt{3},-3) + t(0)$$

$\rightarrow\ 3\sqrt{3} - 9 = s(-3-9)$, de donde: $s = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3})$

Multiplicamos escalarmente la ecuación (1) por $(\sqrt{3},3)^{\perp}$:

$$(-3,3).(-3,\sqrt{3}) = s(0) + t(-3,\sqrt{3}).(-3,\sqrt{3})$$

$\rightarrow\ 9 - 3\sqrt{3} = t(9-3)$, de donde: $t = \frac{1}{4}(3+\sqrt{3})$

$$\therefore\ s+t = \frac{3}{2}$$

EJERCICIOS

1. Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^2, demostrar que:

$$||\vec{a}||^2\vec{b} = (\vec{a}.\vec{b})\vec{a} + (\vec{a}^{\perp}.\vec{b})\vec{a}^{\perp}$$

2. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores en R^2, demostrar que:

$$||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 = (\vec{a}.\vec{b})^2 + (\vec{a}^{\perp}.\vec{b})^2$$

3. Demostrar que: a) $\text{Proy}_{\vec{a}}(\vec{b}-\vec{c}) = \text{Proy}_{\vec{a}}\vec{b} - \text{Proy}_{\vec{a}}\vec{c}$

   b) $\text{Proy}_{\vec{a}}(r\vec{b}) = r\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{b}$

4. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ lados de un paralelogramo. Si $||\vec{a}|| = 6$ $||\vec{a}|| = 2||\vec{b}||$ y $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = 10/3$, hallar la longitud de la diagonal $\vec{a}-\vec{b}$. Rp. 5

5. Dados los vectores $\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$ y $\vec{b}=(3,\sqrt{3})$, hallar: $2(\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{a}}\vec{b})$ Rp. $(3+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$

6. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que: $\vec{a}=(5,-2)$, $\text{Comp}_{\vec{a}}\vec{b}=-58$ y $||\vec{b}||=29$. Hallar $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}$. Rp. $-2\sqrt{29}$

7. Si $\vec{a}$ es un vector del mismo sentido que $\vec{v}=(1,2)$, tal que: $||\vec{a}||=50$ y $||\vec{b}||=29$. Hallar $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}$. Rp. -40

8. Los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{b}-\vec{a}$. Si $||\vec{a}||=6$, $||\vec{b}||=2$ y $||\vec{b}-\vec{a}||=5$; hallar $Comp_{\vec{b}}\vec{a}-Comp_{\vec{a}}\vec{b}$. Rp. 5/2

9. Los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$, si $||\vec{a}||=10$, $||\vec{b}||=6$ y $Comp_{\vec{b}}\vec{a}=-5$. Hallar la longitud de $\vec{a}-\vec{b}$. Rp. 14

10. Los lados de un triángulo son $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$, tales que $||\vec{a}||=8$ $||\vec{b}||=6$ y $||\vec{a}+\vec{b}||=\sqrt{68}$. Hallar: $Comp_{\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})-3Comp_{\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b})$. Rp. 32

11. Si $||\vec{a}-\vec{b}||=4$, $||\vec{b}||=3$ y $Comp_{\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b})=22/3$, hallar la norma de $\vec{a}$. Rp. $\sqrt{69}$

12. Si $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $||\vec{a}||=p$, $||\vec{b}||=q$, $||\vec{c}||=r$, $\vec{a}.\vec{b}=pq$, $\vec{a}.\vec{c}=pr$ y $Comp_{\vec{b}}\vec{c}=r$; hallar la norma de $\vec{d}$. Rp. p+q+r

13. Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\theta$, $\vec{b}\neq\theta$, $||\vec{a}||=a$, $||\vec{b}||=b$, $||\vec{c}||=c$. Hallar $Comp_{\vec{b}}\vec{a}$. Rp. $\frac{1}{2b}(c^2-a^2-b^2)$

14. Si $Proy_{\vec{b}}\vec{a}=(2,-5)$, $Proy_{\vec{b}^\perp}\vec{a}=(-3,2)$ y $\vec{b}=2\vec{a}+\vec{a}^\perp$. Hallar $||\vec{b}||$. Rp. $5\sqrt{2}$

15. Sea $||\vec{a}||=\sqrt{65}$, $||\vec{a}+\vec{b}||=\sqrt{164}$, $Comp_{\vec{a}}(\vec{a}+\vec{b}) = \dfrac{102}{||\vec{a}||}$. Hallar $Comp_{\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b})$. Rp. 12/5

16. Si $\vec{a}=(5,-2)$ y $Proy_{\vec{b}^\perp}\vec{a}=(4,1)$; hallar $Comp_{\vec{b}}\vec{a}$ sabiendo que $Comp_{\vec{b}^\perp}\vec{a}$ es positivo. Rp. $\sqrt{10}$

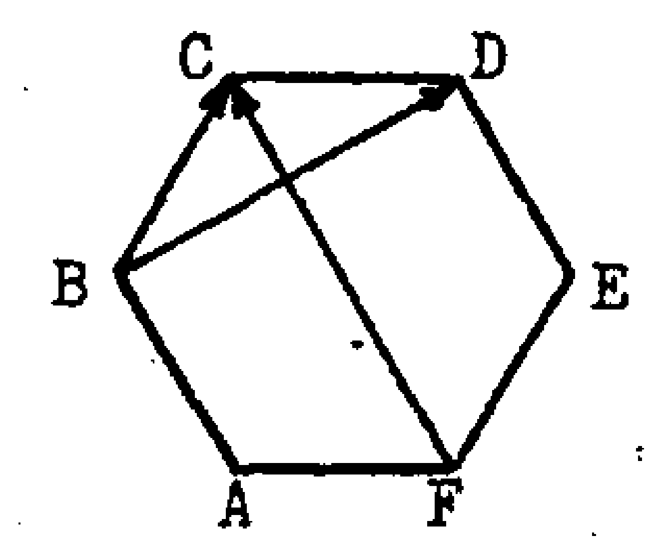
17. Hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $Proy_{\vec{b}^\perp}\vec{a}$, si $\vec{a}=(1,2)$ y $\vec{b}=(1,3)$. Rp. 45^o

18. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de longitudes 2 y 3 respectivamente, forman ángulos de medidas α y β con el vector $\vec{c}=(1,1)$. Siendo $0^o<\alpha<90^o$ y $\beta<180^o$. Hallar $||Proy_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})||$ en términos de α y β. Rp. $|2Cos\alpha+3Cos\beta|$

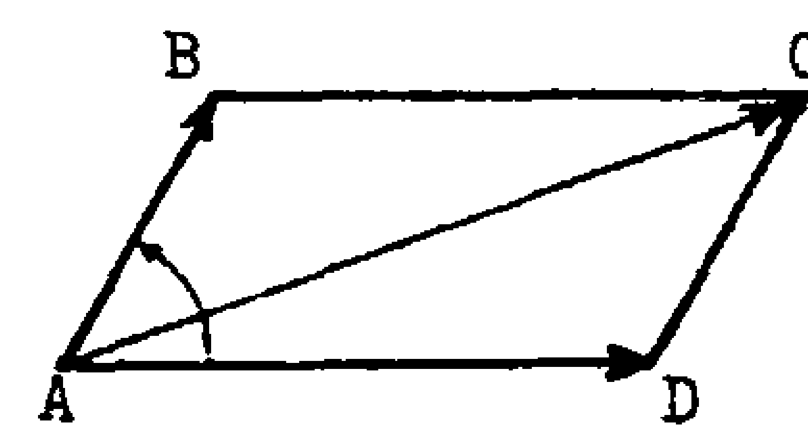
19. Si $\vec{a}=3\left(\dfrac{\vec{b}}{||\vec{b}||}\right)+4\left(\dfrac{\vec{b}^\perp}{||\vec{b}^\perp||}\right)$ y $Comp_{\vec{a}^\perp}\vec{b}=2$, hallar $|\vec{a}^\perp.\vec{b}|$. Rp. 10

20. Hallar el vector $\vec{b}$ sabiendo que: $||\vec{b}||=2\sqrt{2}$, $a=(-4,2)$, $Comp_{\vec{b}}\vec{a}$ es positivo y $Proy_{\vec{b}^\perp}\vec{a}=(-3,3)$. Rp. (-2,-2)

21. Dado el exágono regular ABCDEF de la figura, cuyo lado mide 10 unidades y el vector $\overline{M}=\overline{BD}+\overline{FC}+\overline{BC}$; hallar: $||Proy_{\overline{AF}}\overline{M}||$. Rp. 25

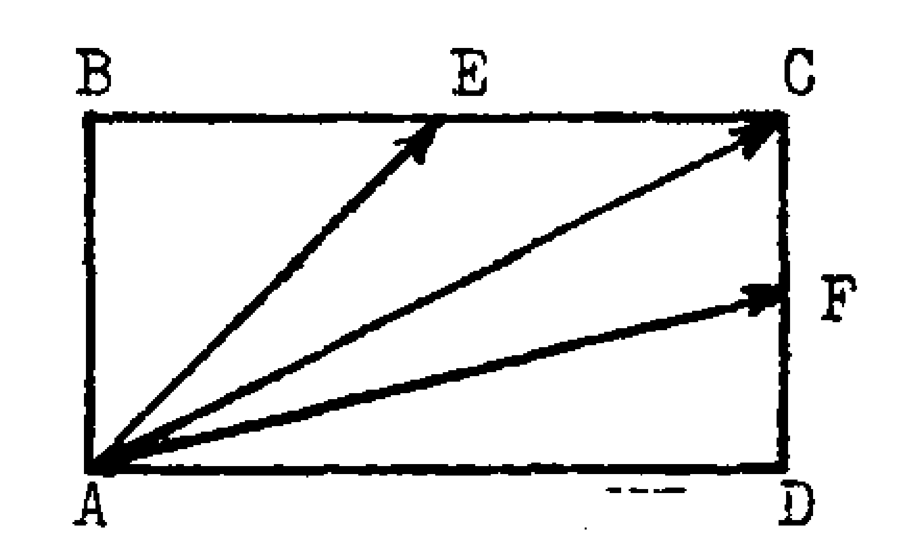


22. En el paralelogramo ABCD, $m(\measuredangle BAD)=60^o$ $||\overline{AB}||=a$, $||\overline{AD}||=2a$, donde $a\varepsilon R-\{0\}$. Si $p=||Proy_{\overline{AD}}\overline{AC}||$ y $q=||Proy_{\overline{AB}}\overline{AC}||$, hallar p+q. Rp. $\frac{9}{2}a$

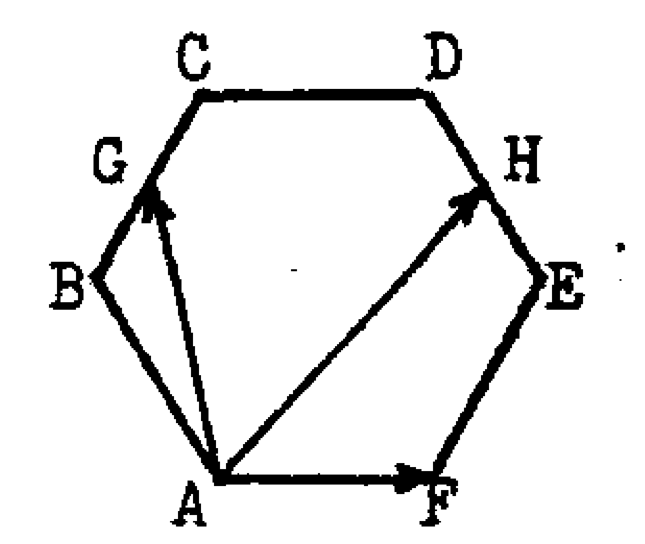


23. Sabiendo que: $Proy_{\vec{a}}(a,b)=(1,2)$ y $Proy_{\vec{a}}(x,y)=(-4,-8)$, hallar $Proy_{\vec{a}}(4a-x,4b-y)$. Rp. (8,16)

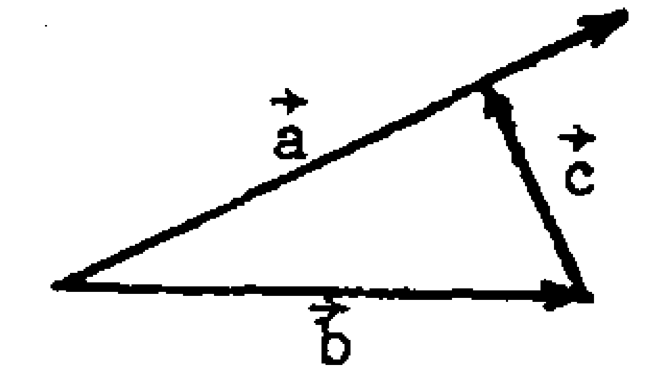
24. Sea ABCD un rectángulo tal que $2\overline{AB}=\overline{AD}$ y $||\overline{AB}||=a$; sean E y F puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$, respectivamente. Si $\overline{M} = \overline{AE}+\overline{AC}+\overline{AF}$, hallar el valor de: $Comp_{\overline{AB}}\overline{M}+Com_{\overline{AD}}2\overline{M}$. Rp. (25/2)a



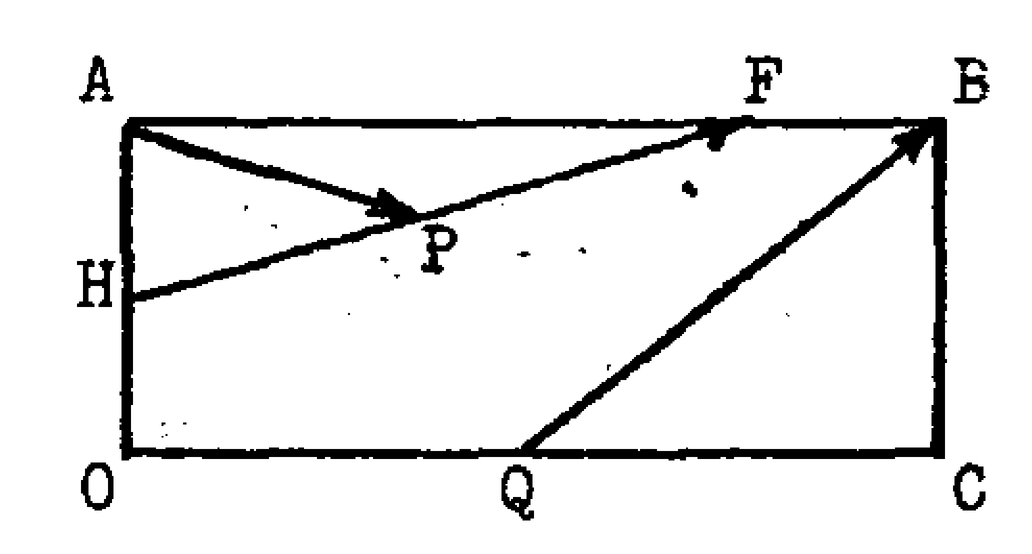
25. Dado el exágono regular de lado a, en donde G y H son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ respectivamente; hallar $||\vec{x}||$, si: $\vec{x} = Proy_{\overline{AF}}(5\overline{AG})+Proy_{\overline{AF}}(9\overline{AH})$. Rp. 10a



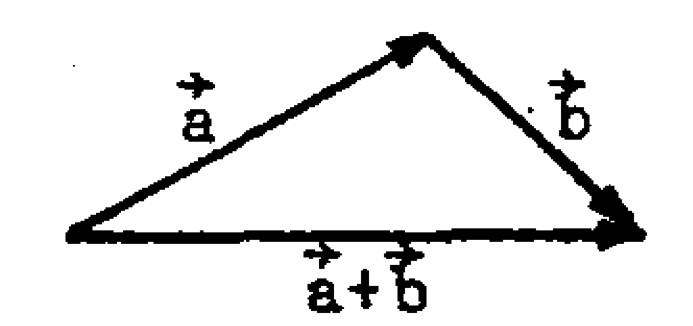
26. En la figura: $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores de R^2 tales que $\vec{b}$ es unitario, $\vec{c}$ es ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{a}.\vec{b}=||\vec{a}||(\sqrt{3}/2)$. Hallar $Comp_{\vec{c}}\vec{a}$. Rp. $\sqrt{3}/2$



27. En el rectángulo de la figura: H, P y Q son puntos medios. $\overline{AB}=4\overline{FB}$, $\overline{OC}=4a$, $\overline{OA}=a$. Si $\vec{v}=\overline{HF}+\overline{AP}+\overline{QC}$, hallar: $Comp_{\overline{AB}}\vec{v}$ + $Comp_{\overline{QB}}\vec{v}$.
Rp. $\frac{\sqrt{5}}{20}(26\sqrt{5}+53)a$

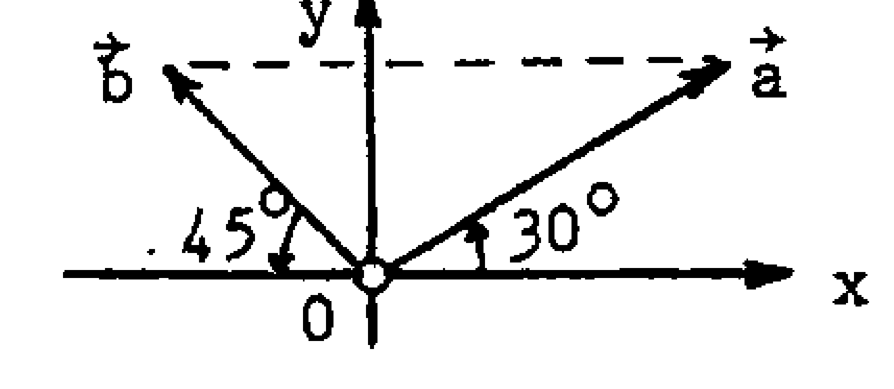


28. En la figura: $||\vec{a}||=8$, $||\vec{b}||=6$ y $||\vec{a}+\vec{b}||=\sqrt{68}$. Hallar: $Comp_{\vec{a}}(\vec{a}+\vec{b})-3Comp_{\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b})$. Rp. 32

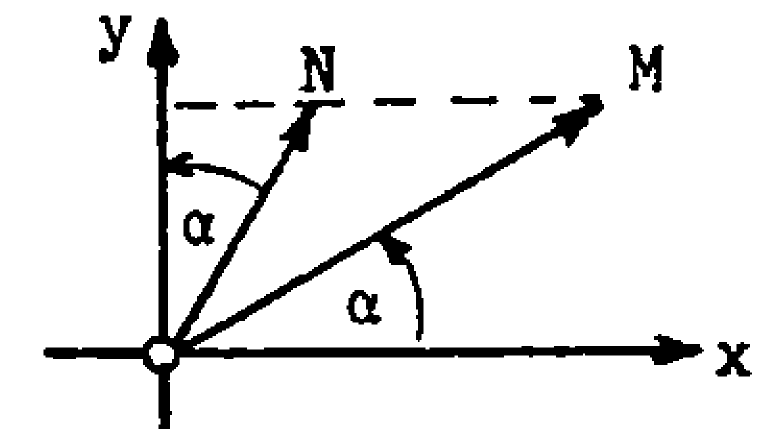


29. En un trapecio ABCD, los lados paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden 9 y 3 unidades respectivamente. Si M es punto medio de $\overline{AB}$, N es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{MN}=m\overline{AB}+n\overline{AD}$, hallar m-n. Rp. -1/3

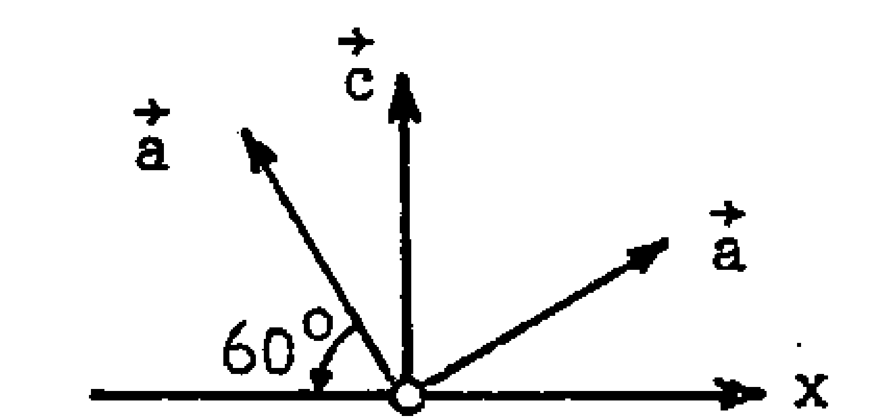
30. En la figura se tiene los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con $||\vec{a}||=4$. Si $\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{a}$, hallar el valor de s+t. Rp. 1/2



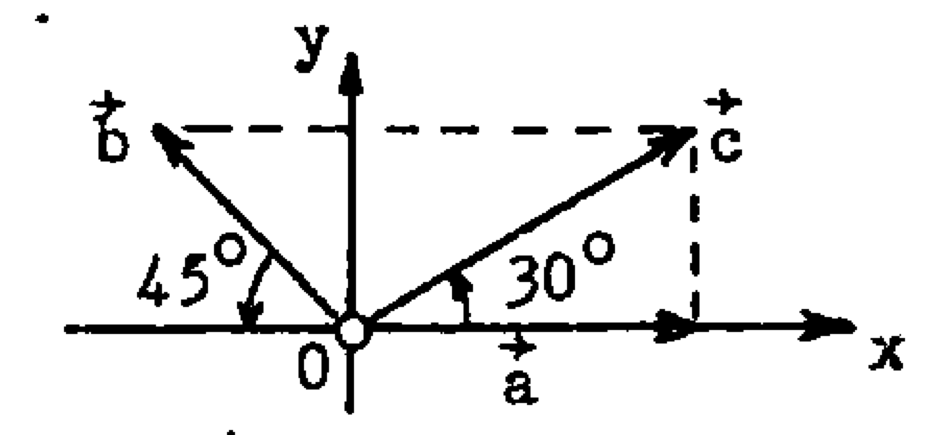
31. En la figura: $\alpha=30^\circ$
$||\overline{OM}||=12$, si $\overline{ON}=m\overline{OM}+n\overline{OM}^\perp$, hallar el valor de m+n. Rp. $\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})$



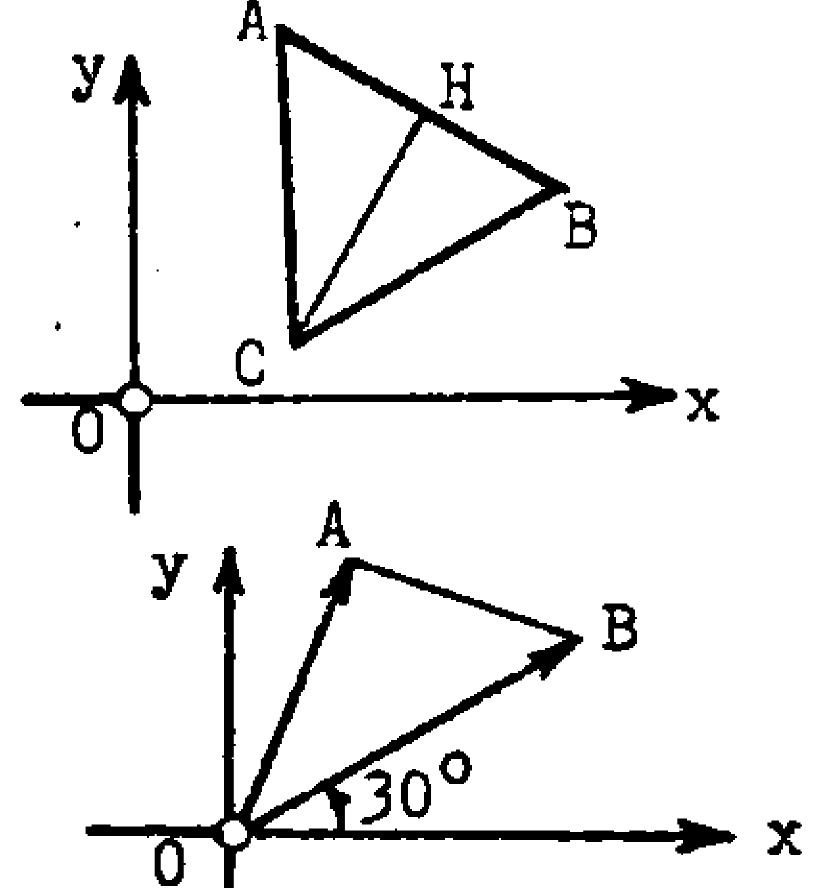
32. Dados los vectores que se muestran en la figura, hallar $n+\sqrt{3}m$ sabiendo que: $m\vec{a}+n\vec{a}^\perp=\vec{c}$, siendo $\vec{a}$ un vector unitario y $||\vec{c}||=8$ Rp. $8\sqrt{3}$



33. En la figura se tiene los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, donde $||\vec{a}||=2\sqrt{3}$. Si $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, hallar m-n. Rp. $\sqrt{3}/3$

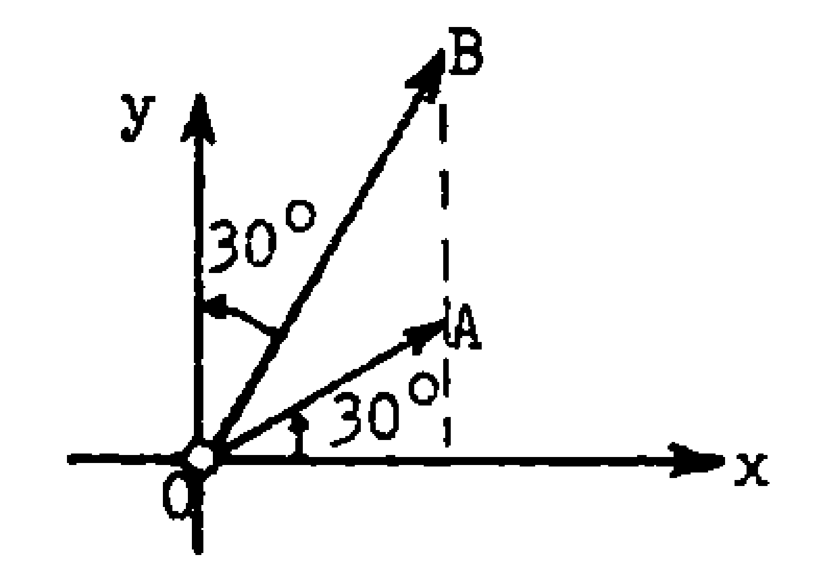


34. En la figura el ΔABC es equilátero, $\overline{CH}$ es altura. Si $\overline{CH}=(2,4)$ y $\vec{v}=(\sqrt{3},1)$ hallar $\text{Comp}_{\vec{v}}\overline{CA}$. Rp. $4\sqrt{3}/3$



35. En la figura se tiene:
$a(\Delta OAB)=10u^2$ y $||\vec{b}||=4$.
Si $\text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}=(x,y)$, hallar: $4\sqrt{3}xy$.
Rp. -75

36. En la figura: $\overline{AB}||\overline{OY}$ y $||\overline{OA}||=4$.
Si $\overline{OB}=m\overline{OA}+n\overline{OA}^\perp$, hallar el valor de m-n. Rp. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$



1.20 AREA DEL PARALELOGRAMO Y DEL TRIANGULO

Haciendo uso de la proyección ortogonal de un vector sobre otro, estamos en condiciones de hacer otra interpretación geométrica del producto escalar.

Para el efecto consideremos el paralelogramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (Fig. 16). Llamemos $||\vec{c}||$ a la altura, que se obtiene mediante la proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$, de modo que:

$$||\vec{c}|| = ||\text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}|| = |\text{Comp}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}^\perp}{||\vec{b}^\perp||}\right|$$

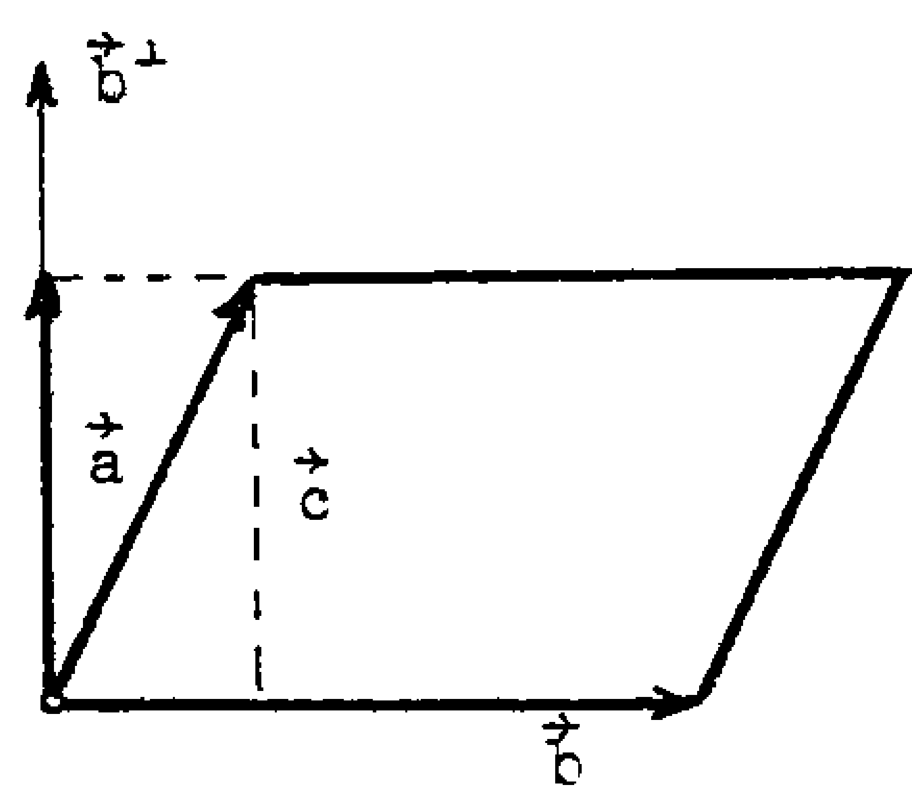


Figura 16

Recordando que el área del paralelogramo es igual al producto de su base por la altura, se tiene:

$$S = ||\vec{b}||\,||\vec{c}|| = ||\vec{b}||\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}^\perp}{||\vec{b}^\perp||}\right|, \text{ pero } ||\vec{b}|| = ||\vec{b}^\perp|| \rightarrow S = |\vec{a}\cdot\vec{b}^\perp|$$

Por lo que, podemos dar la siguienete:

DEFINICION 7. El área (S) de un paralelogramo, cuyos lados son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es igual al producto escalar de uno de ellos por el ortogonal del otro. Esto es:

$$S = |\vec{a}\cdot\vec{b}^\perp| = |\vec{a}^\perp\cdot\vec{b}| \qquad (22)$$

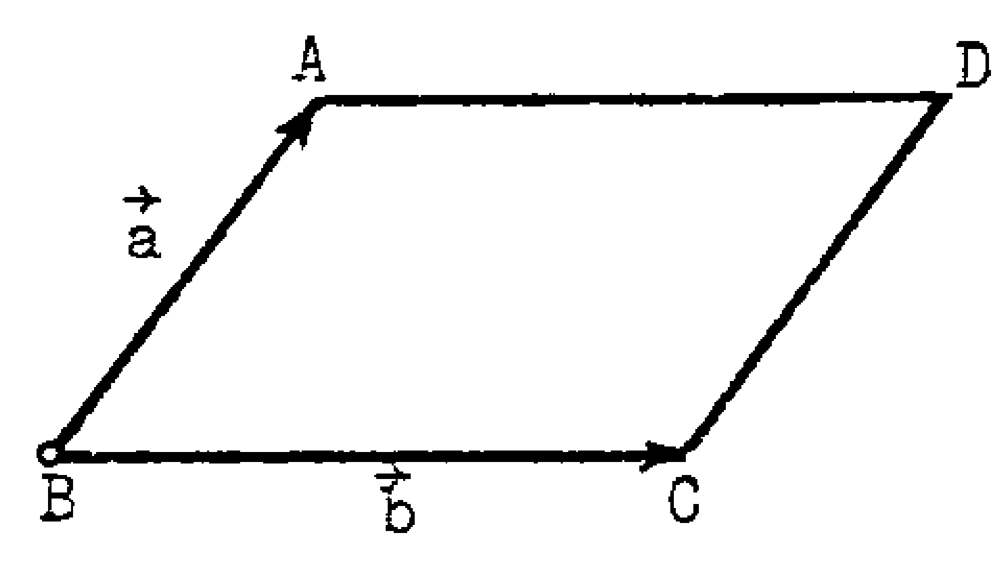
En particular, el área del triángulo (S_1) cuyos lados consecutivos son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dado por:

$$S_1 = \frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{b}^\perp| = \frac{1}{2}|\vec{a}^\perp\cdot\vec{b}| \qquad (23)$$

Ejemplo 1. Sean A(-3,1), B(7,-1) y C(5,3) tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Hallar su área.

Solución. Tomemos el vértice B como punto inicial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Entonces:

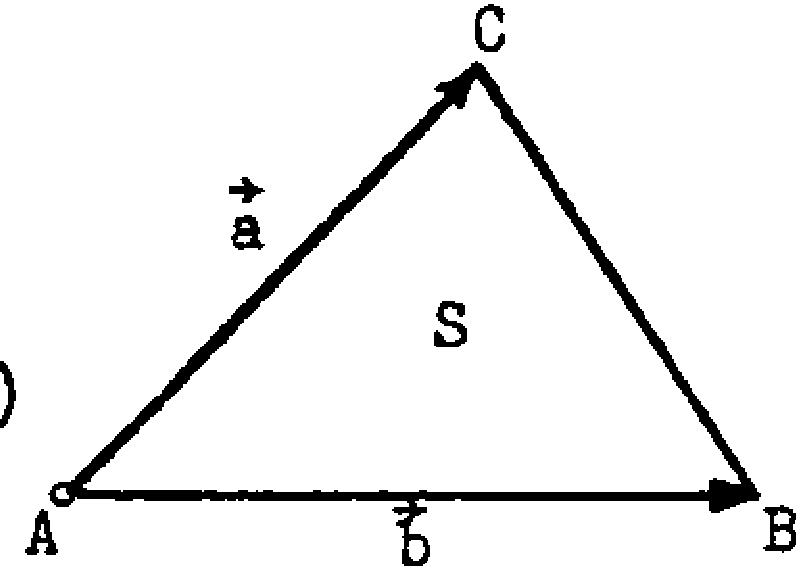
$\vec{a} = \overline{BA} = (-3,1)-(7,-1) = (-10,2)$
$\vec{b} = \overline{BC} = (5,3)-(7,-1) = (-2,4)$



Luego: $S = |\vec{a}\cdot\vec{b}^\perp| = |(-10,2)\cdot(-4,-2)| = 36u^2$

Ejemplo 2. Hallar el área del triángulo de vértices A(-8,-2), B(-4,-6) y C(-1,5).

Solución. Tomando el vértice A como punto inicial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$,



se tiene: $\vec{a} = \overline{AC} = (-1,5)-(-8,-2) = (7,7)$
$\vec{b} = \overline{AB} = (-4,-6)-(-8,-2) = (4,-2)$

Por tanto, según la ecuación (23):

$$S = \frac{1}{2}|(7,7).(4,4)| = \frac{1}{2}|28+28| = 28u^2$$

Ejemplo 3. Hallar el área del paralelogramo sabiendo que sus diagonales están contenidos en los vectores $\vec{u}=(3,3)$ y $\vec{v}=(5,-1)$.

Solución. En el ΔABD: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{v}$ (1)
En el ΔADC: $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ (2)

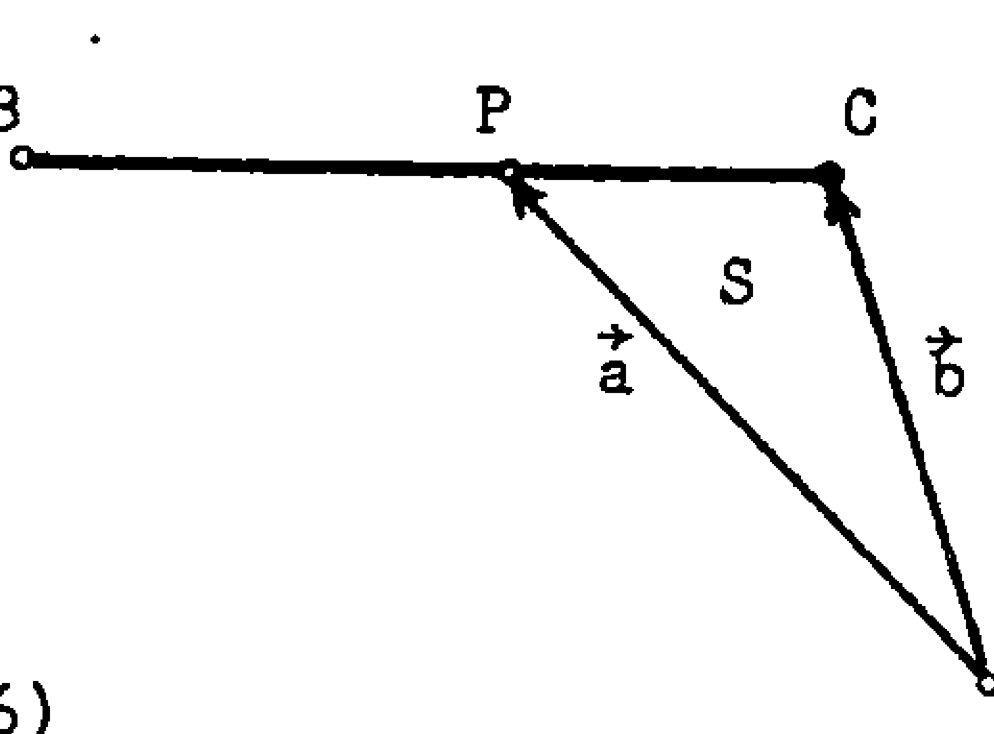
De (1) y (2) obtenemos: $\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$
$\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$

Luego: $\vec{a}=(4,1)$ y $\vec{b}=(-1,2) \rightarrow \vec{b}^{\perp}=(-2,-1)$

Si $S = |\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| \rightarrow S = |(4,1).(-2,-1)| = |-8-1| = 9u^2$

Ejemplo 4. Se dan los puntos A(3,-2), B(-3,2) y C(2,7). Si P divide al segmento $\overline{BC}$ en la razón $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{3}$; hallar el área del triángulo APC.

Solución. Supongamos que P=(x,y)
Si $3\overline{BP} = 2\overline{PC}$



Entonces: $3(x+3,y-2) = 2(2-x,7-y)$

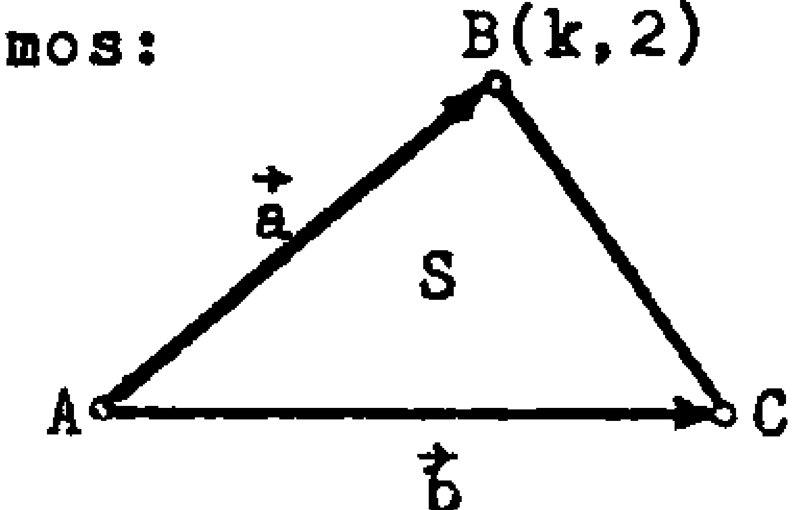
$$\leftrightarrow \begin{cases} 3x+9 = 4-2x & \rightarrow x=-1 \\ 3y-6 = 14-2y & \rightarrow y=4 \end{cases}$$

Luego: $\vec{a} = \overline{AP} = (-1,4)-(3,-2) = (-4,6)$
$\vec{b} = \overline{AC} = (2,7)-(3,-2) = (-1,9) \rightarrow \vec{b}^{\perp}=(-9,-1)$

Por tanto: $S = \frac{1}{2}|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| = \frac{1}{2}|(-4,6).(-9,-1)| = 15u^2$

Ejemplo 5. Sean los puntos A(3,5), B(k,2) y C(5,1). Hallar los valores de k de modo que dichos puntos sean vértices de un triángulo de área $11u^2$.

Solución. Tomando A como punto inicial tenemos:



$\vec{a} = \overline{AB} = (k,2)-(3,5) = (k-3,-3)$

$\vec{b} = \overline{AC} = (5,1)-(3,5) = (2,-4)$

$S = \frac{1}{2}|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| \rightarrow 11 = \frac{1}{2}|(k-3,-3).(4,2)|$

de donde: $|2k-9|=11 \leftrightarrow 2k-9=11$ ó $2k-9=-11$

$\leftrightarrow k=10$ ó $k=-1$

Ejemplo 6. Los vértices de un triángulo son A(2,-1), B(4,2) y $C \in L=\{(x,y)/y=x-2\}$. Si su área es $5u^2$, hallar la suma de las ordenadas de todos los posibles valores del vértice C.

Solución. Si $C(x,y) \in L \rightarrow C(x,x-2)$

Sean: $\vec{a} = \overline{AC} = \vec{C}-\vec{A} = (x-2,x-1)$

y $\vec{b} = \overline{AB} = \vec{B}-\vec{A} = (2,3)$

$S = \frac{1}{2}|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| \rightarrow 5 = \frac{1}{2}|(x-2).(-3,2)|$

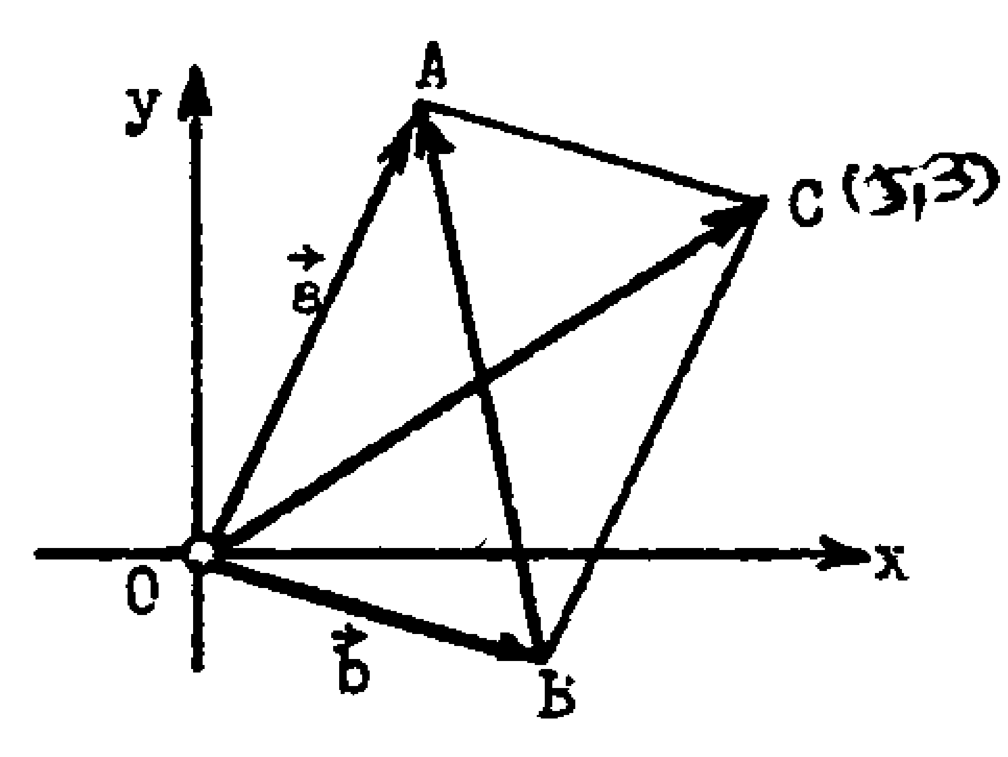
de donde: $|4-x|=10 \leftrightarrow 4-x=10$ ó $4-x=-10$

$\leftrightarrow x=-6$ ó $x=14$

Luego, hay dos soluciones: C(-6,-8) ó C(14,12)

Por tanto, la suma de las ordenadas es: $y_1+y_2=4$

Ejemplo 7. En la figura: OACB es un paralelogramo. Si $\overline{OC}=(5,3)$ y $\overline{BA}=(-1,5)$, hallar el área del triángulo OAB.



Solución. Sean: $\overline{OA}=\vec{a}$ y $\overline{OB}=\vec{b}$

En el ΔOBA: $\vec{a} = \vec{b} + \overline{BA}$

En el ΔOAC: $\overline{OC} = \vec{a} + \vec{b}$

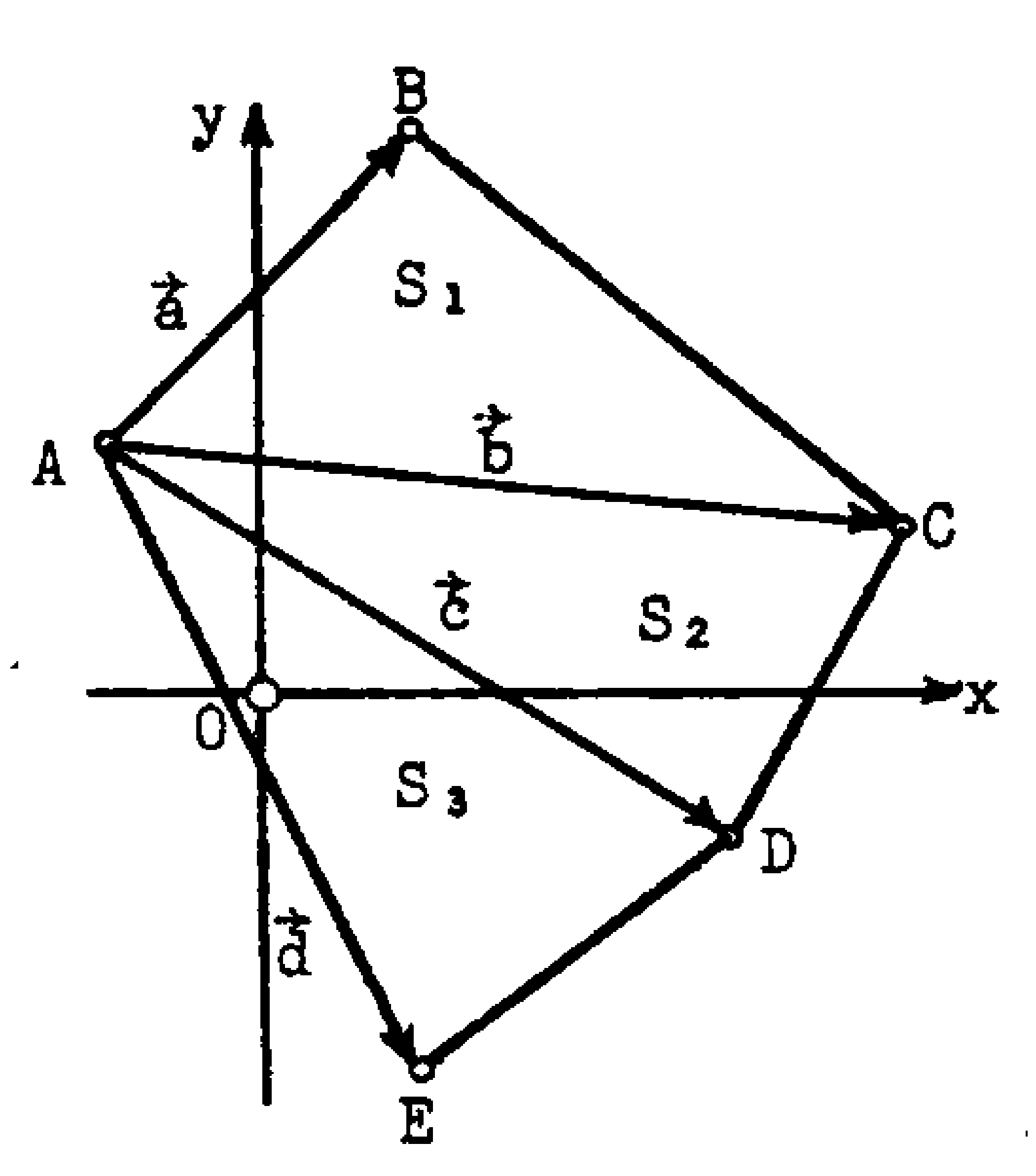
Del sistema de ecuaciones obtenemos: $\vec{a} = \frac{1}{2}(\overline{OC}+\overline{BA})$, $\vec{b} = \frac{1}{2}(\overline{OC}-\overline{BA})$

Luego: $\vec{a}=(2,4)$ y $\vec{b}=(3,-1) \rightarrow \vec{b}^{\perp}=(1,3)$

Si $S = \frac{1}{2}|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| \rightarrow a(\Delta OAB) = \frac{1}{2}|(2,4).(1,3)| = 7u^2$

Ejemplo 8. Hallar el área del polígono de vértices en A(-2,3), B(2,7), C(8,2), D(6,-2) y E(2,-5).

Solución. Dividamos el polígono en tres triángulos de áreas S_1, S_2 y S_3. Tomando el vértice A como punto inicial de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$, se tiene:



$\vec{a} = \overline{AB} = (2,7)-(-2,3) = (4,4)$

$\vec{b} = \overline{AC} = (8,2)-(-2,3) = (10,-1)$

$\vec{c} = \overline{AD} = (6,-2)-(-2,3) = (8,-5)$

$\vec{d} = \overline{AE} = (2,-5)-(-2,3) = (4,-8)$

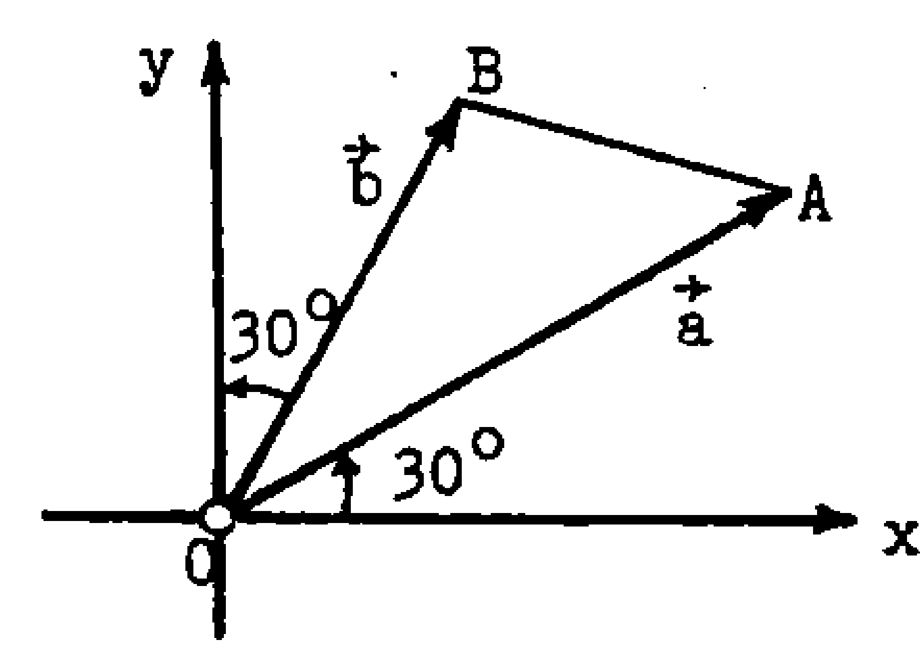
$S_1 = \frac{1}{2}|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| = \frac{1}{2}|(4,4).(1,10)| = 22u^2$

$S_2 = \frac{1}{2}|\vec{c}.\vec{b}^{\perp}| = \frac{1}{2}|(8,-5).(1,10)| = 21u^2$

$S_3 = \frac{1}{2}|\vec{c}.\vec{d}^{\perp}| = \frac{1}{2}|(8,-5).(8,4)| = 22u^2$

$\therefore\ S = S_1 + S_2 + S_3 = 65u^2$

Ejemplo 9. En la figura: $a(\Delta OAB)=10$, $||\vec{a}||=5$. Si $\vec{b}=(p,q)$, hallar el valor de $\sqrt{3}q+p$.



Solución. $\vec{a} = ||\vec{a}||(\text{Cos}30^\circ,\text{Sen}30^\circ)$

$\rightarrow \vec{a} = \frac{5}{2}(\sqrt{3},1)$

$a(\Delta OAB)=10 \rightarrow \frac{1}{2}|\vec{a}^{\perp}.\vec{b}| = 10 \leftrightarrow \frac{5}{4}(-1,\sqrt{3}).(p,q) = 10$

$\leftrightarrow -p + \sqrt{3}q = 8 \qquad (1)$

$\vec{b} = ||\vec{b}||(\text{Cos}60^\circ,\text{Sen}60^\circ) \rightarrow (p,q) = \sqrt{p^2+q^2}(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

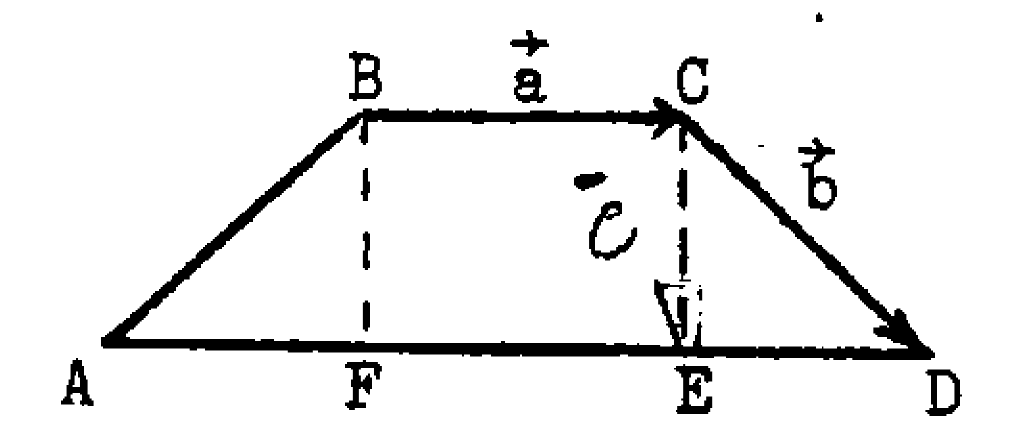
Por igualdad de las primeras componentes se tiene que:

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2} \rightarrow q = \sqrt{3}p \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos: $p=4$ y $q=4\sqrt{3}$

$$\therefore\ \sqrt{3}q+p = 16$$

Ejemplo 10. La figura es un trapecio isósceles, en donde: $\vec{a}=(1,3)$ y $\vec{b}=(5,-1)$. Hallar su área.



Solución. Sean: $\vec{c} = CE = Proy_{\vec{a}^{\perp}}\vec{b}$, S_1=a(BCEF) y S_2=a(ΔCED)

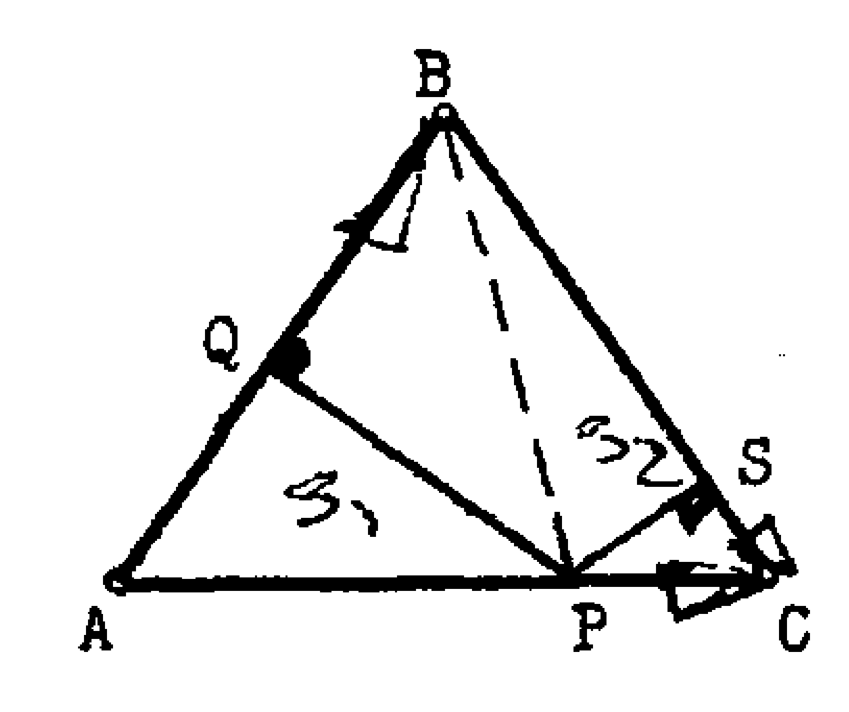
$$\rightarrow \vec{c} = \left(\frac{\vec{a}^{\perp}.\vec{b}}{||\vec{a}^{\perp}||^2}\right)\vec{a}^{\perp} = \left[\frac{(-3,1).(5,-1)}{10}\right](-3,1) = \frac{8}{5}(3,-1)$$

$$S_1 = |\vec{a}.\vec{c}^{\perp}| = \frac{8}{5}|(1,3).(1,3)| = 16u^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2}|\vec{b}.\vec{c}^{\perp}| = (\frac{1}{2})(\frac{8}{5})|(5,-1).(1,3)| = \frac{8}{5}\ u^2$$

$$\therefore\ S = S_1+2S_2 = 16 + \frac{16}{5} = 19.2u^2$$

Ejemplo 11. En el triángulo isósceles ABC, hallar: $||\overline{PQ}||+||\overline{PS}||$, si el área del ΔABC es $14u^2$ y $||\overline{AB}||=||\overline{BC}||=4$.



Solución. Sean: S_1=a(ΔAPB) y S_2=a(ΔBPC)

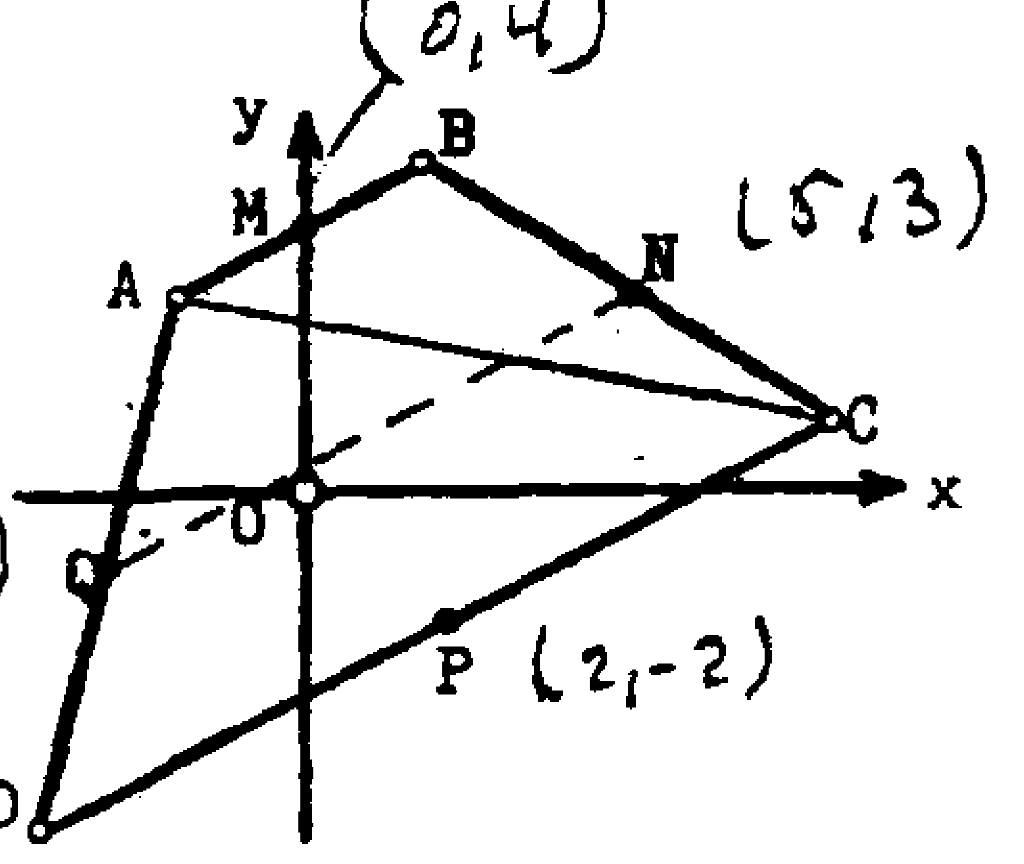
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{||\overline{BC}||\times||\overline{PS}||}{||\overline{AB}||\times||\overline{PQ}||} = \frac{||\overline{PS}||}{||\overline{PQ}||}$$

$$\rightarrow \frac{S_2 + S_1}{S_1} = \frac{||\overline{PQ}||+||\overline{PS}||}{||\overline{PQ}||} \rightarrow \frac{14}{S_1} = \frac{||\overline{PS}||+||\overline{PQ}||}{||\overline{PQ}||}$$

Pero: $S_1 = \frac{1}{2}(||\overline{AB}||\times||\overline{PQ}||) = \frac{1}{2}(4\times||\overline{PQ}||) = 2||\overline{PQ}||$

Luego: $\frac{14}{2||\overline{PQ}||} = \frac{||\overline{PS}||+||\overline{PQ}||}{||\overline{PQ}||}$, de donde: $||\overline{PS}||+||\overline{PQ}||=7$

Ejemplo 12. En la figura: M=(0,4), N=(5,3), P=(2,-2) y Q(-3,-1) son puntos medios de los lados de un trapecio ABCD. Hallar su área sabiendo que $||\overline{AB}||=2\sqrt{5}$.



Solución. Por geometría elemental sabemos que: $\overline{QN}||\overline{AB}||\overline{DC}$.

Luego, si: $\overline{QN}$ = N-Q = (5,3)-(-3,-1)=(8,4)

Entonces, un vector unitario en la dirección de $\overline{AM}||(2,1)$ es:

$$\vec{u} = \frac{\overline{AM}}{||\overline{AM}||} \rightarrow \overline{AM} = ||\overline{AM}||\vec{u} = \sqrt{5}\ \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = (2,1)$$

$$\rightarrow M-A = (2,1) \leftrightarrow A=(0,4)-(2,1)=(-2,3)$$

$$M = \frac{1}{2}(A+B) \rightarrow B=2M-A = 2(0,4)-(-2,3) = (2,5)$$

$$N = \frac{1}{2}(B+C) \rightarrow C=2N-B = 2(5,3)-(2,5) = (8,1)$$

$P = \frac{1}{2}(C+D) \rightarrow D=2P-C = 2(2,-2)-(8,1) = (-4,-5)$

Entonces: $\overline{AB}=(2,5)-(-2,3)=(4,2)$; $\overline{AC}=(8,1)-(-2,3)=(10,-2)$
$\overline{DA}=(-2,3)-(-4,-5)=(2,8)$

$\therefore\ S = a(\Delta DAC)+a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|\overline{DA}.\overline{AC}^{\perp}| + \frac{1}{2}|\overline{AB}.\overline{AC}^{\perp}|$

$= \frac{1}{2}|(2,8).(2,10)| + \frac{1}{2}|(4,2).(2,10)| = 56u^2$

Ejemplo 13. Tres vértices consecutivos de un rectángulo ABCD son $A=(-8,4)$, $B=(2,-2)$ y $C=(5,3)$. Si $P\varepsilon\overline{AB}$, $Q\varepsilon\overline{CD}$, $R\varepsilon\overline{AD}$, $\overline{PQ}||\vec{a}=(7,6)$ y $\overline{PQ}+\overline{PR}=(5/3,31/3)$; hallar el vértice D, los puntos P, Q y R, y el área del cuadrilátero PRDQ.

Solución. Tenemos: $\overline{BA}=(-8,4)-(2,-2)=2(-5,3)$
Pero: $\overline{CD}=\overline{BA}$

$\rightarrow D=C+\overline{BA}=(5,3)+2(-5,3) = (-5,9)$

Si $\overline{PQ}||\vec{a} \rightarrow \overline{PQ} = r(7,6)$

$\rightarrow Q-P = r(7,6)$ (1)

$\overline{AP} = t\overline{BA} \rightarrow P = A + t\overline{BA}$

$\rightarrow P = (-8,4) + t(-5,3)$ (2)

$\overline{DQ} = s\overline{CD} \rightarrow Q = D + s(-5,3)$

$\rightarrow Q = (-5,9) + s(-5,3)$ (3)

Restando (3)-(2) obtenemos:

$Q-P = (3,5) + (s-t)(-5,3)$

Luego, en (1):

$r(7,6)=(3,5)+(s-t)(-5,3) \leftrightarrow r(7,6)+(s-t)(5,-3)=(3,5)$

Multiplicando escalarmente por $(5,-3)^{\perp}$ y luego por $(7,6)^{\perp}$ se tiene respectivamente: $r=2/3$ y $s-t=-1/3$

Si $\overline{PQ}+\overline{PR} = (\frac{5}{3},\frac{31}{3}) \rightarrow \overline{PR} = (\frac{5}{3},\frac{31}{3}) - \frac{2}{3}(7,6) = (-3,\frac{19}{3})$

$\rightarrow R-P = (-3,\frac{19}{3})$ (4)

Pero: $\overline{AR}=k\overline{AD} \rightarrow R = A+k\overline{AD} = (-8,4)+k(3,5)$ (5)

Restando (5)-(2) se tiene: $R-P = k(3,5)-t(-5,3) = (-3,19/3)$

de donde obtenemos: $k=2/3$ y $t=-1 \rightarrow s=-1-1/3=-4/3$

Por tanto: $P = (-8,4)-1(-5,3) = (-3,1)$

$Q = (-5,9) - \frac{4}{3}(-5,3) = (\frac{5}{3},5)$; $R = (-8,4) + \frac{2}{3}(3,5) = (-6,\frac{22}{3})$

Area del cuadrilátero: $a(PRDQ) = a(\Delta PRD) + a(\Delta PQD)$

$\therefore\ a(PRDQ) = \frac{1}{2}|\overline{PR}.\overline{PD}^{\perp}| + \frac{1}{2}|\overline{PQ}.\overline{PD}^{\perp}|$

$= \frac{1}{2}|(-3,\frac{19}{3}).(-8,-2)| + \frac{1}{2}|(\frac{14}{3},4).(-8,-2)| = 85/3\ u^2$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4, hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos dados:

1. A(-5,0) , B(1,3) , C(-3,-2) — Rp. $S=9u^2$
2. A(-3,4) , B(6,2) , C(4,-3) — Rp. $S=24.5u^2$
3. A(2,-3) , B(4,2) , C(-5,-2) — Rp. $S=10.5u^2$
4. A(-1,2) , B(3,5) , C(5,1) — Rp. $S=11u^2$

En los ejercicios del 5 al 8 se dan tres vértices consecutivos de un paralelogramo, hallar las coordenadas del cuarto vértice y el área de cada paralelogramo.

5. A(4,-5) , B(-2,3) , C(-3,1) — Rp. D(3,-5), $S=20u^2$
6. A(-1,-2) , B(0,1) , C(-3,2) — Rp. D(-4,-1), $S=10u^2$
7. A(-1,-5) , B(2,1) , C(1,5) — Rp. D(-2,-1), $S=10u^2$
8. A(2,4) , B(6,2) , C(8,6) — Rp. D(4,8), $S=20u^2$

En los ejercicios del 9 al 12, hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son los vectores dados:

9. $\vec{u} = (-2,3)$, $\vec{v} = (6,-1)$ — Rp. $S=8u^2$
10. $\vec{u} = (5,-4)$, $\vec{v} = (-1,-8)$ — Rp. $S=24u^2$
11. $\vec{u} = (11,-1)$, $\vec{v} = (-2,4)$ — Rp. $S=21u^2$
12. $\vec{u} = (2,10)$, $\vec{v} = (5,-2)$ — Rp. $S=27u^2$

En los ejercicios del 13 al 15, hallar el área de los polígonos cuyas coordenadas de sus vértices son:

13. A(2,5) , B(7,1) , C(3,-4) y D(-2,3) — Rp. $S=39.5u^2$
14. A(1,5), B(-2,4), C(-3,-1), D(2,-3) y E(5,1) — Rp. $S=40u^2$

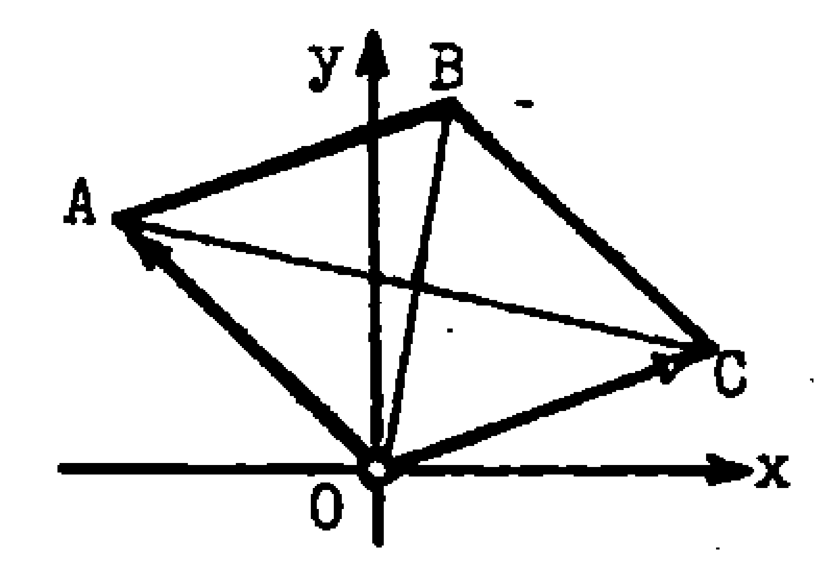
15. A(-5,-2), B(-2,5), C(2,7), D(5,1) y E(2,-4) Rp. $S=66u^2$

16. Dados los puntos A(2,-1), B(-2,3) y C(4,3). Si P(x,y) divide al segmento $\overline{BC}$ en la razón $\overline{BP}:\overline{PC}=-2:5$, hallar el área del triángulo PCB. Rp. $S=10u^2$

17. Dados los puntos A(-3,-5), B(3,1) y C(2,5). Si P(x,y) es el punto de trisección, más cercano de A, del segmento $\overline{AB}$, calcular el área del triángulo PCB. Rp. $S=10u^2$

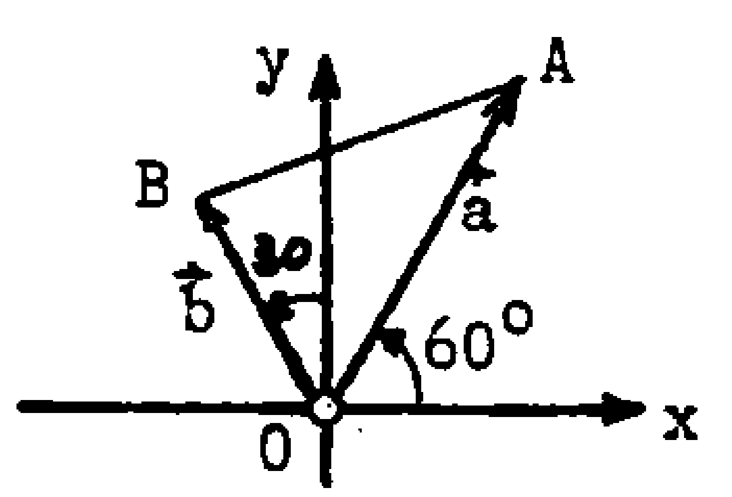
18. Los vértices de un triángulo son A(3,-1), B(1,k) y C(5,2). Hallar la ordenada del vértice B sabiendo que el área del triángulo es de $6u^2$. Rp. k=2 ó k=-10

19. En la figura:
OABC es un paralelogramo. Si $\overline{OB}=(1,6)$ y $\overline{AC}=(9,-2)$, hallar el área del triángulo ABC. Rp. $S=14u^2$



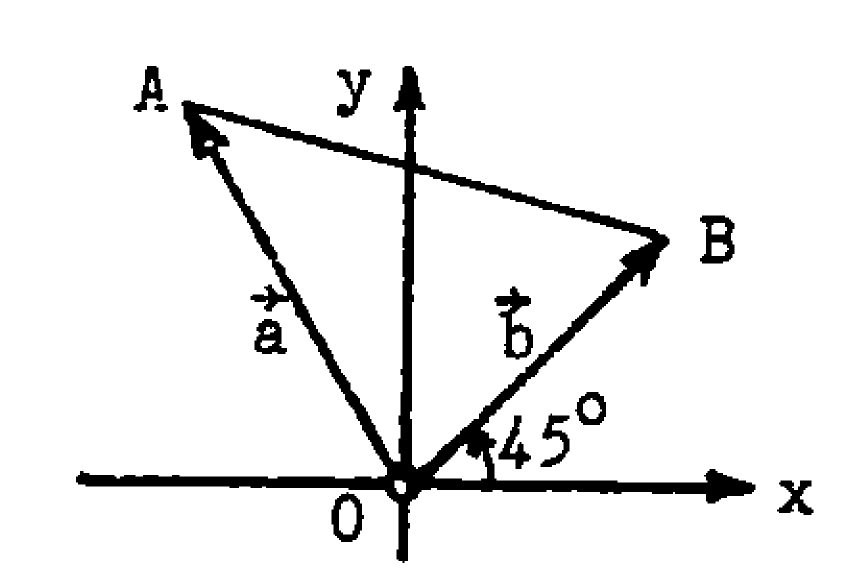
20. Los vértices de un triángulo son A(3,-5), B(2,5) y C pertenece a $L=\{(x,y)/y=-2x\}$. Si su área es de $3.5u^2$, hallar las coordenadas del vértice C. Rp. C(4,-8) ó C(9/4,-9/2)

21. En la figura:
$a(\Delta OAB)=15u^2$ y $||\vec{a}||=10$. Si $\vec{b}=(m,n)$ hallar el valor de: 3m+n. Rp. 0



22. Los vértices de un triángulo son A(x,y), B(4,3) y C(-2,6). Si el área del triángulo es de $9u^2$ y $A\in L=\{(x,y)/x-2y=4\}$, hallar las coordenadas del vértice A. Rp. A(10,3) ó A(4,0)

23. En la figura:
$a(\Delta OAB)=12u^2$, $||\vec{b}||=2\sqrt{2}$. Si $Proy_{\vec{b}^\perp}\vec{a}=(x,y)$, hallar el valor de: x.y. Rp. -36



1.21 DEPENDENCIA LINEAL

Se dice que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}\in R^2$, son *linealmente dependientes* si uno de ellos es múltiplo escalar del otro; es decir, si $\vec{a}=r\vec{b}$ ó $\vec{b}=r\vec{a}$ para un escalar r.
En consecuencia, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente dependientes precisamente cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales. (Fig. 17)

Figura 17

(Vectores linealmente dependientes)

1.22 INDEPENDENCIA LINEAL

Se dice que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}\in R^2$, son *linealmente independientes* si y sólo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son linealmente dependientes , esto es, cuando los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales. (Fig. 18).

Figura 18
(Vectores linealmente independientes)

1.23 CRITERIO DE INDEPENDENCIA LINEAL

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}\in R^2$, son linealmente independientes si se verifican las condiciones siguientes:

Si: $$s\vec{a} + t\vec{b} = \theta \rightarrow s=0 \text{ y } t=0 \qquad (24)$$

PROPOSICION 1.4 Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes si y sólo si $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$.

Demostración. (→) Demostraremos primero que si $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes.
En efecto, supongamos que $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ y que $s\vec{a}+t\vec{b}=\theta$.
Al dividir ambos miembros de esta igualdad entre s ó t, se tiene

$$\vec{a} = -(\tfrac{t}{s})\vec{b} \quad ó \quad \vec{b} = -(\tfrac{s}{t})\vec{a}$$

Esto es: $\vec{a} = r\vec{b}$ ó $\vec{b} = k\vec{a}$

Por lo que: $\vec{a} \| \vec{b}$

($\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente dependientes) lo que contradice la hipótesis.

En consecuencia, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes.

($\leftarrow$) Demostraremos que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes entonces: $\vec{a} \not\| \vec{b}$.

En efecto, supongamos que $\vec{a} \| \vec{b}$, $\vec{a} \neq \theta$ y $\vec{b} \neq \theta$ $\rightarrow$ $\exists r \neq 0 / \vec{a} = r\vec{b}$

lo que significa que: $\vec{a} + (-r)\vec{b} = \theta$

Se ha logrado una combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ igual a θ con coeficientes 1 y -r que son diferentes de cero, lo cual contradice la condición (24). Esto significa que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente dependientes, lo que contradice nuevamente la hipótesis.

En consecuencia: $\vec{a} \not\| \vec{b}$.

1.23 REGLA DE COMPARACION DE COEFICIENTES

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores linealmente independientes para los cuales se cumple:

$$s\vec{a} + t\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

y que se puede expresar como:

$$(s-m)\vec{a} + (t-n)\vec{b} = \theta$$

Según la ecuación (24) ocurre que: s-m=0 y t-n=0, esto es: s=m y t=n, por lo que podemos afirmar que:

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, y si:

$$s\vec{a} + t\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b} \rightarrow \begin{cases} s = m \\ t = n \end{cases} \qquad (25)$$

Ejemplo 1. Hallar los valores de k para que los vectores: $\vec{a}=(-7,k+2)$ y $\vec{b}=(1-2k,1)$ sean linealmente independientes.

Solución. Sabemos que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente dependientes $\leftrightarrow$ $\vec{a} \| \vec{b}$, o bien: $\vec{a}.\vec{b}^{\perp}=0$

Entonces: $(-7,k+2).(-1,1-2k)=0 \leftrightarrow 7+(k+2)(1-2k)=0$

de donde: $2k^2+3k-9=0 \leftrightarrow k=-3$ ó $k=3/2$

Luego, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes si y sólo si: $k\neq-3$ y $k\neq3/2$, esto es:

$$k\in R-\{-3,3/2\}$$

Ejemplo 2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores linealmente independientes. Para qué valores de k tendremos que $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$ y $\vec{d}=k\vec{a}+4\vec{b}$ son linealmente independientes.

Solución. Debemos hallar números s y t, que no sean simultáneamente cero, de modo que:

$$s(3\vec{a}-2\vec{b})+t(k\vec{a}+4\vec{b})=\theta \leftrightarrow (3s+t)\vec{a} + (4t-2s)\vec{b} = \theta$$

Por la ecuación (24), la independencia lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ implica que: $3s+kt=0$ y $4t-2s=0$

De la segunda ecuación se tiene: $s=2t$, y en la primera ecuación implica que:

$$6k+kt=0 \rightarrow t(6+k)=0 \leftrightarrow t=0 \text{ ó } k=-6$$

Pero como t y s no son ambos cero, entonces los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son linealmente independientes si $k=-6$.

PROPOSICION 1.5 (Teorema de las Bases). Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores linealmente independientes del plano, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base de los vectores del plano.

Demostración. Sean $\vec{a}=OQ$, $\vec{b}=OR$ y $\vec{c}=OP$

Por hipótesis $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, entonces OQ y OR no son colineales. Por P tracemos paralelas a OQ y OR de modo que intercepten a sus prolongaciones en M y N respectivamente (Figura 19).

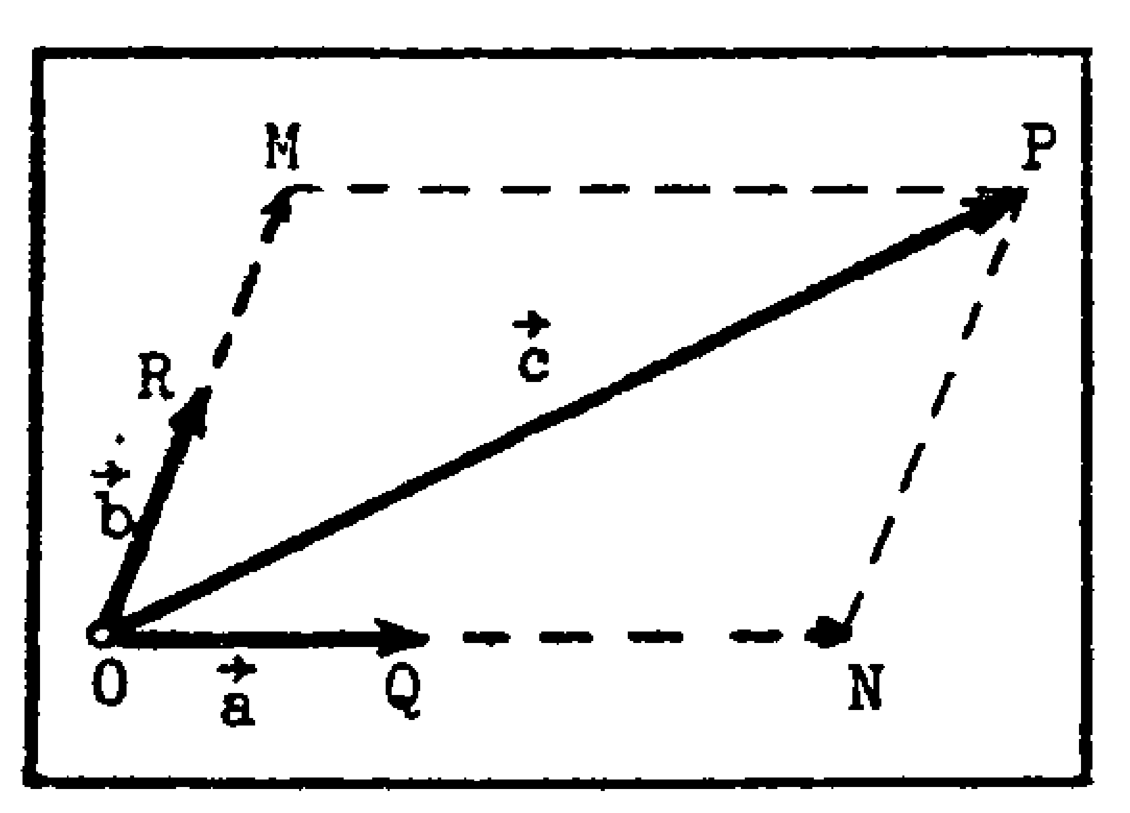


Figura 19

Luego se tiene: $ON=s\vec{a}$ y $OM=t\vec{b}$

Pero como $OP=ON+NP=ON+OM$, entonces:

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

lo que nos permite afirmar que $\vec{c}$ se representa como una única combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y genera el espacio vectorial R^2.

En síntesis podemos decir que, dado dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^2, entonces: $\vec{a}\not\parallel\vec{b} \leftrightarrow \{\vec{a},\vec{b}\}$ es una base del espacio R^2.

La demostración anterior nos sugiere la siguiente definición.

DEFINICION 7. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constituyen una *base* de los vectores del plano si, todo vector $\vec{c}$ del plano se puede expresar de manera única como una combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Es decir:

$$\vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ generan a } R^2 \leftrightarrow \forall c \in R^2,\ \exists s,t \in R /\ \vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

En efecto, al multiplicar la última igualdad por $\vec{a}^\perp$ y $\vec{b}^\perp$ ocurre que:

$$\vec{a}^\perp . \vec{c} = t(\vec{a}^\perp . \vec{b}) \rightarrow t = \frac{\vec{a}^\perp . \vec{c}}{\vec{a}^\perp . \vec{b}}$$

$$\vec{b}^\perp . \vec{c} = s(\vec{b}^\perp . \vec{a}) \rightarrow s = \frac{\vec{b}^\perp . \vec{c}}{\vec{b}^\perp . \vec{a}}$$

Por tanto:

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{b}^\perp . \vec{c}}{\vec{b}^\perp . \vec{a}}\right)\vec{a} + \left(\frac{\vec{a}^\perp . \vec{c}}{\vec{a}^\perp . \vec{b}}\right)\vec{b} \qquad (26)$$

Observaciones. (1) Un vector no nulo se puede expresar no solamente como una combinación lineal de dos vectores ortogonales $\vec{a}$ y $\vec{a}^\perp$, sino que $\vec{a}^\perp$ se puede reemplazar por cualquier otro vector que cumpla la condición de no ser paralelo a $\vec{a}$.

(2) Los números s y t de la ecuación (26) se denominan *coordenadas* del vector $\vec{c}$ en la base $\mathcal{B}=\{\vec{a},\vec{b}\}$.
La notación (26), se denomina, además, descomposición del vector $\vec{c}$ según la base $\mathcal{B}=\{\vec{a},\vec{b}\}$.

(3) A manera de una generalización podemos decir que:
Un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n\}$ de un espacio vectorial R^n es una base para este espacio vectorial si se cumplen las condiciones siguientes:
a) $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3, \ldots,\vec{a}_n$ son linealmente independientes.
b) $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3, \ldots,\vec{a}_n$ generan el espacio vectorial R^n.
Si el vector $\vec{a}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots,\vec{a}_n$, con coeficientes $\lambda_1,\lambda_2, \ldots,\lambda_n$, es decir:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$$

entonces cada coordenada $X_i(\vec{a})$ del vector $\vec{a}$ es igual a la suma de los productos de los coeficientes $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, por las coordenadas homónimas de los vectores $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$.

Esto es: $X_i(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_i(\vec{a}_k)$, $i=1,2,3,\ldots$

DEFINICION 8. Se denomina proyección del vector $\vec{c}$ sobre el vector $\vec{a}$ según la dirección $\vec{b}$ al vector:

$$\text{Proy}_{(\vec{a},\vec{b})}\vec{c} = \left(\frac{\vec{b}^{\perp}.\vec{c}}{\vec{b}^{\perp}.\vec{a}}\right)\vec{a} \qquad (27)$$

Aplicando esta definición a la ecuación (26), ocurre que:

$$\vec{c} = \text{Proy}_{(\vec{a},\vec{b})}\vec{c} + \text{Proy}_{(\vec{b},\vec{a})}\vec{c} \qquad (28)$$

Ejemplo 3. Expresar el vector $\vec{c}=(4,-5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(-2,3)$ y $\vec{b}=(3,-1)$.

Solución. Hallemos las coordenadas (s,t) de $\vec{c}$ según la base $\{\vec{a},\vec{b}\}$. Aplicando (26) se tiene:

$$s = \frac{\vec{b}^{\perp}.\vec{c}}{\vec{b}^{\perp}.\vec{a}} = \frac{(1,3).(4,-5)}{(1,3).(-2,3)} = -\frac{11}{7} \; ; \; t = \frac{\vec{a}^{\perp}.\vec{c}}{\vec{a}^{\perp}.\vec{b}} = \frac{(-3,-2).(4,-5)}{(-3,-2).(3,-1)} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore \; \vec{c} = -\frac{11}{7}(-2,3) + \frac{2}{7}(3,-1)$$

Ejemplo 4. Si $\vec{c}=(4,-5)$, $\vec{a}=(-2,3)$ y $\vec{b}=(3,-1)$, hallar $\text{Proy}_{(\vec{a},\vec{b})}\vec{c}$ y $\text{Proy}_{(\vec{b},\vec{a})}\vec{c}$, y verificar la ecuación (28)

Solución. Utilizando los resultados del ejemplo anterior se tiene: $\text{Proy}_{(\vec{a},\vec{b})}\vec{c} = -\frac{11}{7}(-2,3)$ y $\text{Proy}_{(\vec{b},\vec{a})}\vec{c} = \frac{2}{7}(3,-1)$

En consecuencia: $\vec{c} = -\frac{11}{7}(-2,3) + \frac{2}{7}(3,-1) = (4,-5)$

Ejemplo 5. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores linealmente independientes y como tal, susceptibles de formar una base. Demostrar que $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ y $\vec{d}=2\vec{a}-5\vec{b}$ también forman una base.

Demostración. En efecto, verificaremos que $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son linealmente independientes, aplicando (24).

Si $s\vec{c} + t\vec{d} = \theta \rightarrow s(3\vec{a}-2\vec{b}) + t(2\vec{a}-5\vec{b}) = \theta$

$\rightarrow (3s-2t)\vec{a} + (2s-5t)\vec{b} = \theta$

Pero por hipótesis, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes; luego,

aplicando de nuevo (24) se tiene: $3s+2t=0$ y $2s-5t=0$

La resolución del sistema nos da: $s=t=0$

Por tanto, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son linealmente independientes.

Ejemplo 6. Fijado el vector $\vec{c}$ en R^2, entonces $\vec{c}$ es expresable en forma única, como la combinación lineal de los siguientes pares de vectores:

(1) $\vec{a}=(-3,2)$ y $\vec{b}=(-2,3)$ (3) $\vec{a}=(3/5,1)$ y $\vec{b}=(-1,5/3)$

(2) $\vec{a}=(2/3,1/5)$ y $\vec{b}=(-1,-3/10)$ (4) $\vec{a}=(\sqrt{2}/3,4/3)$ y $\vec{b}=(3/2,3\sqrt{2})$

Establecer el valor de verdad de cada afirmación.

Solución. Sabemos que: $\forall c\in R^2,\ \exists s,t\in R/\ \vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b} \leftrightarrow \vec{a}\nparallel\vec{b}$

Veremos entonces si cada par de vectores dados son paralelos.

(1) $\vec{a} = r\vec{b} \rightarrow (-3,2) = r(-2,3) \leftrightarrow \begin{cases} -3=-2r \rightarrow r=3/2 \\ 2=3r \rightarrow r=2/3 \end{cases}$

Luego, $\nexists! r\in R$ tal que $\vec{a}=r\vec{b} \rightarrow \vec{a}\nparallel\vec{b}$ $\therefore$ Es verdadera

(2) $\vec{a} = r\vec{b} \rightarrow (\frac{2}{3},\frac{1}{5}) = r(-1,-\frac{3}{10}) \leftrightarrow \begin{cases} 2/3 = -r \rightarrow r=-2/3 \\ 1/5 = (-3/10)r \rightarrow r=-2/3 \end{cases}$

Luego, $\exists! r\in R$ tal que $\vec{a}=r\vec{b} \rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$ $\therefore$ Es falsa

(3) $\vec{a} = r\vec{b} \rightarrow (\frac{3}{5},1) = r(-1,\frac{5}{3}) \leftrightarrow \begin{cases} 3/5 = -r \rightarrow r=-3/5 \\ 1 = (5/3)r \rightarrow r=3/5 \end{cases}$

Luego, $\nexists! r\in R$ tal que $\vec{a}=r\vec{b} \rightarrow \vec{a}\nparallel\vec{b}$ $\therefore$ Es verdadera

(4) $\vec{a}.\vec{b}^{\perp} = (\sqrt{2}/3,4/3).(-3\sqrt{2},3/2) = -2+2 = 0$

Si $\vec{a}.\vec{b}^{\perp}=0 \rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$ $\therefore$ Es falsa.

Ejemplo 7. Sean $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$, $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2\}$ bases de R^2 y $\vec{a}=2\vec{b}_1-3\vec{b}_2$. Si $\vec{a}_1=\vec{b}_1-2\vec{b}_2$, $\vec{a}_2=3\vec{b}_1+(1/2)\vec{b}_2$ y $\vec{a}=m\vec{a}_1+n\vec{a}_2$, hallar el valor de m-n.

Solución. Si $\vec{a}_1=\vec{b}_1-2\vec{b}_2 \rightarrow \vec{b}_1=\vec{a}_1+2\vec{b}_2$ (1)

$\vec{a}_2 = 3(\vec{a}_1+2\vec{b}_2) + \frac{1}{2}\vec{b}_2$, de donde: $\vec{b}_2 = -\frac{6}{13}\vec{a}_1 + \frac{2}{13}\vec{a}_2$

Sustituyendo en (1) obtenemos: $\vec{b}_1 = \frac{1}{13}\vec{a}_1 + \frac{4}{13}\vec{a}_2$

Entonces: $\vec{a} = 2(\frac{1}{13}\vec{a}_1 + \frac{4}{13}\vec{a}_2)-3(-\frac{6}{13}\vec{a}_1 + \frac{2}{13}\vec{a}_2) = \frac{20}{13}\vec{a}_1 + \frac{2}{13}\vec{a}_2$

Luego, si $\vec{a} = m\vec{a}_1 + n\vec{a}_2 \rightarrow m-n = \frac{18}{13}$

Ejemplo 8. Halle las fórmulas del cambio de base, siendo $\vec{u}_1=\vec{v}_1-\vec{v}_2$, $\vec{u}_2=3\vec{v}_1-5\vec{v}_2$, y determine las coordenadas del vector $\vec{u}$ respecto de la base $B'=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$, si respecto de la base $B=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ son $(2,-1)$.

Solución. Resolviendo el sistema de ecuaciones para $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ obtenemos: $\vec{v}_1 = \frac{5}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = \frac{3}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2$

Si $(2,-1)$ son las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base $B=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ entonces: $\vec{u} = 2\vec{u}_1-\vec{u}_2$.

Sean (s,t) las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de $B'=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$

$$\rightarrow \vec{u} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 = s(\tfrac{5}{2}\vec{u}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{u}_2) + t(\tfrac{3}{2}\vec{u}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{u}_2)$$

$$\rightarrow 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \tfrac{1}{2}(5s+3t)\vec{u}_1 - \tfrac{1}{2}(s+t)\vec{u}_2$$

Según (24): $2 = \frac{1}{2}(5s+3t) \rightarrow 5s+3t=4$

$$1 = \tfrac{1}{2}(s+t) \rightarrow s+t=2$$

De donde obtenemos: $s=-1$ y $t=3$. Luego, $(-1,3)$ son las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base B'.

Ejemplo 9. El vector $\vec{p}=(-5,2)$ se descompone en $\vec{p}_1 \| \vec{x}$ y $\vec{p}_2 \| \vec{y}$. El vector $\vec{q}=(2,1/2)$ se descompone en $\vec{q}_1 \| \vec{x}$ y $\vec{q}_2 \| \vec{y}$. Si $\vec{x}=(2,1)$ e $\vec{y}=(-2,-5)$; hallar el valor de $(\vec{p}_1+\vec{q}_1)\cdot(\vec{p}_2+\vec{q}_2)$.

Solución. Sèa: $\vec{p} = m\vec{x} + n\vec{y}$

$$\rightarrow (-5,2) = m(2,1)+n(-2,-3) \leftrightarrow \begin{cases} -5 = 2m-2n \\ 2 = m-3n \end{cases}$$

de donde: $m=-19/4$ y $n=-9/4 \rightarrow \vec{p}_1 = -\frac{19}{4}(2,1)$ y $\vec{p}_2 = -\frac{9}{4}(-2,-3)$

Si $\vec{q} = r\vec{x}+t\vec{y} \rightarrow (2,1/2) = r(2,1)+t(-2,-3) \leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2r-2t \\ 1/2 = r-3t \end{cases}$

de donde: $r=5/4$ y $t=1/4 \rightarrow \vec{q}_1 = \frac{5}{4}(2,1)$ y $\vec{q}_2 = \frac{1}{4}(-2,-3)$

Por tanto: $(\vec{p}_1+\vec{q}_1)\cdot(\vec{p}_2+\vec{q}_2) = (-\frac{7}{2})(-2)(2,1)\cdot(-2,-3) = 7(-4-3)$

$$= -49$$

Ejemplo 10. En el triángulo ABC se tiene: $\overline{AM}:\overline{MC}=3:4$. Si $\overline{BM}=r\overline{BA}+t\overline{BC}$, hallar el valor de r+t.

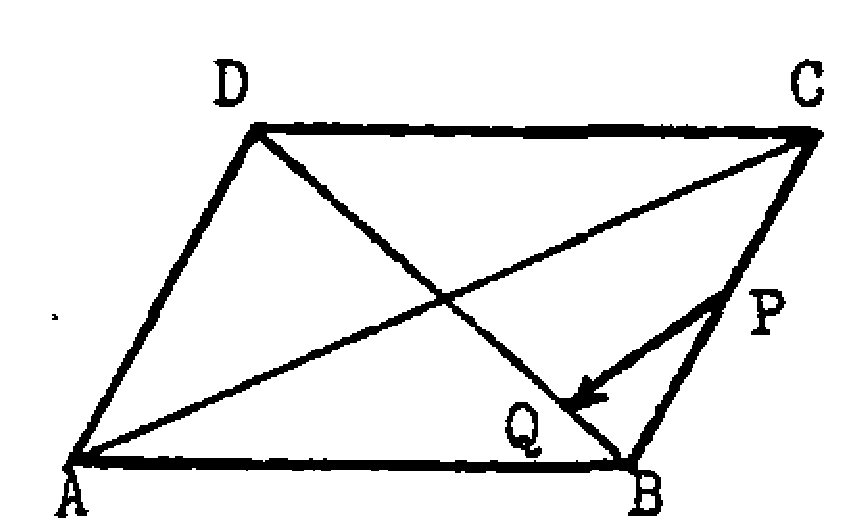
Solución. En el ΔABM:

$$\overline{BM} = \overline{AM}-\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{MC} - (-\overline{BA}) = \frac{3}{4}(\overline{BC}-\overline{BM}) + \overline{BA}$$

de donde: $\frac{7}{4}\overline{BM} = \frac{3}{4}\overline{BC} + \overline{BA} \rightarrow \overline{BM} = \frac{3}{7}\overline{BC} + \frac{4}{7}\overline{BA}$

Si $\overline{BM} = r\overline{BA} + t\overline{BC} \rightarrow r=4/7$ y $t=3/7$ $\quad\therefore r+t=1$

Ejemplo 11. En la figura se tiene el paralelogramo ABCD. Si P es punto medio de $\overline{CB}$, $\overline{QD}=7\overline{QB}$ y si $\overline{PQ}$ se escribe como una combinación lineal de $\overline{DC}$ y $\overline{AD}$, calcular la suma de los escalares.



Solución. Sea $\overline{PQ} = s\overline{DC} + t\overline{AD}$ (1)

En el ΔQBP: $\overline{PQ} = \overline{PB}-\overline{QB}$, pero: $\overline{PB} = \frac{1}{2}\overline{CB}$, $\overline{QB} = \frac{1}{7}\overline{QD}$

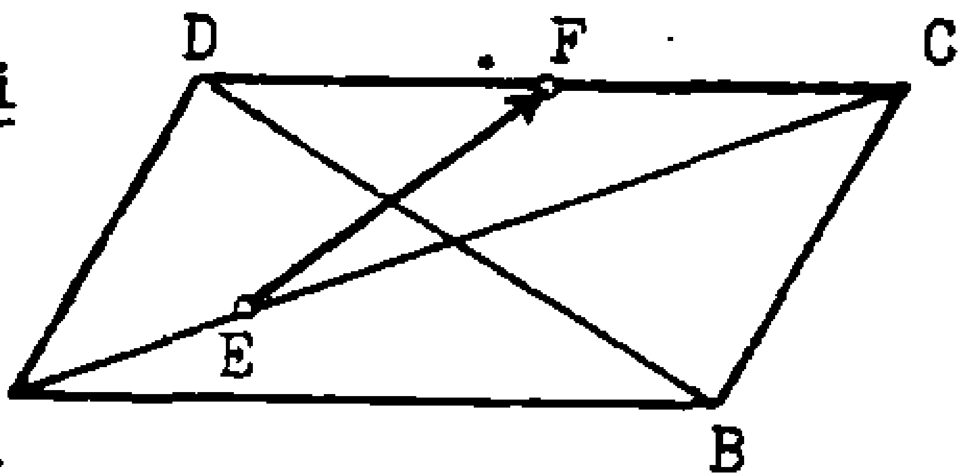
Entonces: $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{CB} - \frac{1}{7}\overline{QD} = \frac{1}{2}(-\overline{AD}) - \frac{1}{7}(\frac{7}{8}\overline{BD}) = \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{8}(-\overline{DB})$

$$= \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{8}(\overline{AB}-\overline{AD}) = \frac{1}{8}\overline{DC} - \frac{5}{8}\overline{AD}$$

Según (1): $s\overline{DC} + t\overline{AD} = \frac{1}{8}\overline{DC} - \frac{5}{8}\overline{AD} \leftrightarrow s=1/8$ y $t=-5/8$

$$\therefore s + t = -1/2$$

Ejemplo 12. En el paralelogramo de la figura: $\overline{AE} = \frac{1}{4}\overline{AC}$, $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{DC}$.
Si $\overline{EF}=m\overline{AB}+n\overline{AD}$, hallar el valor de n-m.



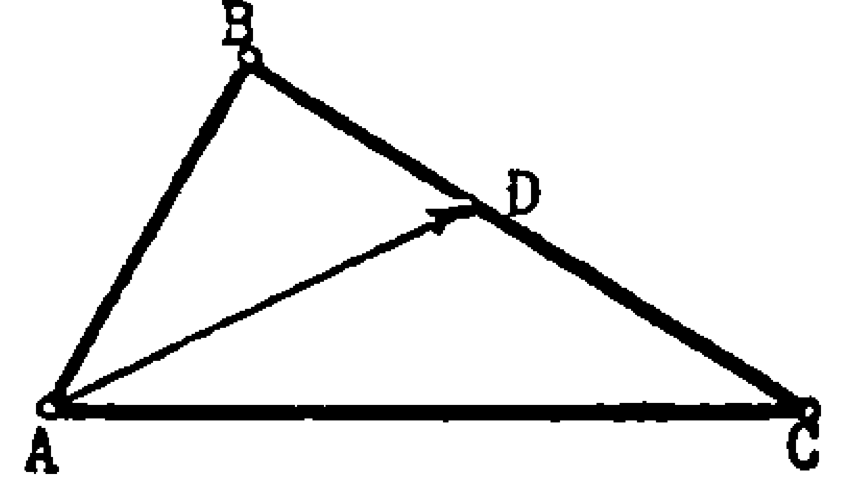
Solución. En el cuadrilátero ADFE:

$$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AD} + \overline{DF} = -\overline{AE} + \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC} = -\frac{1}{4}\overline{AC} + \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= -\frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

Como $\overline{BC} = \overline{AD} \rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{AD} = m\overline{AB} + n\overline{AD} \leftrightarrow m=1/4$ y $n=3/4$

$$\therefore n-m = 1/2$$



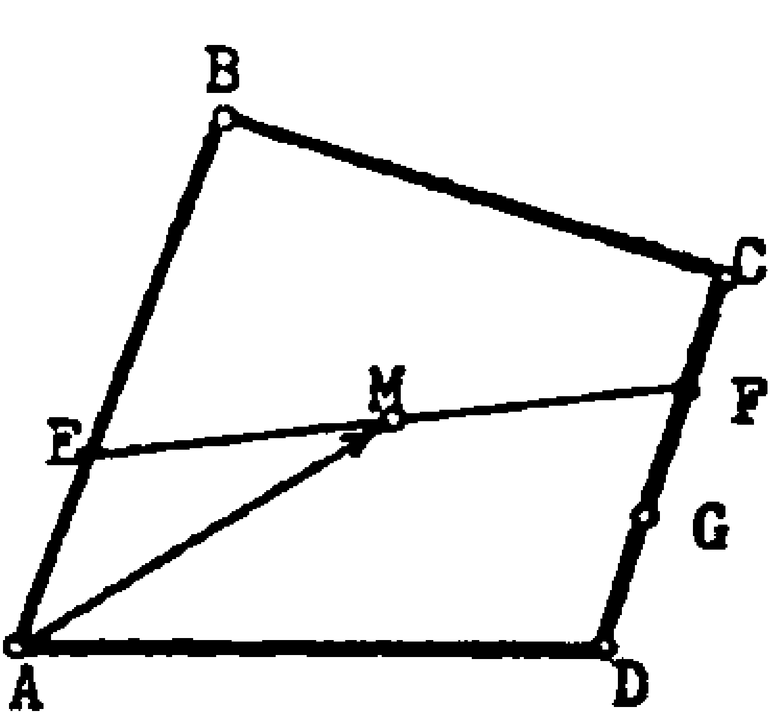
Ejemplo 13. En el triángulo ABC, las longitudes de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ son 3 y 5 respectivamente. Si $\overline{AD}=m\overline{AB}+n\overline{AC}$, hallar el valor de m+n.

Solución. En el ΔABD: $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$

$$\rightarrow \overline{AD} = \overline{AB} + \frac{3}{8}\overline{BC} = \overline{AB} + \frac{3}{8}(\overline{AC}-\overline{AB}) = \frac{5}{8}\overline{AB} + \frac{3}{8}\overline{AC}$$

Luego, si: $m\overline{AB} + n\overline{AC} = \frac{5}{8}\overline{AB} + \frac{3}{8}\overline{AC} \leftrightarrow \begin{cases} m = 5/8 \\ n = 3/8 \end{cases}$

$$\therefore\ m+n = 1$$



Ejemplo 14. Se tiene el cuadrilátero ABCD. Sabiendo que $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ y F y G son puntos de trisección de $\overline{CD}$ y M es punto medio de $\overline{EF}$. Al expresar $\overline{AM}$ como una combinación lineal de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, hallar la suma de todos los escalares.

Solución. Sea: $\overline{AM} = m\overline{AB} + n\overline{BC} + r\overline{CD}$

En el ΔAEM: $\overline{AM} = \overline{AE} + \overline{EM} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{EF}$

$$= \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CF})$$

$$= \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\overline{AB} + \overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{CD})$$

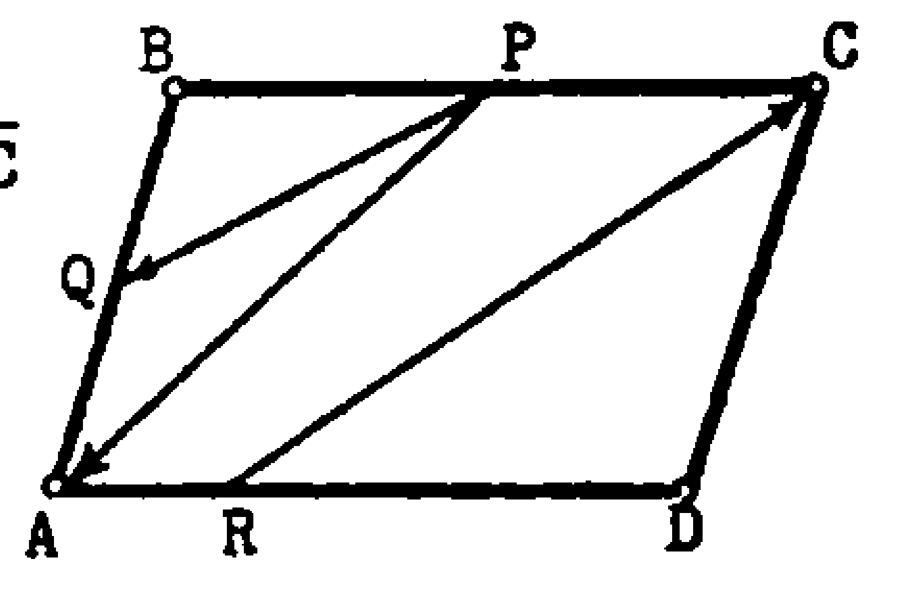
Luego, si: $m\overline{AB} + n\overline{BC} + r\overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{6}\overline{CD}$

$$\rightarrow (m-2/3)\overline{AB} + (n-1/2)\overline{BC} + (r-1/6)\overline{CD} = \theta$$

Como AB, BC y CD son linealmente independientes, entonces:

$$m-2/3=0\ ,\ n-1/2=0\ ,\ r-1/6=0 \leftrightarrow m=2/3\ ,\ n=1/2\ ,\ r=1/6$$

$$\therefore\ m+n+r = 4/3$$



Ejemplo 15. En el paralelogramo adjunto, P y Q son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente $\overline{RD}=3\overline{AR}$. Si $\overline{RC}$ se expresa como una combinación lineal de $\overline{PQ}$ y $\overline{PA}$, hallar el producto de los escalares.

Solución. Sea $\overline{RC} = m\overline{PQ} + n\overline{PA}$

En el ΔRDC: $\overline{RC} = \overline{RD} + \overline{DC} = \frac{3}{4}\overline{AD} + \overline{DC} = \frac{3}{4}\overline{BC} + \overline{AB}$

$$= \frac{3}{4}(2\overline{BP}) + 2\overline{AQ} = \frac{3}{2}(\overline{QP} - \overline{QB}) + 2\overline{AQ}$$

$$= \frac{3}{2}(\overline{QP} - \overline{AQ}) + 2\overline{AQ} = \frac{3}{2}\overline{QP} + \frac{1}{2}\overline{AQ}$$

$$= \frac{3}{2}\overline{PQ} + \frac{1}{2}(\overline{PQ} - \overline{PA}) = -\overline{PQ} - \frac{1}{2}\overline{PA}$$

Luego, si: $m\overline{PQ} + n\overline{PA} = -\overline{PQ} - \frac{1}{2}\overline{PA} \leftrightarrow m=-1$ y $n=-1/2$

$$\therefore\ mn = 1/2$$

Ejemplo 16. Sea ABCD un paralelogramo, M un punto sobre el lado BC. Si el área del ΔABM es igual a la mitad del área del cuadrilátero AMCD y AM=sDC+tAD, hallar el valor de s+3t.

Solución. Si $a(AMCD) = 2a(\Delta ABM)$
$\rightarrow a(ABCD) = 3a(\Delta ABM)$

Entonces: $(\overline{BC})h = \frac{3}{2}(\overline{BM})h \leftrightarrow \overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BC}$

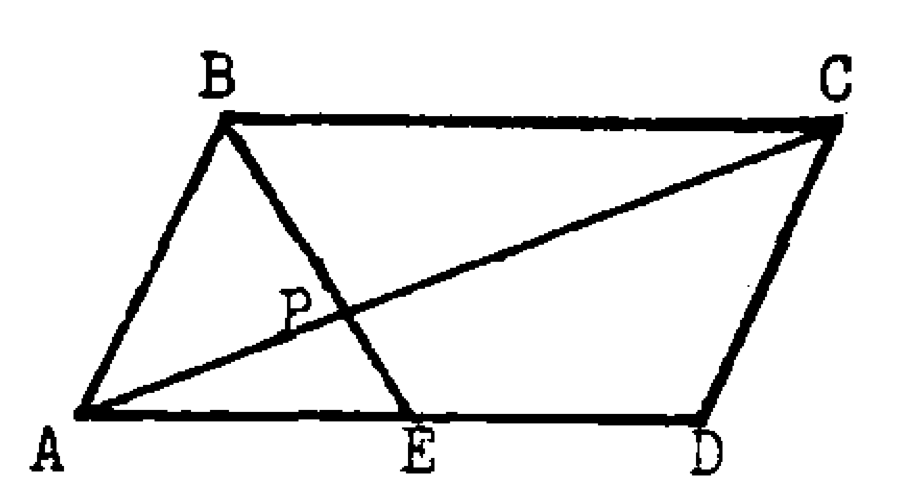
Luego: $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{DC} + \frac{2}{3}\overline{BC}$

Si $s\overline{DC} + t\overline{AD} = \overline{DC} + \frac{2}{3}\overline{AD} \leftrightarrow s=1$ y $t=2/3$

$$\therefore\ s+3t = 3$$

Ejemplo 17. En el paralelogramo ABCD se cumple: $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{n-1}$ y $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{m}$

Si $\overline{M}=m\overline{AD}-n\overline{AE}$, probar que: $\overline{M} = \overline{AB}$.



Demostración. En efecto:

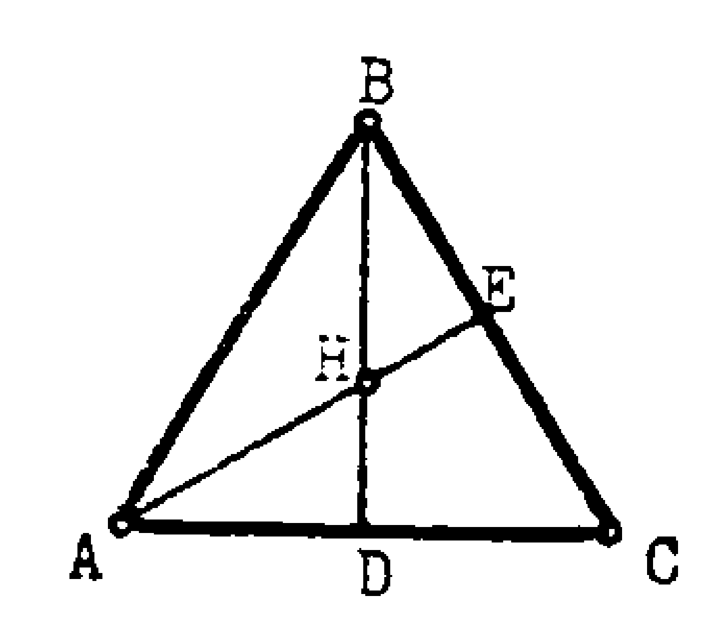
$$\overline{AB} = \overline{AC}-\overline{BC} = \overline{AC}-\overline{AD} = \overline{AC}-(\overline{AE}+\overline{ED}) = \overline{AC}-\overline{AE}-\overline{ED}$$

Pero: $\overline{AC} = m\overline{AD}$ y $\overline{ED} = (n-1)\overline{AE}$

Entonces: $\overline{AB} = m\overline{AP}-\overline{AE}-(n-1)\overline{AE} = m\overline{AP}-\overline{AE}-n\overline{AE}+\overline{AE}$

$$\therefore\ \overline{AB} = m\overline{AP} - n\overline{AE} = \overline{M}$$

Ejemplo 18. En la figura: ABC es un triángulo equilátero. Si $\overline{AB}=n\overline{AC}-m\overline{HB}$ donde H es el ortocentro, hallar el valor de: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.



Solución. Si $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$ (1)

En el ΔBDC: $\overline{BC} = \overline{DC} - \overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \overline{DB}$

Como el ΔABC es equilátero, el punto H es también baricentro, entonces: $\overline{HB} = \frac{2}{3}\overline{DB} \rightarrow \overline{DB} = \frac{3}{2}\overline{HB}$. Luego: $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{3}{2}\overline{HB}$

Sustituyendo en (1): $\overline{AB} = \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{3}{2}\overline{HB} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{3}{2}\overline{HB}$

Si $n\overline{AC} - m\overline{HB} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{3}{2}\overline{HB} \leftrightarrow n = \frac{1}{2}$ y $m = \frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 19. En un triángulo ABC, M=(-1,6) y N=(7,1) son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. $\overline{AB}$ es paralelo al vector $\vec{a}=(2,1)$ y $Proy_{\overline{AN}}\overline{AB} = \frac{28}{17}(4,-1)$. Hallar los vértices del triángulo.

Solución. Si $\overline{AQ} = Proy_{\overline{AN}}\overline{AB} = \frac{28}{17}(4,-1)$

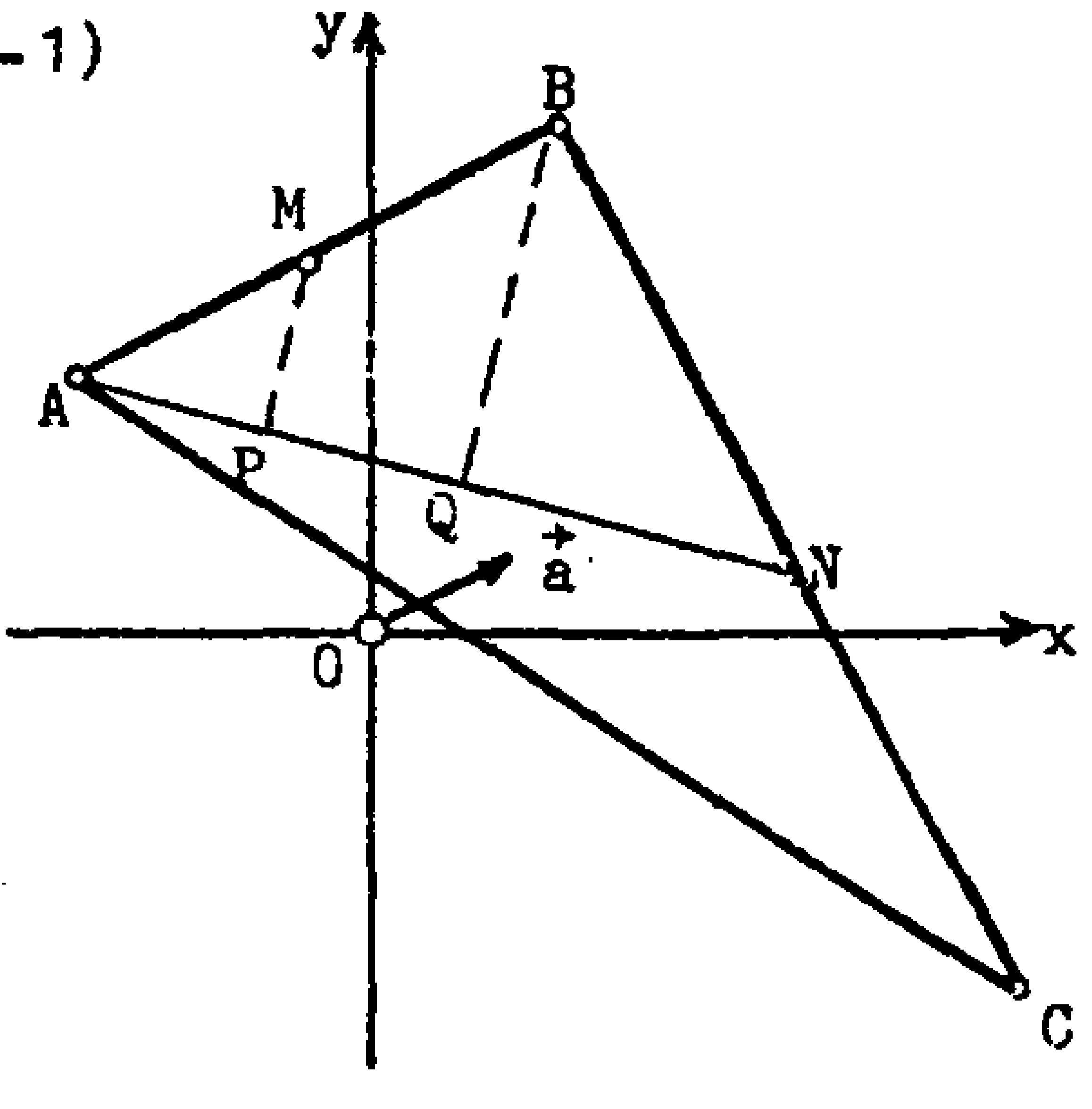
$\rightarrow \overline{AN} \| (4,-1)$

Por M, punto medio de $\overline{AB}$, trazamos $\overline{PM} \| \overline{AN}^{\perp} \rightarrow \overline{PM} = t(1,4)$

Como P es punto medio de $\overline{AQ}$, entonces: $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AQ} = \frac{14}{17}(4,-1)$

En el ΔAPM: $\overline{AM} = \overline{AP} + \overline{PM}$

$\rightarrow r(2,1) = \frac{14}{17}(4,-1) + t(1,4)$



Multiplicando escalarmente ambos extremos por $(1,4)^{\perp}$ se tiene:

$r(2,1).(-4,1) = \frac{14}{17}(4,-1).(-4,1)$, de donde: $r=2$

Luego: $\overline{AM} = 2(2,1) \rightarrow A = M-(4,2) = (-1,6)-(4,2) = (-5,4)$

$\overline{AB} = 2\overline{AM} = (8,4) \rightarrow B = A+(8,4) = (-5,4)+(8,4) = (3,8)$

$\overline{BC} = 2\overline{BN} = (8,-14) \rightarrow C = B+(8,-14) = (11,-6)$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4, sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores linealmente independientes. Para qué valores de k tendremos que $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son linealmente independientes?

1. $\vec{c} = 3\vec{a} + (k+3)\vec{b}$, $\vec{d} = (k-4)\vec{a} - 4\vec{b}$ Rp. k=0, k=1
2. $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{a} + k\vec{b}$ Rp. k=-6
3. $\vec{c} = (k+1)\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = 4\vec{a} + (k+1)\vec{b}$ Rp. k=1, k=-3
4. $\vec{c} = 2\vec{a} + (k+2)\vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{a} + (k-1)\vec{b}$ Rp. k=7/2

5. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base en R^2, demostrar que los vectores: $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}$ y $\vec{d}=3\vec{a}+4\vec{b}$ también forman una base en R^2.

6. Hallar los valores de k para que los vectores dados sean linealmente independientes.

   a) $\vec{a} = (k-5,4)$, $\vec{b} = (2k,-1)$ Rp. $k\varepsilon R-\{5/9\}$

   b) $\vec{a} = (2,2k-3)$, $\vec{b} = (1-k,-5)$ Rp. $k\varepsilon R-\{-1,7/2\}$

7. Fijado el vector $\vec{c}$ en R^2, entonces $\vec{c}$ es expresable y en forma única, como una combinación lineal de los siguientes pares de vectores:

   (1) $\vec{a}=(-5,10)$, $\vec{b}=(3,-6)$ (3) $\vec{a}=(\sqrt{6}/2,-6)$, $\vec{b}=(-5/4,5\sqrt{6}/2)$

   (2) $\vec{a}=(2,4)$, $\vec{b}=(-1/2,-1)$ (4) $\vec{a}=(3,-1/2)$, $\vec{b}=(-12,-2)$

   Establecer el valor de verdad de cada afirmación. Rp. FFFV

8. Dados los vectores: $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-1,2)$, $\vec{c}=(1,1)$, $\vec{d}=(2,-4)$ y $\vec{e}=(-3,6)$. Cuántas bases de R^2 se pueden obtener con ellos?

   Rp. 7

9. Hallar las coordenadas del vector $\vec{a}=(1,2)$ respecto de la base B={(2,-1),(-1,1)}. Rp. (3,5)

10. Sea $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ una base de R^2, $\vec{u}_1=(1,3)$, $\vec{u}_2=(-5,1)$. Si $\vec{a}=(-2,6)$ y si $\vec{a}=r\vec{u}_1+t\vec{u}_2$, entonces:

    (1) $Comp_{\vec{u}_1}\vec{a}=r$ (2) r+t=5/2 (3) $\vec{u}_1 \perp \vec{a}^{\perp}$

    Establecer el valor de verdad de cada afirmación. Rp. FVF

11. Halle las coordenadas del vector $\vec{a}=(1,3)$ de R^2 respecto de la base $B=\{(-2,1),(1,2)\}$. Rp. (1/5,7/5)

12. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in R^2$, entonces:
   (1) $\{\vec{a},\vec{b}\}$ linealmente independientes $\rightarrow$ $\{\vec{a},\vec{b}\}$ gebera R^2
   (2) $\{\vec{a},\vec{b}\}$ y $\{\vec{b},\vec{c}\}$ bases de R^2 $\rightarrow$ $\{\vec{a},\vec{c}\}$ base de R^2
   (3) $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ y $\vec{b}\perp\vec{c}$ $\rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores linealmente ind.
   (4) $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ generadores de R^2 $\rightarrow$ $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ base de R^2.
   Determinar el valor de verdad de cada afirmación. Rp. VFFF

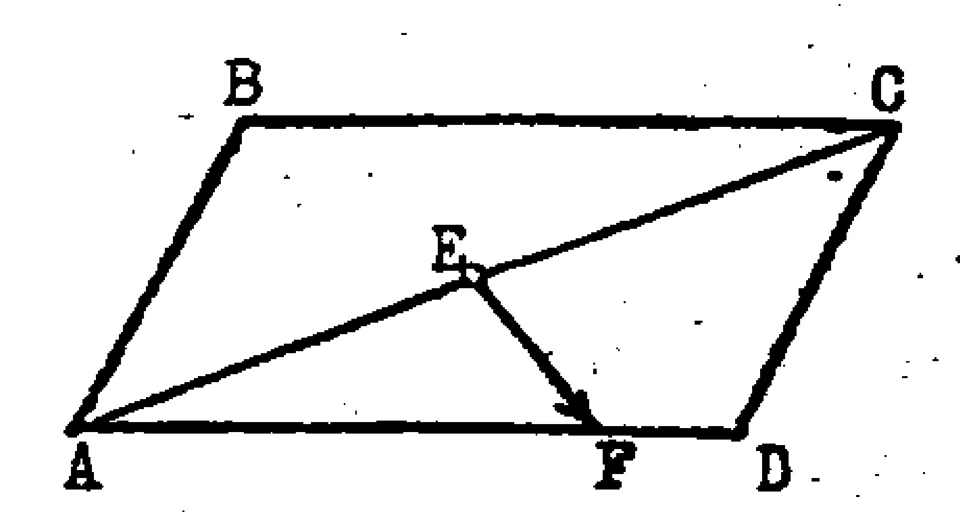
13. Si $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset R^2$ son vectores no nulos, se afirma:
   (1) Si $\{\vec{a},\vec{b}\}$ es base de R^2 $\rightarrow$ $\{Proy_{\vec{b}}\vec{a}, Proy_{\vec{a}}\vec{b}\}$ es base de R^2
   (2) $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ es linealmente dependiente.
   (3) $\{\vec{a},\vec{b}\}$ es base de R^2 $\rightarrow$ $\vec{a}\perp\vec{b}$
   Determinar el valor de verdad de cada afirmación. Rp. FVF

14. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores de R^2, se afirma:
   (1) $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ es linealmente dependiente.
   (2) Necesariamente $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, $\vec{b}\,||\,\vec{c}$ ó $\vec{a}\,||\,\vec{c}$
   (3) Si $\vec{d}\in R^2$ $\leftrightarrow$ $\exists r,s,t\in R/\ \vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$
   Determinar el valor de verdad de cada afirmación. Rp. VFF

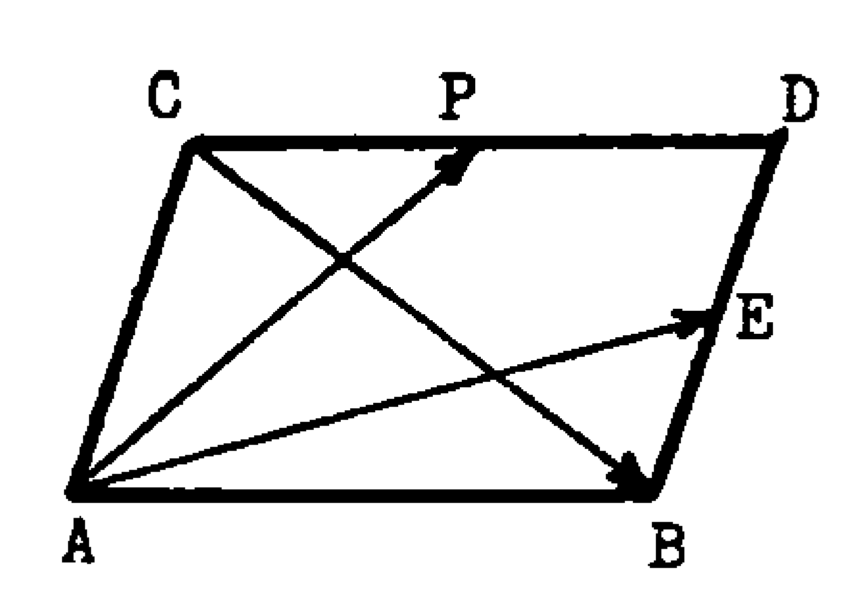
15. Halle las fórmulas del cambio de base, siendo $\vec{u}_1=3\vec{v}_1+\vec{v}_2$, $\vec{u}_2=4\vec{v}_1-3\vec{v}_2$, y determine las coordenadas del vector $\vec{u}$ respecto de la base $B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ si respecto de la base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$son (3,-2) Rp. (1,9)

16. En la figura se tiene: $Tg\alpha=5/12$, el vector $\vec{a}$ se expresa como $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$, donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos a los rayos $\overline{OX}$ y $\overline{OZ}$ respectivamente. Si $||\vec{a}||=26$ hallar el valor de $||\vec{u}||+||\vec{v}||$.
   Rp. $44+10\sqrt{3}$

17. En el paralelogramo de la figura: $\overline{AE}=\overline{EC}$ y $\overline{FD}=\frac{1}{4}\overline{AF}$. Si $\overline{EF}=m\overline{AD}+n\overline{CD}$, hallar el valor de m+n. Rp. 4/5

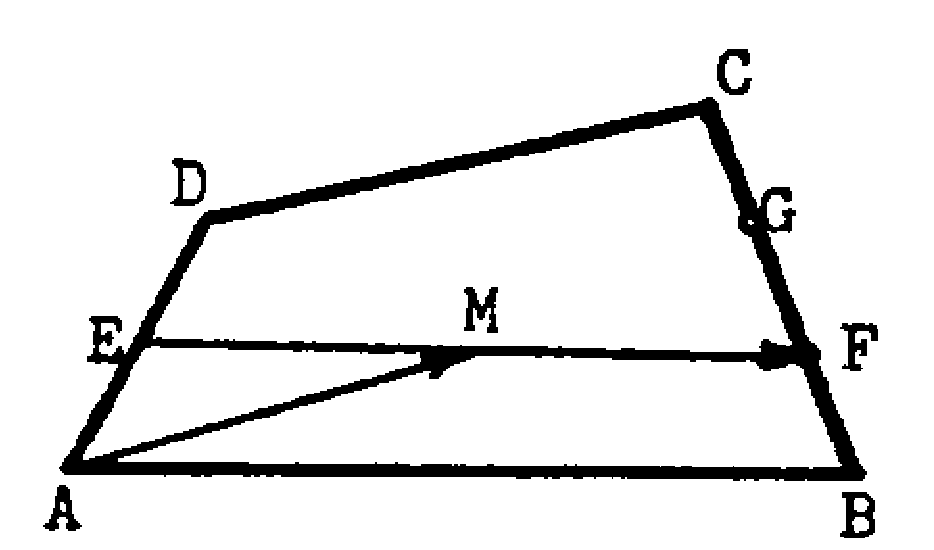


18. En la figura:
ABCD es un paralelogramo, P punto medio de $\overline{CD}$, E punto medio de $\overline{BD}$. Si $\overline{CB}$ se expresa como una combinación lineal de $\overline{AP}$ y AE, hallar el producto de los escalares. Rp. -4

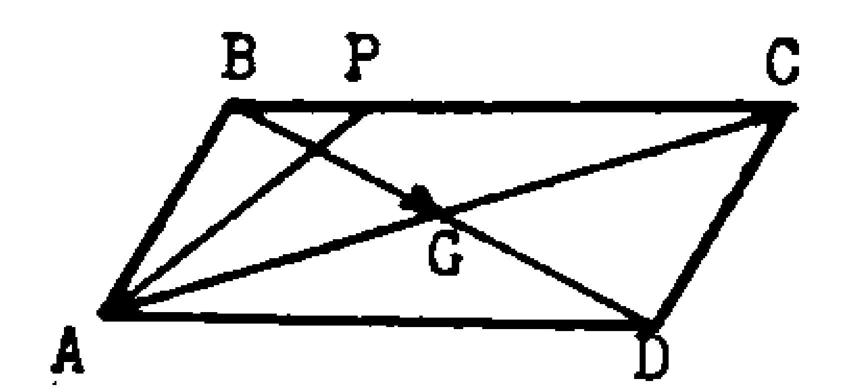


19. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n puntos de R^2. Si $\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\ldots+\overline{OA_n}$ se pone en combinación lineal de $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, hallar la suma de los escalares. Rp. $\frac{n}{2}(n+1)$

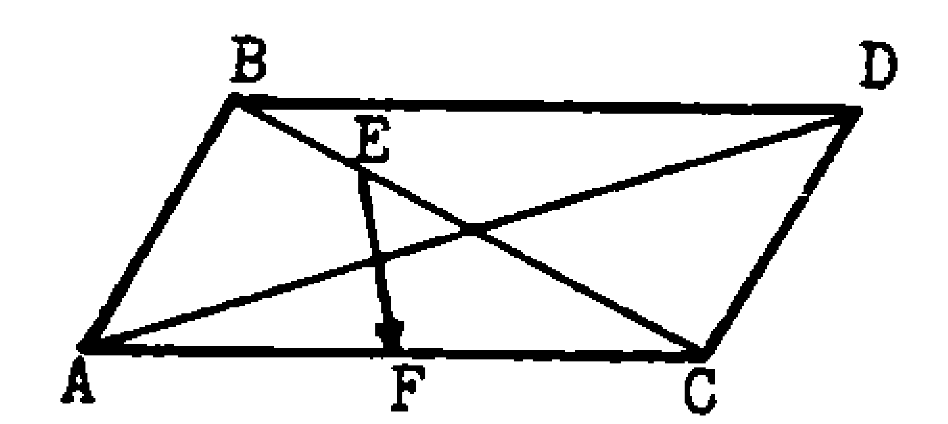
20. En el cuadrilátero de la figura:
E es punto medio de AD, F y G son puntos de trisección de BC y M es punto medio de $\overline{EF}$. Si $\overline{AM}=a\overline{AD}+b\overline{AB}+c\overline{BC}$, determinar el valor de a+b+3c. Rp. 5/4



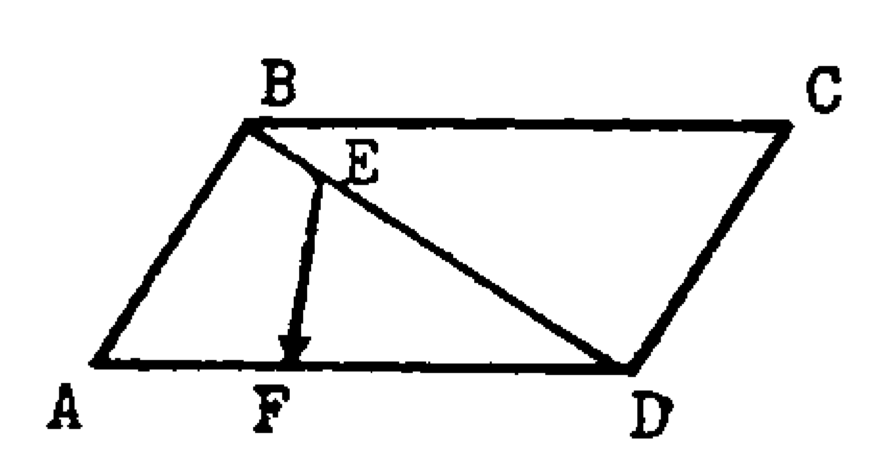
21. En la figura:
ABCD es un paralelogramo, $\overline{PC}=3\overline{BP}$. Si $\overline{BG}=m\overline{BC}+n\overline{AP}$, hallar: m-n. Rp. 9/8



22. En el paralelogramo ABCD: $\overline{BC}=4\overline{BE}$ y F es punto medio de $\overline{AC}$. Si $\overline{EF}=m\overline{AC}+n\overline{AB}$, hallar el valor de m-n. Rp. 1

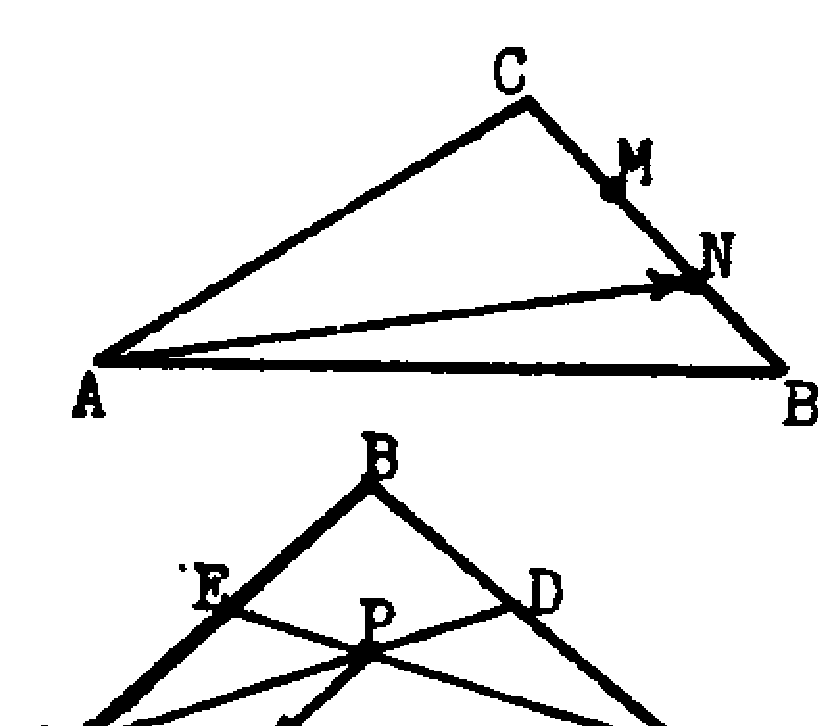


23. En la figura:
ABCD es un paralelogramo donde $\overline{AD}=3\overline{AF}$ y $\overline{ED}=5\overline{BE}$. Hallar los valores de m y n si $\overline{EF}=m\overline{AD}+n\overline{AB}$. Rp. m=1/6, n=-5/6



24. Si M y N son puntos de trisección del lado $\overline{BC}$ del ΔABC y $\overline{AN}=m\overline{AC}+n\overline{AB}$, hallar el valor de: $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$. Rp. 3/2

25. En el ΔABC se tiene que $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son medianas y $\overline{PM}||\overline{BA}$. Hallar m y n tales que: $\overline{AP}=m\overline{PM}+n\overline{BC}$. Rp. m=-2, n=1/3



1.25 APLICACIONES DE LOS VECTORES A LA GEOMETRIA ELEMENTAL

Las relaciones establecidas para los vectores en R constituyen instrumentos de singular importancia para el tratamiento de ciertos conceptos de la Geometría Elemental. Algunas veces una apropiada aplicación de métodos vectoriales facilitará la interpretación y demostración de proposiciones geométricas.

Se debe destacar, sin embargo, que a veces es necesario el uso de las coordenadas cartesianas para facilitar las demostraciones. El empleo de un sistema rectangular es arbitrario en lo que se refiere a la orientación y colocación de los ejes coordenados y esta selección no hace perder generalidad al teorema.

Es oportuno resaltar que cuando se usan métodos vectoriales para la demostración de teoremas, no es importante ubicar la figura en una determinada posición en el sistema coordenado; sin embargo es recomendable tener en consideración el uso de un vértice cualquiera como origen de los vectores (Figura 20), en otros casos, el vector de posición de cada vértice o punto fundamental de cada figura geométrica. (Figura 21)

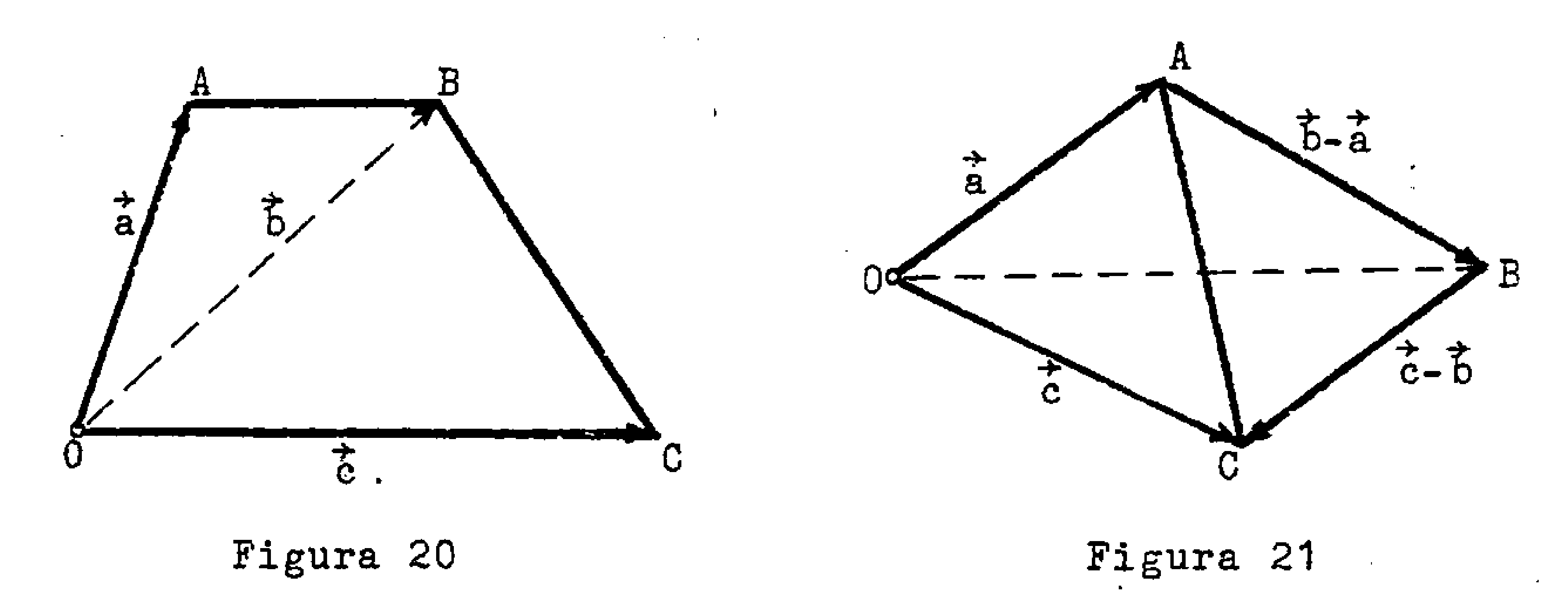


Figura 20 Figura 21

Los ejemplos siguientes darán una mejor ilustración de lo que se sugiere.

Ejemplo 1. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.

Demostración. Sea ABCD un paralelogramo,
M punto medio de la diagonal $\overline{AC}$
N punto medio de la diagonal $\overline{BD}$

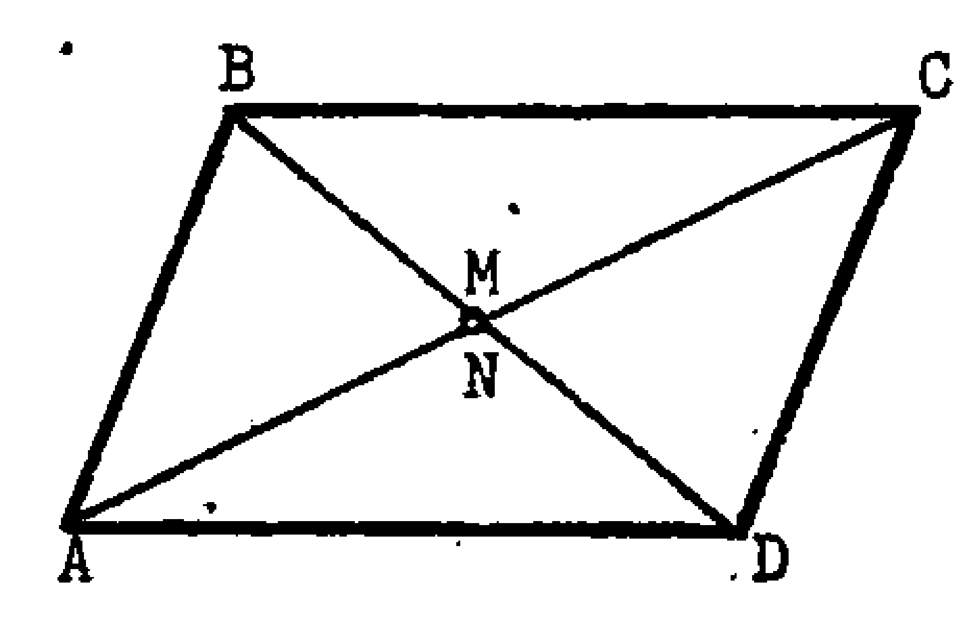
Entonces: $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} \rightarrow \vec{m}-\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$

de dmodo qué: $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$

Análogamente se tiene: $\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

Por ser ABCD un paralelogramo: $\overline{DC}=\overline{AB}$

$\rightarrow \vec{c}-\vec{d} = \vec{b}-\vec{a}$



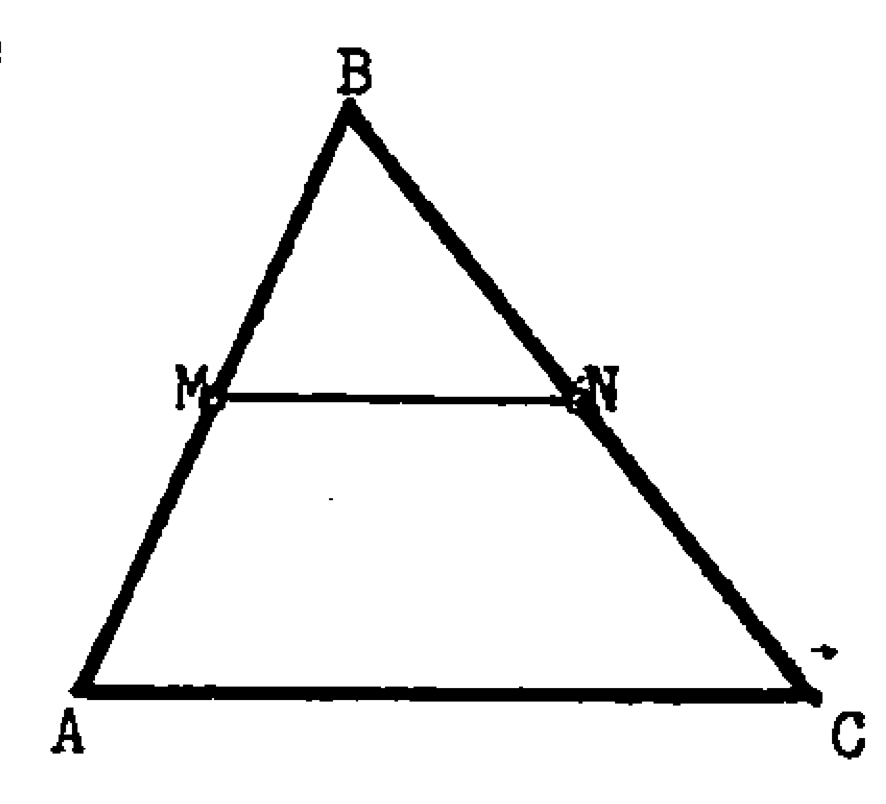
Sumando $(\vec{d}+\vec{a})$ a ambos extremos de esta igualdad, se tiene:

$$\vec{c}-\vec{d}+(\vec{d}+\vec{a}) = \vec{b}-\vec{a}+(\vec{d}+\vec{a}) \rightarrow \vec{c}+\vec{a} = \vec{b}+\vec{d} \rightarrow \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$$

Por tanto: $\vec{m} = \vec{n}$, esto es: $M = N$

Ejemplo 2. Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado, y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

Demostración. En efecto, sea el ΔABC, de modo que: $\overline{AB}=2\overline{AM}$



Entonces: $\vec{b}-\vec{a} = 2(\vec{m}-\vec{a}) \leftrightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

Análogamente: $\overline{BC}=2\overline{BN} \rightarrow \vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

Pero $\overline{MN} = \vec{n}-\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$

Luego: $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$

Por tanto: $\overline{MN} || \overline{AC}$ y $||\overline{MN}|| = \frac{1}{2}||\overline{AC}||$

Ejemplo 3. Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

Demostración. En efecto, sea el cuadrilátero ABCD, en donde:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} \rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

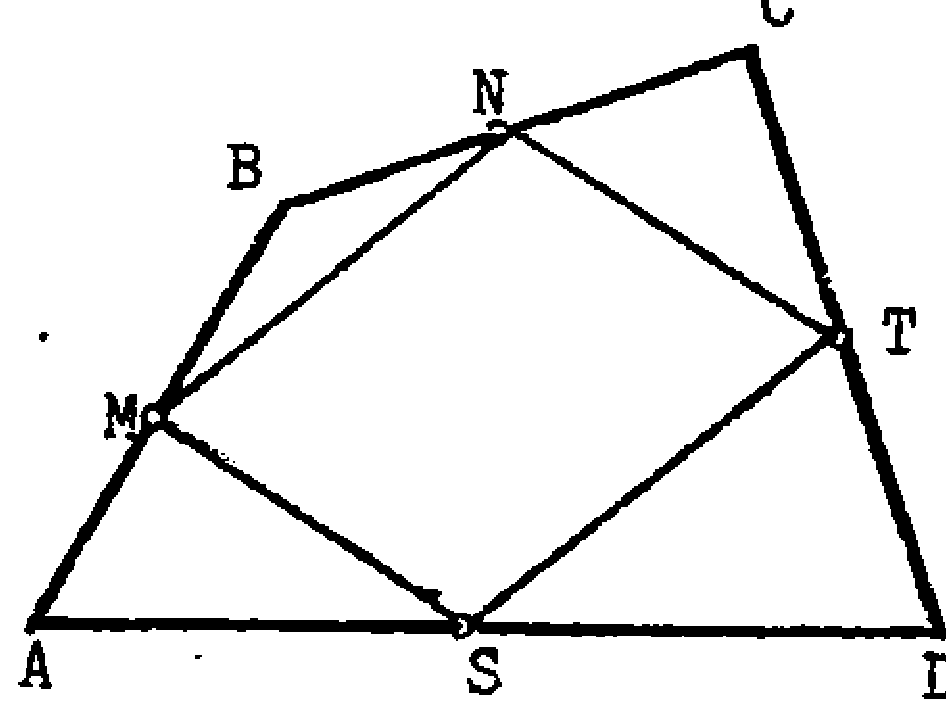
$\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC} \rightarrow \vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

$\overline{MN} = \vec{n}-\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$ (1)

Asi mismo: $\overline{AS} = \frac{1}{2}(\overline{AD}) \rightarrow \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})$

$\overline{CT} = \frac{1}{2}(\overline{CD}) \rightarrow \vec{t} = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$

$\overline{ST} = \vec{t}-\vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d}) = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$ (2)



De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que: $\overline{MN} = \overline{ST}$
Análogamente se demuestra que: $\overline{MS} = \overline{NT}$
Por tanto, MNTS es un paralelogramo.

Ejemplo 4. Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Demostración. En efecto, sea el rombo ABCD.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \qquad (1)$$

$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BC} - \overline{DC}$

Pero $\overline{DC}=\overline{AB}$ (Por ser lados opuesto del rombo)

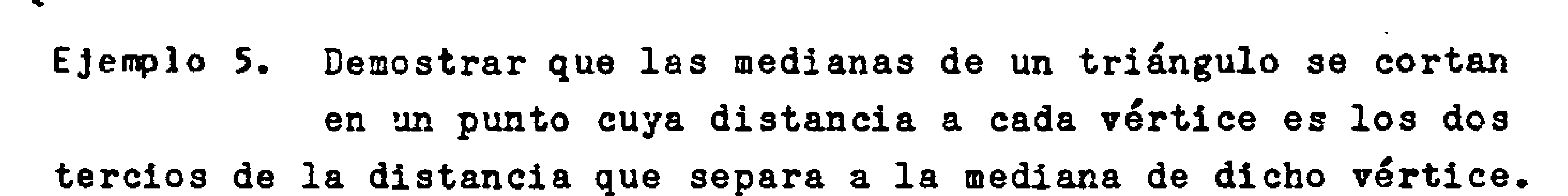
Entonces: $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{AB} \qquad (2)$

Multiplicando escalarmente las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

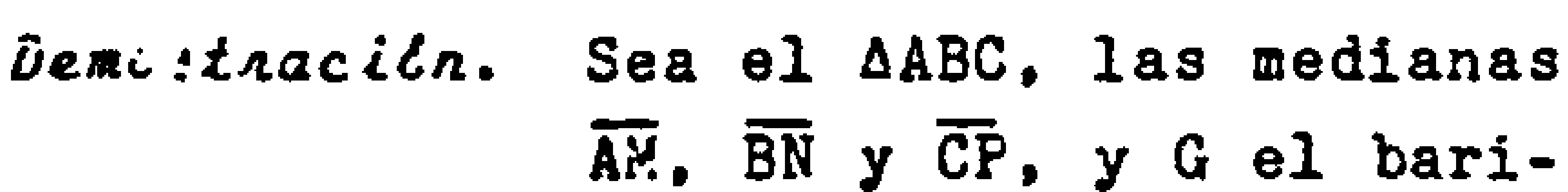
$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = (\overline{BC}+\overline{AB})\cdot(\overline{BC}-\overline{AB})$$

$$\rightarrow \overline{AC}\cdot\overline{BD} = \|\overline{BC}\|^2-\|\overline{AB}\|^2, \text{ pero: } \|\overline{BC}\|=\|\overline{AB}\|$$

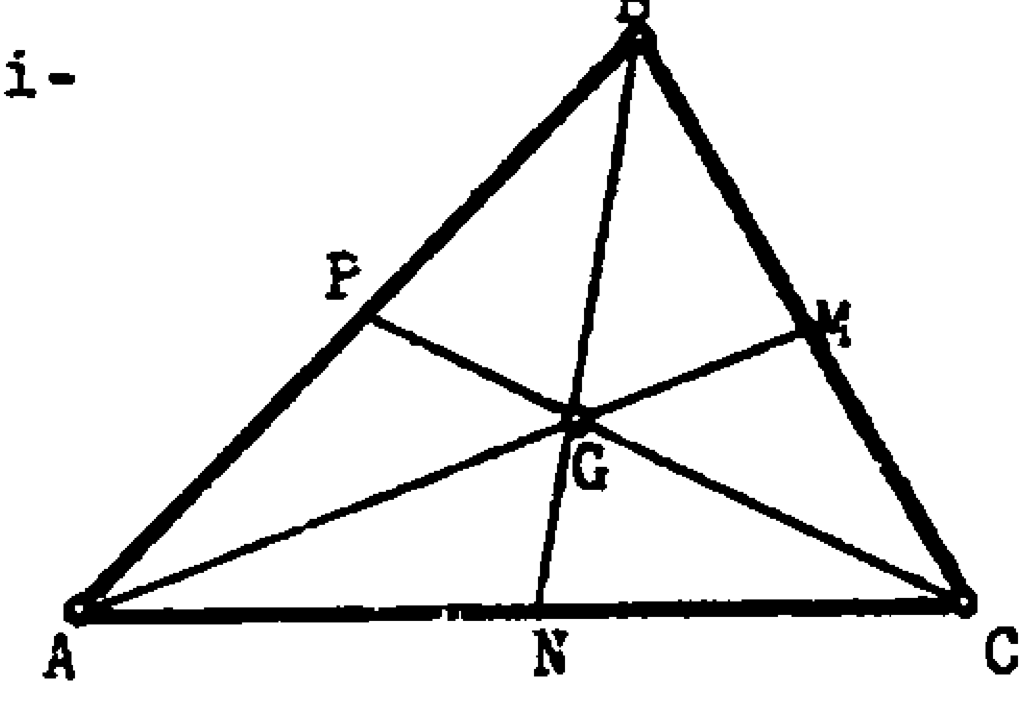
Por tanto: $\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0 \rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$



Ejemplo 5. Demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto cuya distancia a cada vértice es los dos tercios de la distancia que separa a la mediana de dicho vértice.



Demostración. Sea el ΔABC, las medianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$, y G el baricentro del triángulo. Entonces:



$$\overline{AM} = \vec{m}-\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) - \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})$$

$$\overline{BN} = \vec{n}-\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}) - \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})$$

$$\overline{CP} = \vec{p}-\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$$

La expresión vectorial que define al baricentro para cada mediana es:

$$\vec{g} = \vec{a} + r\overline{AM} = \vec{a} + \frac{r}{2}(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}) \qquad (1)$$

$$\vec{g} = \vec{b} + s\overline{BN} = \vec{b} + \frac{s}{2}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}) \qquad (2)$$

$$\vec{g} = \vec{c} + t\overline{CP} = \vec{c} + \frac{t}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}) \qquad (3)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$\vec{a} + \frac{r}{2}(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}) = \vec{b} + \frac{s}{2}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})$$

$$\rightarrow (2-2r-s)\vec{a} + (r+2s-2)\vec{b} + (r-s)\vec{c} = \theta$$

Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes, entonces:

$$2-2r-s=0 \ , \ r+2s-2=0 \ , \ r-s=0$$

de donde obtenemos: $r=s=2/3$

Análogamente, de las ecuaciones (1) y (3) se tiene: $r=t=2/3$

Por tanto, las medianas se interceptan en el punto G a 2/3 de $\overline{AM}$ $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$.

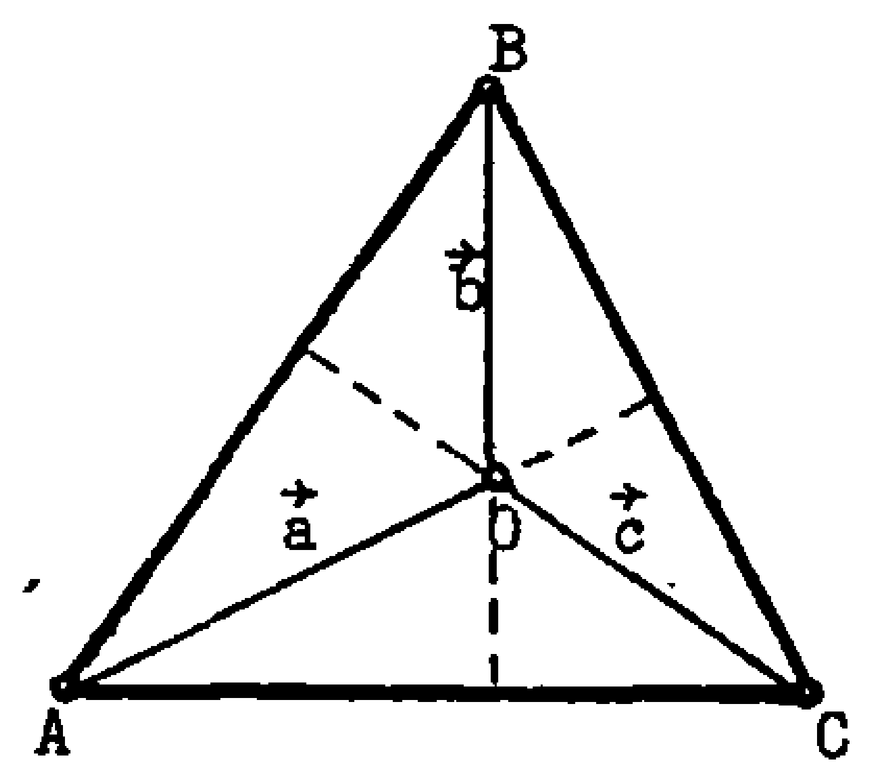
Observación. Si sustituimos los valores de r, s ó t en las ecuaciones (1), (2) ó (3), respectivamente, se obtiene la ecuación vectorial que define el baricentro de un triángulo, esto es:

$$\vec{g} = \vec{a} + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3})(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}) = \tfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

Ejemplo 6. Demostrar que las tres alturas de un triángulo se interceptan en un punto llamado ortocentro.

Demostración. En el ΔABC trazamos las alturas correspondientes a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Unimos el punto O de intersección con el vértice B. Para demostrar la proposición bastará probar que $\overline{OB} \perp \overline{AC}$, o sea que:

$$\overline{AC}.\vec{b} = 0$$



En efecto, siendo $\vec{a} \perp \overline{BC}$ y $\vec{c} \perp \overline{AB}$, entonces:

$$\vec{a}.\overline{BC} = \vec{a}.(\vec{c}-\vec{b}) = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{c}.\overline{AB} = \vec{c}.(\vec{b}-\vec{a}) = 0 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{b} - \vec{c}.\vec{a} = 0 \rightarrow (\vec{c}-\vec{a}).\vec{b} = 0 \ ,$$

$$\rightarrow \overline{AC}.\vec{b} = 0$$

Por tanto: $\overline{AC} \perp \overline{OB}$

Ejemplo 7. Demostrar que las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado excentro.

Demostración. En el ΔABC trazamos las mediatrices correspondientes a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, las cuales se interceptan en O. Unimos O con P, punto medio de $\overline{AC}$. Demostraremos que: $\overline{OP} \perp \overline{AC}$, o sea que: $\overline{OP}.\overline{AC} = 0$

En efecto, por definición de mediatriz: $\overline{ON}.\overline{BC}=0$ y $\overline{OM}.\overline{AB}=0$

En el ΔOMP: $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}$

$\rightarrow \overline{OP}.\overline{AB} = \overline{OM}.\overline{AB} + \overline{MP}.\overline{AB} = \overline{MP}.\overline{AB}$ (1)

En el ΔONP: $\overline{OP} = \overline{ON} - \overline{PN}$

$\rightarrow \overline{OP}.\overline{BC} = \overline{ON}.\overline{BC} - \overline{PN}.\overline{BC} = -\overline{PN}.\overline{BC}$ (2)

Sumando (1) y (2) se tiene:

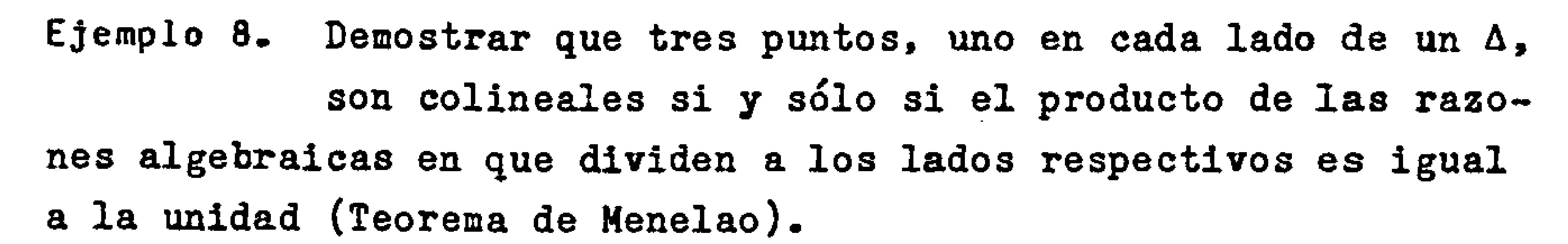
$\overline{OP}.(\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{MP}.\overline{AB} - \overline{PN}.\overline{BC}$

$\rightarrow \overline{OP}.\overline{AC} = \overline{MP}.\overline{AB} - \overline{PN}.\overline{BC}$

Según la proposición del ejemplo 2:

$\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, entonces: $\overline{OP}.\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BC}.\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{BC}$

$$\therefore \overline{OP}.\overline{AC} = 0$$



Ejemplo 8. Demostrar que tres puntos, uno en cada lado de un Δ, son colineales si y sólo si el producto de las razones algebraicas en que dividen a los lados respectivos es igual a la unidad (Teorema de Menelao).

Demostración. Sea el ΔABC y los puntos M, N y P los que dividen a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en las razones m, n y r respectivamente. Siendo $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ linealmente independientes,

entonces: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \theta$ (1)

Si $\overline{AM} = m\overline{MB} \rightarrow \overline{AB} = \frac{m+1}{m}\overline{AM}$ (2)

$\overline{BN} = n\overline{NC} \rightarrow \overline{BC} = \frac{n+1}{n}\overline{BN} = \frac{n+1}{n}(\overline{AN}-\overline{AB})$

$\rightarrow \overline{BC} = \frac{n+1}{n}(\overline{AN} - \frac{m+1}{m}\overline{AM})$ (3)

$\overline{CP} = r\overline{AP} \rightarrow \overline{AP}-\overline{AC} = r\overline{AP}$

$\rightarrow \overline{CA} = (r-1)\overline{AP}$ (4)

Sustituyendo, (2), (3) y (4) en (1) se tiene:

$$(\frac{m+1}{m})\overline{AM} + (\frac{n+1}{n})(\overline{AN} - \frac{m+1}{m}\overline{AM}) + (r-1)\overline{AP} = \theta$$

$$\rightarrow (\frac{m+1}{m})(1 - \frac{m+1}{m})\overline{AM} + (\frac{n+1}{n})\overline{AN} + (r-1)\overline{AP} = \theta$$

Dado que $\overline{AM}$, $\overline{AN}$ y $\overline{AP}$ son vectores linealmente independientes, entonces: $(\frac{m+1}{m})(1 - \frac{m+1}{m}) = 0$, $\frac{n+1}{n} = 0$, $r-1=0$

de donde obtenemos: $m=-1$, $n=-1$, $r=1$

$$\therefore mnr = 1$$

Ejemplo 9. ABC y A'B'C' son dos triángulos y G y G' son sus baricentros. Demostrar que: $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=3\overline{GG'}$.

Demostración. En efecto:

$\overline{AA'} = \vec{a}' - \vec{a}$

$\overline{BB'} = \vec{b}' - \vec{b}$

$\overline{CC'} = \vec{c}' - \vec{c}$

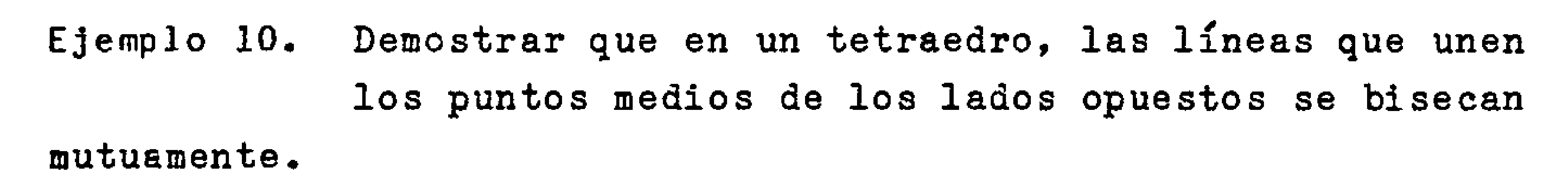
Sumando se tiene:

$\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'} = (\vec{a}'+\vec{b}'+\vec{c}')-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

Según la observación hecha en el ejemplo 5: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{g}$ y $\vec{a}'+\vec{b}'+\vec{c}'=3\vec{g}'$

Entonces: $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'} = 3\vec{g}'-3\vec{g} = 3(\vec{g}'-\vec{g})$

$\therefore\ \overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'} = 3\overline{GG'}$



Ejemplo 10. Demostrar que en un tetraedro, las líneas que unen los puntos medios de los lados opuestos se bisecan mutuamente.

Demostración. En efecto, sea el tetraedro OABC.

Sean $\overline{PQ}$ y $\overline{RT}$ dos líneas que unen los puntos medios de dos lados opuestos. Tomando el vértice O como origen, la expresión vectorial que define el punto medio M de $\overline{PQ}$ es:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\overline{OP}+\overline{OQ}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overline{OM}+\overline{OB}) + \frac{1}{2}\overline{OC}\right]$$

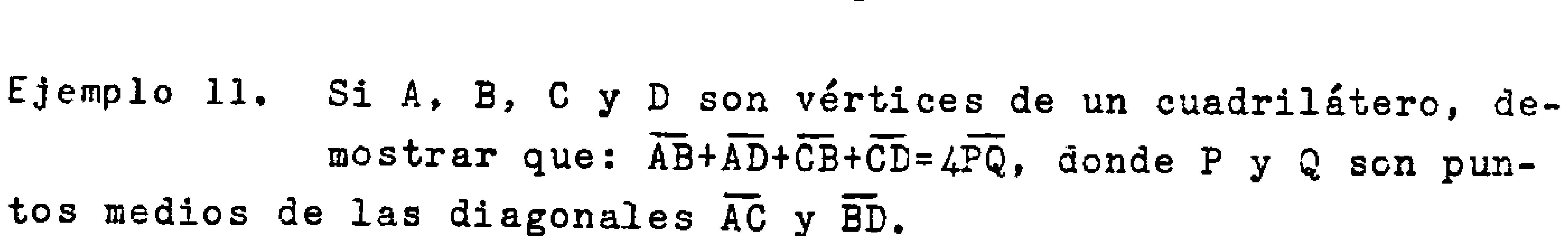
$$\rightarrow \vec{m} = \frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}) \qquad (1)$$

Asi mismo, para el punto medio N de $\overline{RT}$

$$\vec{n} = \frac{1}{2}(\overline{OR}+\overline{OT}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC}) + \frac{1}{2}\overline{OA}\right]$$

$$\rightarrow \vec{n} = \frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}) \qquad (2)$$

Por tanto, de (1) y (2) se deduce que: $\vec{m} = \vec{n} \rightarrow M = N$

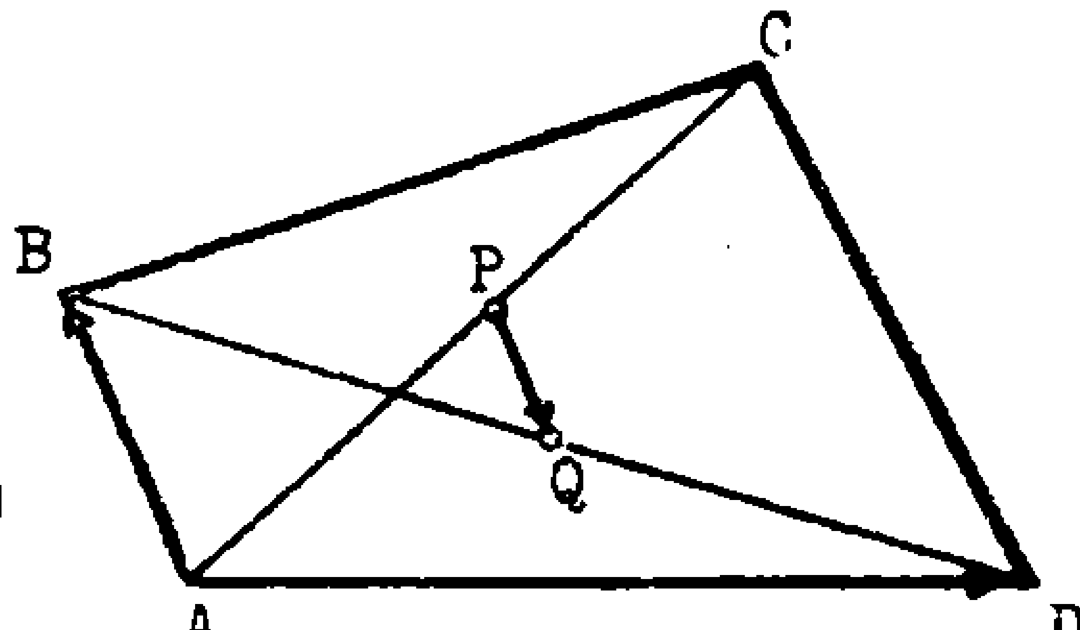


Ejemplo 11. Si A, B, C y D son vértices de un cuadrilátero, demostrar que: $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD}=4\overline{PQ}$, donde P y Q son puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Demostración. En efecto, en la figura se tiene:

$\overline{PQ} = \overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BQ}$

$\overline{PQ} = \overline{PA} + \overline{AD} + \overline{DQ}$
$\overline{PQ} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BQ}$
$\overline{PQ} = \overline{PC} + \overline{CD} + \overline{DQ}$



Sumando ordenadamente se tiene:

$4\overline{PQ} = \overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD}+2(\overline{PA}+\overline{PC})+2(\overline{BQ}+\overline{DQ})$

Pero: $\overline{PC}=-\overline{PA}$ y $\overline{DQ}=-\overline{BQ}$

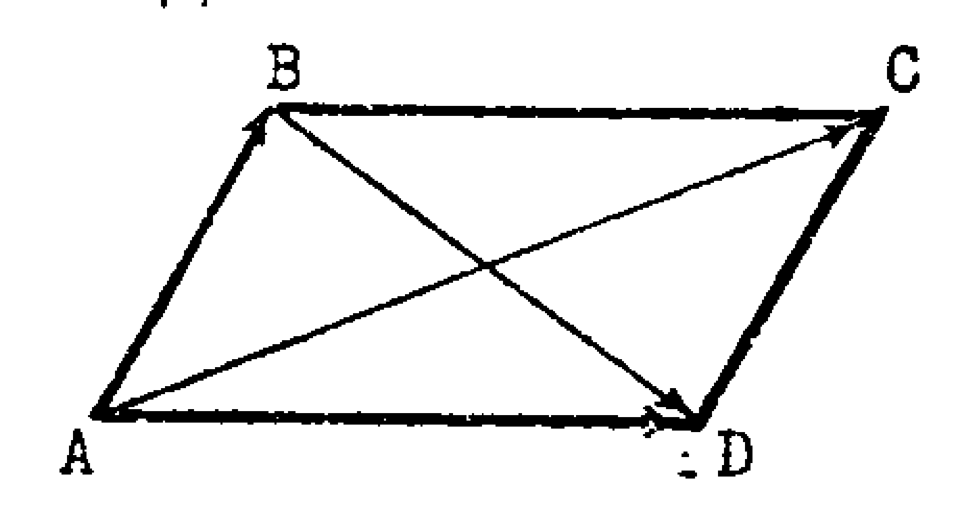
$\therefore\ \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{CD} = 4\overline{PQ}$

Ejemplo 12. Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

Demostración. Sea el paralelogramo ABCD

Si $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB} \rightarrow ||\overline{BD}||=||\overline{AD}-\overline{AB}||$

$\rightarrow ||\overline{BD}||^2=||\overline{AD}||^2+||\overline{AB}||^2-2\overline{AD}.\overline{AB}$



Asi mismo: $\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{BC}+\overline{DC}$

$\rightarrow ||\overline{AC}||^2=||\overline{BC}||^2+||\overline{DC}||^2+2\overline{BC}.\overline{DC}$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$||\overline{BD}||^2+||\overline{AC}||^2=||\overline{AD}||^2+||\overline{AB}||^2+||\overline{BC}||^2+||\overline{DC}||^2+2(\overline{BC}.\overline{DC}-\overline{AD}.\overline{AB})$$

Pero como: $\overline{AB}=\overline{DC}$ y $\overline{AD}=\overline{BC}$, se tiene:

$$||\overline{BD}||^2+||\overline{AC}||^2 = ||\overline{AD}||^2+||\overline{AB}||^2+||\overline{BC}||^2+||\overline{DC}||^2$$

EJERCICIOS

1. Demostrar que las diagonales de un rectángulo son de la misma longitud.

2. Demostrar que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

3. Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices del triángulo.

4. Demostrar que las diagonales de un trapecio y la recta que une los puntos medios de los lados paralelos, se cortan en un mismo punto.

5. Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases, y su longitud es igual a la mitad de la suma de las longitudes de las bases.

6. Demostrar que las medianas de los lados iguales de un triángulo isósceles son de la misma longitud.

7. Demostrar que si las rectas que contienen a dos lados opuestos de un cuadrilátero se interceptan en un punto S, y las rectas que contienen a los otros dos lados del cuadrilátero se interceptan en un punto T, entonces el punto medio del segmento ST es colineal con los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero. (Sug. Coloque el origen en uno de los vértices del cuadrilátero).

8. Demostrar que los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero y los puntos medios de sus diagonales son vértices de un paralelogramo.

9. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera del plano a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias del punto a los otros dos vértices.

10. Demostrar la igualdad vectorial: $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OP}+\overline{OQ}+\overline{OR}$, siendo O un punto cualquiera interior al triángulo ABC y P, Q y R los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente.

11. Demostrar que la suma de los cuadrados de los lados de cualquier cuadrilátero excede a la suma de los cuadrados de las diagonales en cuatro veces el cuadrado de la línea que une los puntos medios de las diagonales.

12. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son vectores que unen O con A, B, C y D. Si se verifica que: $(\vec{b}-\vec{a})=2(\vec{d}-\vec{c})$, demostrar que el punto de intersección de las líneas que unen A con C y B con D, triseca estas líneas.

1.26 APLICACIONES DE LOS VECTORES A LA FISICA

El empleo de vectores en la física es frecuente, la fuerza la aceleración y la velocidad se representan mediante vectores en las que la dirección del vector está dada por la dirección de la cantidad física, en tanto que la magnitud del vector es igual a la magnitud física, en las unidades apropiadas.

Cuando se trabaja con velocidades debemos tener en cuenta que, en un movimiento que es la composición de varios movimientos, el vector de velocidad es la suma vectorial de los vectores de velocidad de cada movimiento.

Otra aplicación se refiere a las fuerzas que actuan sobre una partícula en el espacio; en este caso, a las diversas fuerzas q' actuan sobre una partícula se representa mediante vectores: $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_n$, entonces la segunda ley de Newton, establece que el movimiento de una partícula está descrita por la ecuación vectorial:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots, \vec{F}_n$$

donde m es la masa de la partícula y $\vec{a}$ la aceleración. En esta ecuación la masa m es un escalar, en tanto que la aceleración $\vec{a}$ es un vector.

Si es el caso de que la partícula está en reposo la suma de los vectores de las fuerzas es cero, esto es:

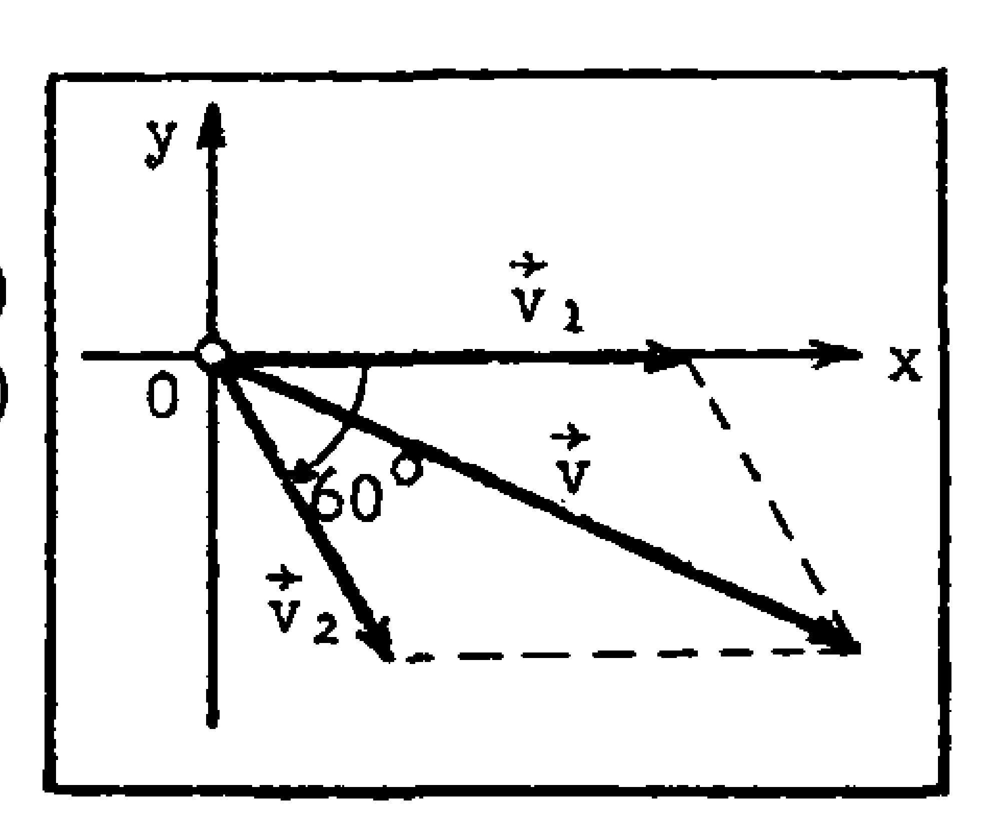
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = 0$$

Los ejemplos que siguen a continuación pondra en evidencia relaciones importantes en el estudio de ciertos fenómenos físicos.

Ejemplo 1. Un hombre salta desde un automóvil en marcha de manera que, el coche hubiese estado quieto, su velocidad habría tenido magnitud 10km/h y habría formado un ángulo de 60° con la dirección al frente del automovil. Si el coche avanza a 30 km/h, con qué velocidad sale el hombre del automóvil?

Solución. Sea $\vec{v}_1$, el vector de velocidad del coche y $\vec{v}_2$, el vector de velocidad que le correspondería al hombre si el coche hubiese estado quieto.

Entonces la velocidad real del hombre es: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$



Luego: $\vec{v}_1 = 30(\text{Cos}0^\circ, \text{Sen}0^\circ) = 30(1,0)$

$\vec{v}_2 = 10(\text{Cos}240^\circ, \text{Sen}240^\circ) = 5(1,-\sqrt{3})$

Por tanto, $\vec{v} = 30(1,0)+5(1,-\sqrt{3}) = 5(7,-\sqrt{3})$ es el vector velocidad que se desea tener y cuya magnitud es:

$$||\vec{v}|| = 5\sqrt{49+3} = 10\sqrt{13} \text{ km/h}$$

Ejemplo 2. Un aeroplano vuela hacia el noreste con una velocidad de 400 millas/h y el viento sopla hacia el sureste a una velocidad de 100 millas/h. Cuál es la velocidad resultante del aeroplano, con respecto a la tierra, y que curso debe seguir el piloto.

Solución. Sea $\vec{v}_1$ el vector velocidad del aeroplano y $\vec{v}_2$ el vector velocidad del viento.

Luego, el vector velocidad resultante del aeroplano con respecto a la tierra es:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

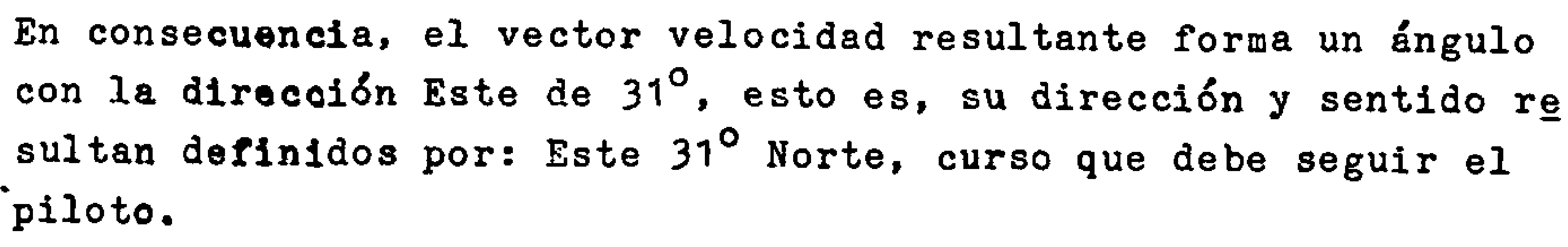
Si: $\vec{v}_1 = 400(\text{Cos}45^\circ, \text{Sen}45^\circ) = 200\sqrt{2}(1,1)$

y $\vec{v}_2 = 100(\text{Cos}315^\circ, \text{Sen}315^\circ) = 50\sqrt{2}(1,-1)$

Entonces: $\vec{v} = 50\sqrt{2}(4+1, 4-1) = 50\sqrt{2}(5,3)$

La dirección de la velocidad es: $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \dfrac{(5,3)}{\sqrt{34}}$

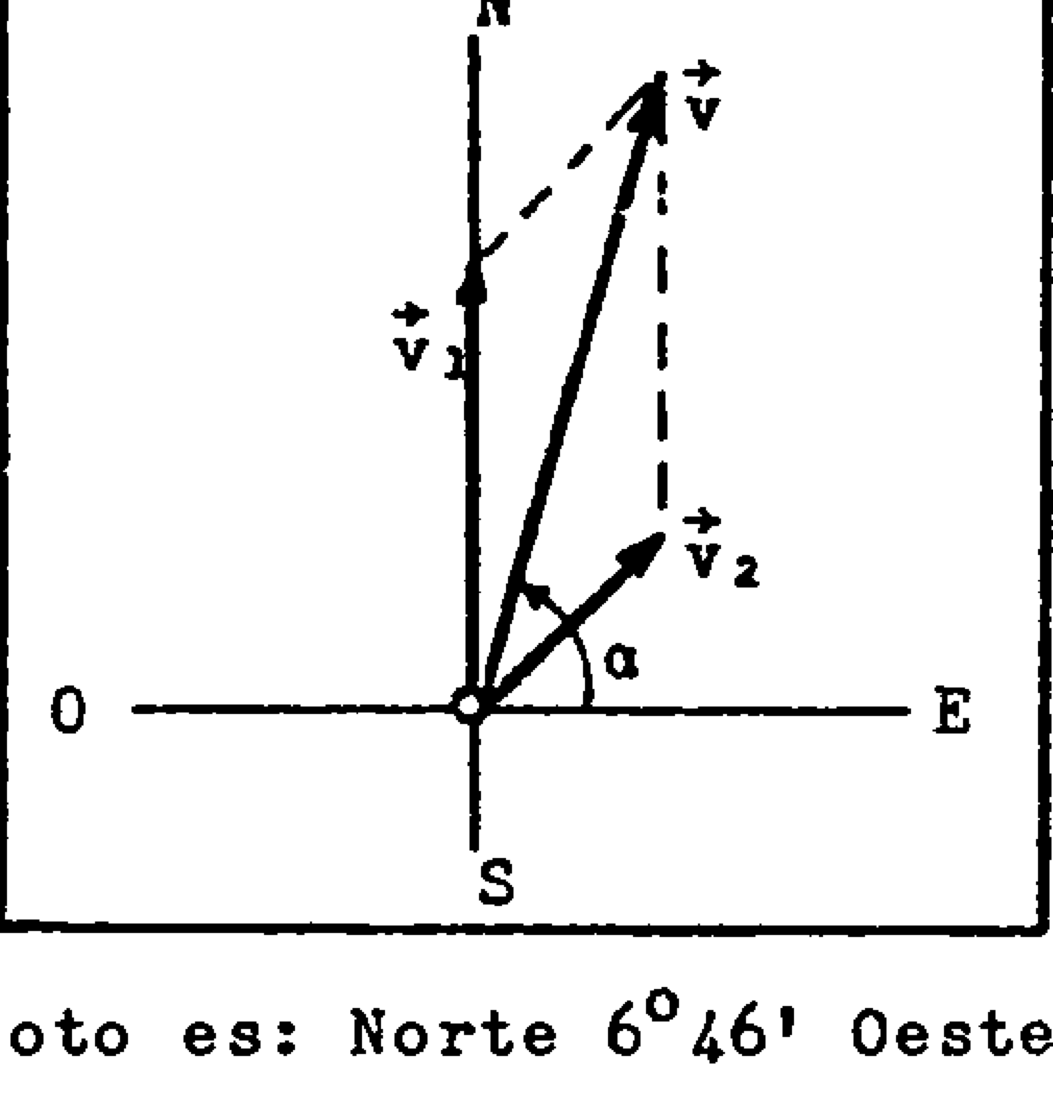
o sea: $\text{Cos}\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{34}} = 0.857 \rightarrow \alpha = 31^\circ$



En consecuencia, el vector velocidad resultante forma un ángulo con la dirección Este de 31°, esto es, su dirección y sentido resultan definidos por: Este 31° Norte, curso que debe seguir el piloto.

Ejemplo 3. Una avioneta pequeña vuela a 150 km/h si hay quietud en el aire, cuando hay viento de 25 km/h que sopla desde el suroeste. Qué curso tendrá que seguir el piloto y que tiempo tardará en llegar a su destino, situado a 200 km al norte

Solución. Sea $\vec{v}_1$ el vector velocidad de la avioneta y $\vec{v}_2$ el vector velocidad del viento.



Entonces: $\vec{v}_1 = 150(0,1) = 25(0,6)$

$\vec{v}_2 = 25(\text{Cos}45^\circ,\text{Sen}45^\circ) = \frac{25}{2}(\sqrt{2},\sqrt{2})$

La velocidad resultante es:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \frac{25}{2}(\sqrt{2},12+\sqrt{2})$$

y su dirección: $\text{Tg}\alpha = \dfrac{12+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 9.46$

$$\rightarrow \alpha = 63^\circ 14'$$

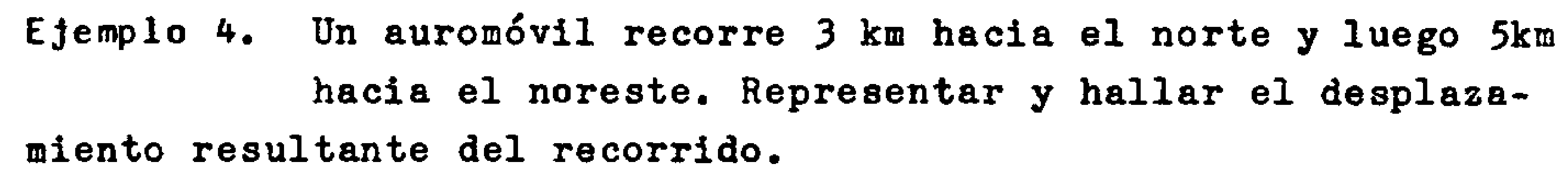
Entonces: $90^\circ - 63^\circ 14' = 6^\circ 46'$

Luego, el curso que debe seguir el piloto es: Norte $6^\circ 46'$ Oeste.

$$||\vec{v}|| = (25/2)\sqrt{(\sqrt{2})^2+(12+\sqrt{2})^2} = 25\sqrt{37+6\sqrt{2}} = 25(6.7)$$

El tiempo que tardará en llegar a su destino es:

$$t = \frac{e}{||\vec{v}||} = \frac{200}{25(6.7)} = \frac{8}{6.7} = 1.2 \text{ horas}$$



Ejemplo 4. Un auromóvil recorre 3 km hacia el norte y luego 5km hacia el noreste. Representar y hallar el desplazamiento resultante del recorrido.

Solución. $\overline{AP}=\vec{a}$ representa el desplazamiento de 3 km hacia el norte

$\overline{PQ}=\vec{b}$ representa el desplazamiento de 5km hacia el noreste.

$\overline{AQ}=\vec{c}$ representa el desplazamiento resultante del recorrido, o sea: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Las componentes de cada vector son:

$$\vec{a} = 3(\text{Cos}90^\circ,\text{Sen}90^\circ) = 3(0,1) = (0,3)$$

$$\vec{b} = 5(\text{Cos}45^\circ,\text{Sen}45^\circ) = \frac{5}{2}(\sqrt{2},\sqrt{2})$$

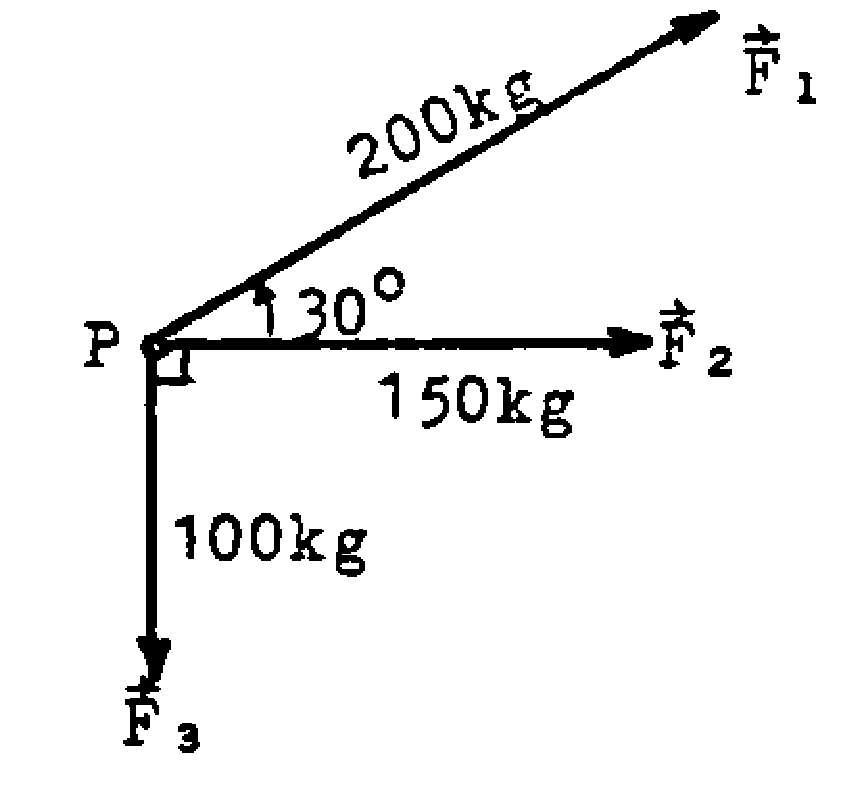
$$\vec{c} = (\tfrac{5}{2}\sqrt{2},3+\tfrac{5}{2}\sqrt{2}) = \tfrac{1}{2}(5\sqrt{2},6+5\sqrt{2})$$

$$\rightarrow ||\vec{c}|| = \frac{1}{2}\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(6+5\sqrt{2})^2} = \sqrt{34+15\sqrt{2}} = 7.43 \text{ km}$$

Para hallar la dirección aplicamos: $\text{Tg}\alpha = \dfrac{6+5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 1.846$

de donde: $\alpha=61^\circ 35'$. Luego, la dirección y sentido del vector $\vec{c}$ queda definido por: Este $61^\circ 35'$ Norte

Ejemplo 5. Sobre un sólido puntual en P actúan tres fuerzas coplanares que se muestra en la figura. Hallar la fuerza necesaria que se debe aplicar en P para mantener en reposo al sólido.



Solución. $\vec{F}_1 = 200(\text{Cos}30°,\text{Sen}30°) \Rightarrow$
$\rightarrow \vec{F}_1 = 100(\sqrt{3},1)$

$\vec{F}_2 = 150(\text{Cos}0°,\text{Sen}0°) = 150(1,0)$

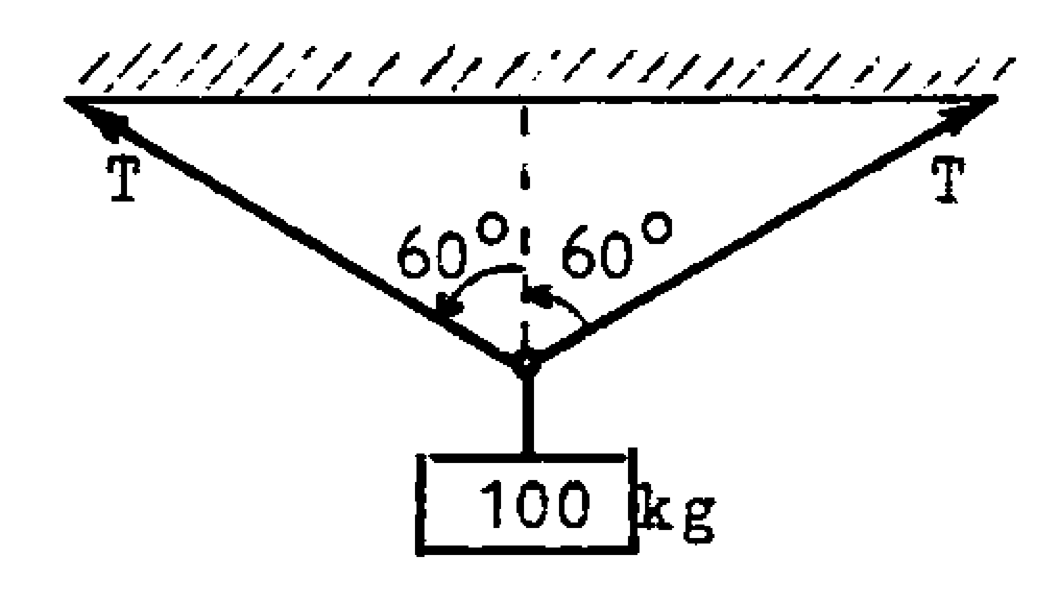
$\vec{F}_3 = 100(\text{Cos}270°,\text{Sen}270°) = 100(0,-1)$

La resultante es la suma de estas fuerzas, esto es:

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 50(3+2\sqrt{3},0) \rightarrow ||\vec{R}||=50(3+2\sqrt{3}) = 323$ kg

Como se puede observar, el sentido de $\vec{R}$ es el mismo de $\vec{F}_2$; luego la fuerza que se debe aplicar al sólido puntual para mantenerlo en reposo es $-\vec{R}$, es decir, el vector opuesto a la resultante o a $\vec{F}_2$.

Ejemplo 6. Un sólido de 100 kg de peso está suspendido por el centro mediante una cuerda, tal como se indica en la figura. Hallar la tensión $\vec{T}$ en la cuerda.



Solución. Sea: $||\vec{T}_1||=||\vec{T}_2||=||\vec{T}||$

$\vec{T}_1=||\vec{T}||(\text{Cos}30°,\text{Sen}30°)$

$\rightarrow \vec{T}_1 = ||\vec{T}||(\sqrt{3}/2,1/2)$

$\vec{T}_2 = ||\vec{T}||(\text{Cos}150°,\text{Sen}150°) = ||\vec{T}||(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

$\vec{w} = 100(\text{Cos}270°,\text{Sen}270°) = 100(0,-1)$

Pero, en la figura: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -\vec{w}$

$\rightarrow ||\vec{T}||(\sqrt{3}/2,1/2) + ||\vec{T}||(-\sqrt{3}/2,1/2) = -100(0,-1)$

$\rightarrow ||\vec{T}||(0,1) = 100(0,1) \leftrightarrow ||\vec{T}||=100$ kg

Ejemplo 7. Se da el siguiente sistema de fuerzas: $\vec{F}_1$ de 50 kg que actúa de A(1,5) a B(-3,8) y $\vec{F}_2$ de 65 kg que actúa de C(-3,-5) a D(2,7). Hallar la resultante $\vec{R}$ del sistema y el trabajo realizado por $\vec{R}$ al desplazarse de P(4,3) a Q(9,5).

Solución. $\overline{AB} = (-3,8)-(1,5) = (-4,3) \rightarrow ||\overline{AB}||=5$

$\overline{CD} = (2,7)-(-3,-5) = (5,12) \rightarrow ||\overline{CD}||=13$

Luego, si: $\vec{F}_1 = r\overline{AB} \rightarrow ||\vec{F}_1||=r||\overline{AB}|| \rightarrow 50=r(5) \leftrightarrow r=10$

$\vec{F}_2 = t\overline{CD} \rightarrow ||\vec{F}_2||=t||\overline{CD}|| \rightarrow 65=t(13) \leftrightarrow t=5$.

Entonces: $\vec{F}_1=10(-4,3)$ y $\vec{F}_2=5(5,12)$

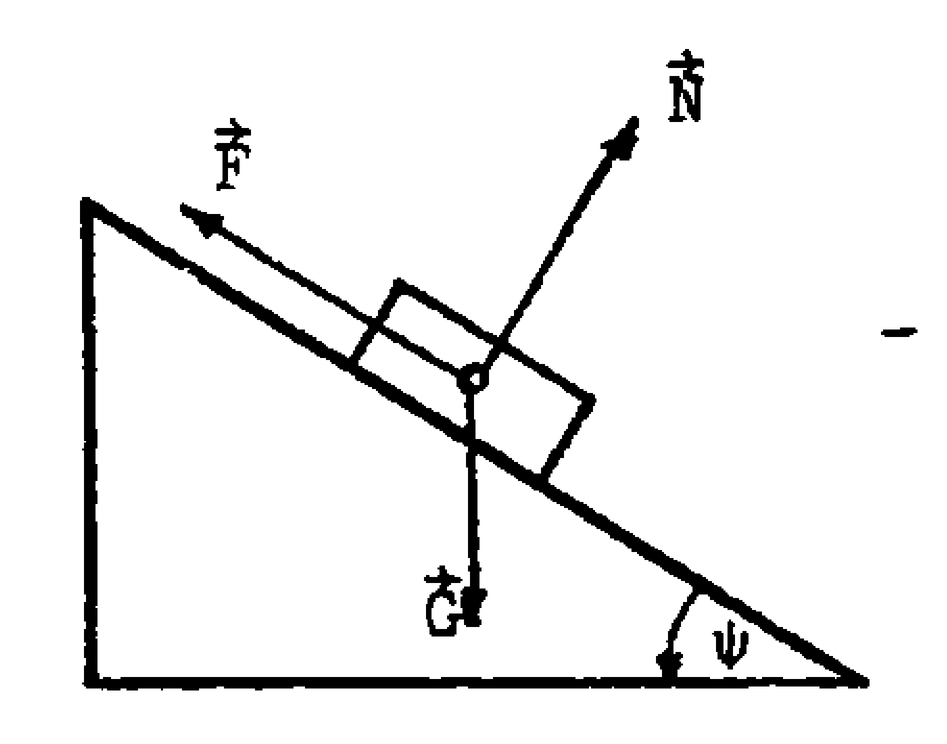
Por tanto: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-15,90) = 15(-1,6)$

El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ al recorrer un espacio $\vec{s}$ está definido por la ecuación: $w = \vec{F}.\vec{s}$ (escalar)

Luego, si: $\vec{s} = \overline{PQ} = (9,5)-(4,3) = (5,2)$

$\rightarrow w = 15(-1,6).(5,2) = 105$ unidades de trabajo

Ejemplo 8. Sobre un cuerpo que descansa en un plano inclinado, actúan tres fuerzas: la gravedad, $\vec{G}$, una fuerza $\vec{N}$ de reacción que es perpendicular al plano y una fuerza $\vec{F}$ de fricción que se dirige hacia arriba en la dirección del plano



Se define coeficiente de fricción u, como la razón de $||\vec{F}||$ a $||\vec{N}||$ cuando el ángulo ψ de inclinación es tal que el cuerpo está a punto de deslizarse. Demostrar que: $u = Tg\psi$.

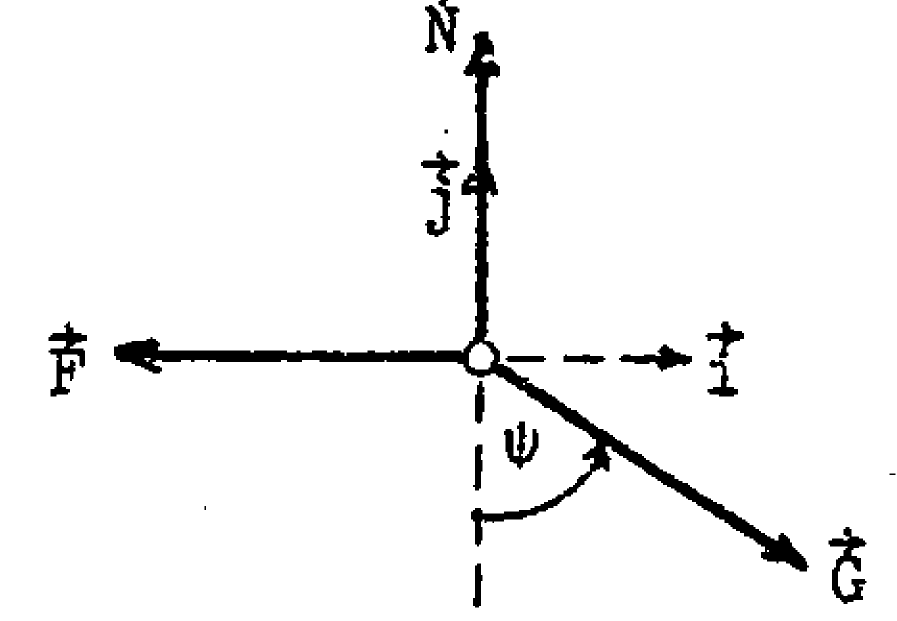
Solución. Usando una base ortogonal $\vec{i}$, $\vec{j}$, con $\vec{i}$ en la dirección del plano, se tiene:

$\vec{N} = ||\vec{N}||(\text{Cos}90^o,\text{Sen}90^o) = ||\vec{N}||(0,1)$

$\vec{F} = ||\vec{F}||(\text{Cos}180^o,\text{Sen}180^o)=||\vec{F}||(-1,0)$

$\vec{G} = ||\vec{G}||\left[\text{Cos}(270+\psi),\text{Sen}(270^o+\psi)\right]$

$= ||\vec{G}||(\text{Sen}\psi,-\text{Cos}\psi)$



Estando el cuerpo en reposo, entonces según la 2da ley de Newton, se tiene:

$\vec{N}+\vec{F}+\vec{G} = \theta \rightarrow ||\vec{N}||(0,1) + ||\vec{F}||(-1,0) = -||\vec{G}||(\text{Sen}\psi,-\text{Cos}\psi)$

$$\leftrightarrow \begin{cases} -||\vec{F}|| = -||\vec{G}||\text{Sen}\psi \\ ||\vec{N}|| = ||\vec{G}||\text{Cos}\psi \end{cases}$$

Dividiendo estas igualdades obtenemos: $\dfrac{||F||}{||N||} = \dfrac{\text{Sen}\psi}{\text{Cos}\psi}$

$\therefore u = Tg\psi$

Ejemplo 9. Un cuerpo de 500 lb de peso está suspendido como se indica en la figura. Determinar cada una de las fuerzas q' se ejercen sobre el punto C.

A
30°
B
C
500 lb

Solución. Sean $\vec{W}$, $\vec{T}$ y $\vec{Q}$ las fuerzas que actúan en el punto C.

$\rightarrow\ \vec{W} = 500(\text{Cos}270^\circ, \text{Sen}270^\circ) = 500(0,-1)$

$\vec{T} = ||\vec{T}||(\text{Cos}150^\circ, \text{Sen}150^\circ) = ||\vec{T}||(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$\vec{Q} = ||\vec{Q}||(\text{Cos}0^\circ, \text{Sen}0^\circ) = ||\vec{Q}||(1,0)$

$\vec{T}$ 30° C $\vec{Q}$ $\vec{W}$

Estando las fuerzas en equilibrio, la segunda ley de Newton establece que:

$$\vec{W} + \vec{T} + \vec{Q} = \theta$$

$\rightarrow\ 500(0,-1) + ||\vec{T}||(-\sqrt{3}/2, 1/2) + ||\vec{Q}||(1,0) = \theta$

$\rightarrow\ ||\vec{T}||(-\sqrt{3}/2, 1/2) + ||\vec{Q}||(1,0) = 500(0,1) \rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}||\vec{T}|| + ||\vec{Q}|| = 0 \\ \frac{1}{2}||\vec{T}|| = 500 \end{cases}$

de donde: $||\vec{T}|| = 1000$ lb y $||\vec{Q}|| = 500\sqrt{3}$ lb

EJERCICIOS

1. Un avión recorre 200 km hacia el oeste y luego 150 km oeste 60° norte. Hallar el desplazamiento resultante, gráfica y analíticamente. Rp. 304.1 km. Oeste 25°17' Norte

2. A qué distancia y en que dirección del punto de partida se encuentra una persona que recorre 20m hacia el Este 30° Sur; 50m hacia el Oeste; 40m hacia el Noreste, y 30m hacia el Oeste 60° Sur. Rp. 20.9m, Oeste 21°39' Sur

3. Un hombre que se dirige hacia el Sur a 15 km/h observa que el viento sopla del Oeste. Aumenta su velocidad a 25 km/h y le parece que el viento sopla del Suroeste. Determinar la velocidad del viento así como su dirección y sentido.
Rp. 18 km/h, Oeste 56°10' Norte

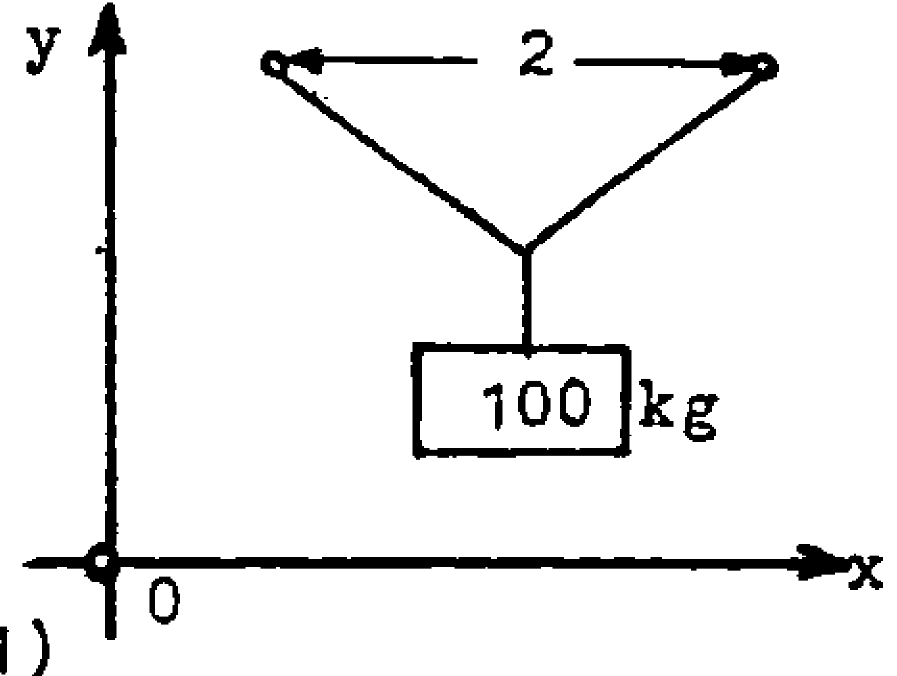
4. Dos ciudades A y B están situadas una frente a la otra en las dos orillas de un río de 8 km de ancho, siendo la velocidad del agua de 4 km/h. Un hombre en A quiere ir a la ciudad C que se encuentra a 6 km aguas arriba de B y en la misma ribera. Si la embarcación que utiliza tiene una velocidad máxima de 10 km/h y desea llegar a C en el menor tiempo posible, qué dirección debe tomar y cuánto tiempo emplea en conseguir su propósito. Rp. Debe seguir una trayectoria rectilínea formando un ángulo de $34^{\circ}28'$ con la dirección de la corriente. t=1h25m.

5. Un río tiene 500m de ancho y fluye a una velocidad de 4 km/h Un hombre puede remar a una velocidad de 3 km/h. Si parte de un punto A y rema hacia la orilla opuesta, cuál es el punto más lejano río arriba que puede alcanzar en la orilla opuesta. En qué dirección deberá navegar? Rp. (2000/3)m, $36^{\circ}52'$

6. Hallar la resultante de los siguientes desplazamientos: 10m hacia el Noroeste; 20m hacia el Este 30° Norte; 35m hacia el Sur. Rp. 20.65m, Este $60^{\circ}15'$ Sur

7. Dos fuerzas de magnitudes 8 y 10 kg actúan sobre una partícula a un ángulo de 45°. Hallar la dirección y la magnitud de la resultante. Rp. $19^{\circ}51'$, 16.6 kg

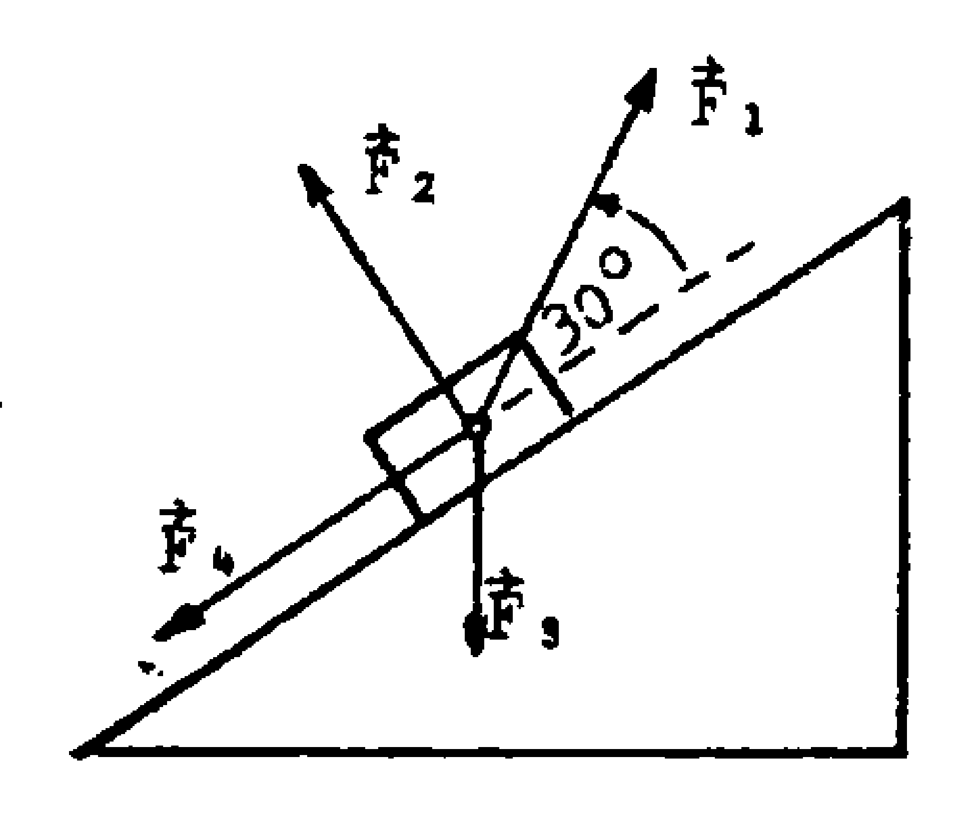
8. Un peso de 100 kg está suspendido de una cuerda flexible de 5m que une a dos soportes separados entre si 2m. Determinar las fuerzas resultantes en cada soporte si el sistema coordenado se escoge como se muestra en la figura. Rp. $\vec{F}_1=50(2/\sqrt{21},1)$, $\vec{F}_2=50(-2/\sqrt{21},1)$



9. Dado el siguiente sistema de fuerzas: $\vec{F}_1$ de 70 kg que actúa de A(2,3) a B(5,-1) y $\vec{F}_2$ de 357 kg, que actúa de C(3,-9) a D(-5,6). Hallar la resultante $\vec{R}$ del sistema y el trabajo realizado por $\vec{R}$ al desplazarse de P(5,-1) a Q(9,1).

Rp. $\vec{R}=7(-18,37)$, w=14 unidades

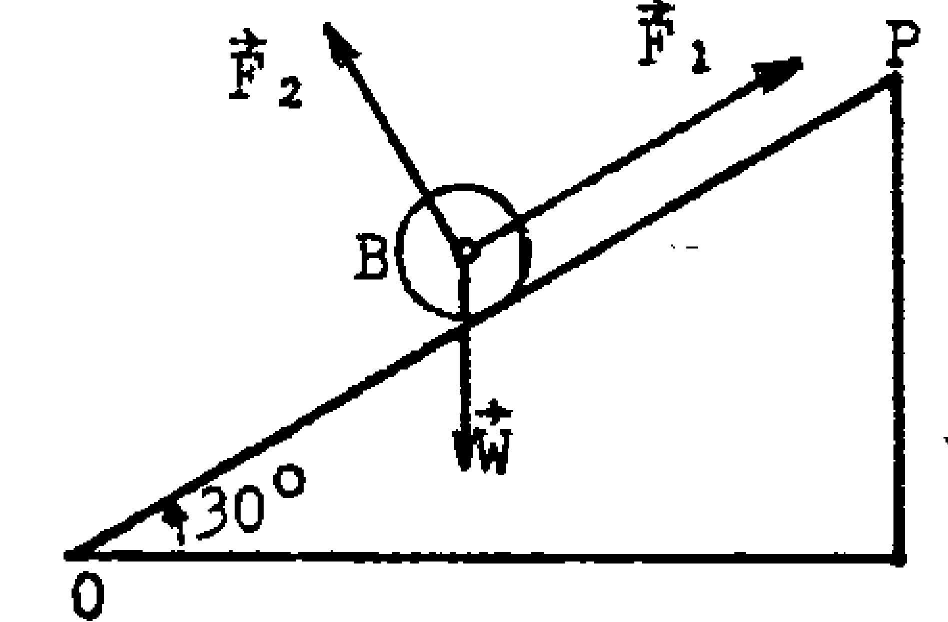
10. Un peso de 250 kg descansa en un plano con inclinación de 30° relativa a la horizontal. En él actúan una fuerza $\vec{F}_1$ con una magnitud de 200 kg que se dirige hacia arriba a lo largo de una recta que forma un ángulo de 20° con el plano; la fuerza gravitacional $\vec{F}_3$ que actúa hacia abajo; una fuerza de reacción $\vec{F}_2$ que actúa perpendicularmente con respecto al plano y una fuerza $\vec{F}_4$ que actúa hacia abajo en la dirección del plano. Hallar $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$.



Rp. $\vec{F}_2=148(0,1)$, $\vec{F}_4=63(-1,0)$

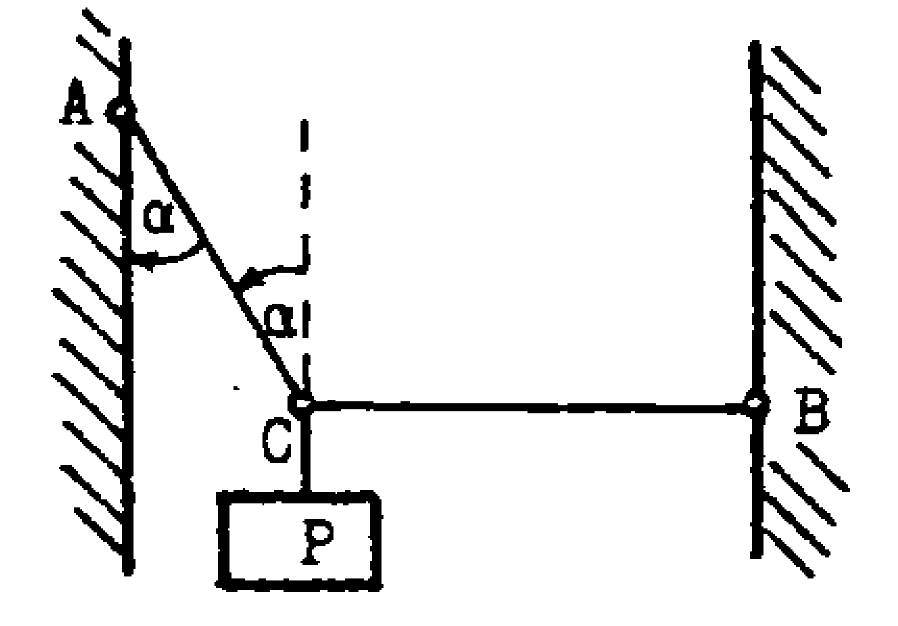
11. Un barril está sostenido sobre un plano inclinado $\overline{OP}$ por la fuerza $\vec{F}_1$ que actúa paralelamente al plano y por otra fuerza $\vec{F}_2$ que actúa perpendicularmente a él. Si el peso del barril es de 300 kg ($\vec{W}$) y el plano forma un ángulo de 30° con la horizontal, hallar: $||\vec{F}_1||$ y $||\vec{F}_2||$.

Rp. 150 kg; $150\sqrt{3}$ kg



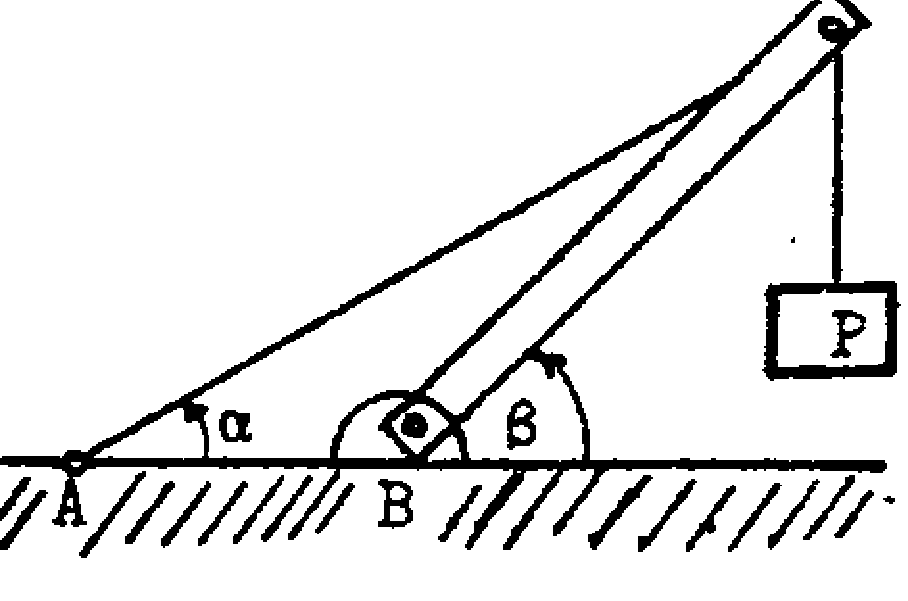
12. Un cuerpo de 540 kg de peso está suspendido como se indica en la figura. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, si $\alpha=30^\circ$.

Rp. $360\sqrt{3}$ kg, $180\sqrt{3}$ kg

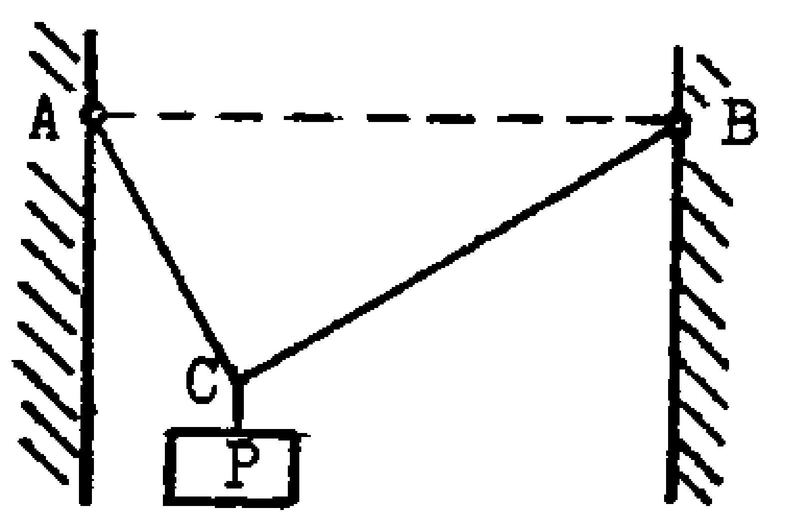


13. Se levanta un cuerpo de 200 kg de peso a velocidad constante, como se indica en la figura. Determinar cada una de las fuerzas ejercidas sobre el punto C, si $\alpha=30^\circ$ y $\beta=45^\circ$.

Rp. $245(\sqrt{3}+1)$ kg; $200(\sqrt{3}+1)$ kg



14. Un peso de 100 kg está suspendido de alambres como se indica en la figura. La distancia $\overline{AB}$ es 20 pies, $\overline{AC}$ es 10 pies y $\overline{CB}=10\sqrt{3}$ pies. Qué fuerzas ejercen $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ sobre el nudo C?.



Ecuaciones Vectoriales de la Recta

1.26 RECTAS EN EL PLANO

Al hacer el estudio de puntos del plano y su relación con los vectores resulta útil denotar al vector que va del origen a un punto A del plano mediante la letra mayúscula $\vec{A}$ o minúcula $\vec{a}$, con una flecha en la parte superior.

Es bien conocido que dos puntos definen una recta. Veremos como se puede emplear este hecho para obtener la ecuación vectorial de una recta L. En la Figura 22 se muestra la recta L, que contiene a los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, junto con los vectores de posición $\vec{P}_1=(x_1,y_1)$ y $\vec{P}_2=(x_2,y_2)$. Nótese que el vector $\vec{a}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$ tiene una representación geométrica que está sobre L y que por lo tanto es paralelo a dicha recta.

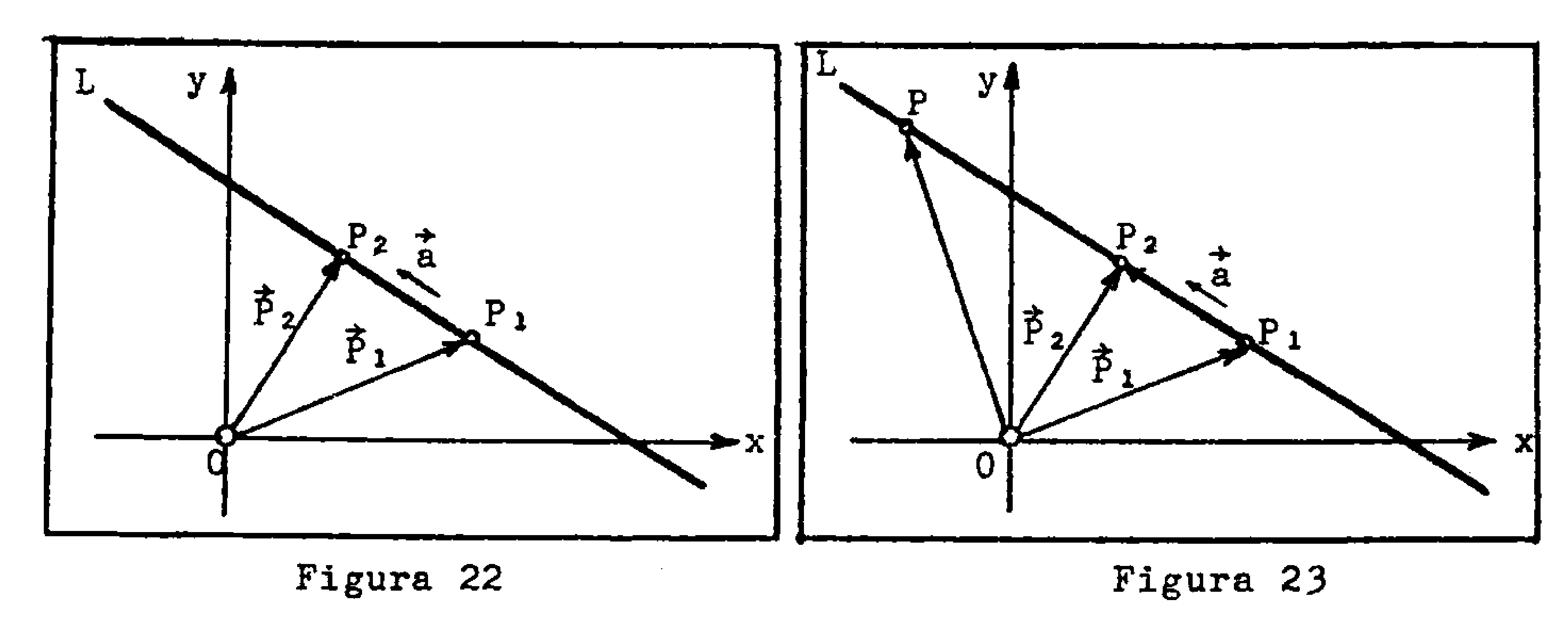


Figura 22 Figura 23

En la Figura 23 se muestra la misma configuración, excepto que se ha añadido al punto genérico $P(x,y)$ sobre la recta L y se ha trazado el vector correspondiente $\vec{P}=(x,y)$. Si P está sobre L, el vector $\vec{P}-\vec{P}_1$ es paralelo al vector $\vec{a}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$, entonces podemos escribir:

$$\vec{P} - \vec{P}_1 = t(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

o bien:

$$L: \vec{P} = \vec{P}_1+t(\vec{P}_2-\vec{P}_1), \quad t\in R \qquad (29)$$

El conjunto de puntos que están sobre L se puede especificar mediante:

$$L = \{\vec{P} \in R^2 / \vec{P} = \vec{P}_1 + t\vec{a} \ , \ t \in R\} \qquad (30)$$

El escalar t es llamado *parámetro*, por ello a la ecuación (23) se le llama, *ecuación paramétrica vectorial ordinaria* de la recta que pasa por P_1 y P_2.

EJEMPLO 1. Hallar la ecuación paramétrica vectorial de la recta L que pasa por $P_1(-3,1)$ y $P_2(1,4)$. Trácese un diagrama.

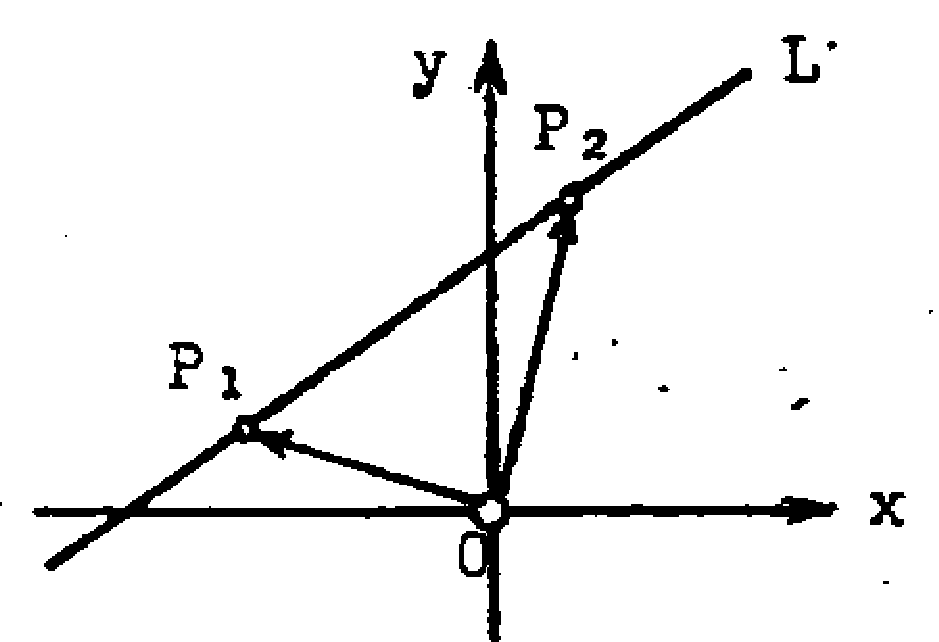
Solución. Tenemos: $\vec{P}_1=(-3,1)$ y $\vec{P}_2=(1,4)$

$\rightarrow \vec{P}_2-\vec{P}_1 = (1,4)-(-3,1)$

$= (4,3)$

Según (28), la ecuación paramétrica vectorial de L es:

$L: \vec{P}=(-3,1)+t(4,3), \ t \in R$



1.27 SEGMENTOS DE RECTA

Si el conjunto de valores permitidos de t se restringe a un intervalo cerrado $\{t/a \leq t \leq b\}$, entonces la gráfica de la ecuación (29) es un *segmento de recta*.

En particular si t=0, entonces $P_2=P_1$ y $P(x,y)=P_1(x_1,y_1)$. Si t=1, entonces $P=P_2$ y $P(x,y)=P_2(x_2,y_2)$. Por tanto, como se indica en la Figura 24, a medida que t recorre el intervalo $0 \leq t \leq 1$, el punto $P(x,y)$ recorre el segmento de recta desde $P_1(x_1,y_1)$ hasta $P_2(x_2,y_2)$, de modo que el segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ queda definida por la ecuación:

$$\overline{P_1P_2} = \{\vec{P} \in R^2 / \vec{P} = \vec{P}_1 + t(\vec{P}_2 - \vec{P}_1), \ 0 \leq t \leq 1\} \qquad (31)$$

Figura 24

Los demás puntos de la recta corresponden a valores de t tales que: $t<0$ y $t>1$.

Se puede emplear la ecuación (29) para calcular las coordenadas de un punto P que está sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$ y que está a una

distancia r dada de P_1 sobre la medida del segmento $\overline{P_1P_2}$, esto es:

$$\vec{P} = \vec{P}_1+r(\vec{P}_2-\vec{P}_1),\ 0\leq t\leq 1 \qquad (32)$$

EJEMPLO 2. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento que une $P_1(5,-3)$ y $P_2(3,1)$.

Solución. Si M es punto medio de $\overline{P_1P_2}$, se tomará $r=1/2$ en la ecuación (32). Entonces:

$$\vec{M} = (5,-3) + \frac{1}{2}[(3,1)-(5,-3)] = (5,-3) + \frac{1}{2}(-2,4)$$

de donde: $\vec{M}=(4,-1)$. Por tanto: $M(4,-1)$

EJEMPLO 3. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de recta cuyos extremos son $P_1(-3,7)$ y $P_2(4,1)$.

Solución. $P_2-P_1=(4,1)-(-3,7)=(7,-6)$

Supongamos que S y T sean los puntos de trisección del segmento P_1P_2, entonces los puntos de este segmento estan dados por:

$$\vec{P} = (-3,7)+r(7,-6),\ r\in[0,1]$$

Para el punto S, $r=1/3$

$\rightarrow S = (-3,7) + \frac{1}{3}(7,-6) = (-\frac{2}{3},5)$

Para el punto T: $r=2/3$

$\rightarrow T = (-3,7) + \frac{2}{3}(7,-6) = (\frac{5}{3},3)$

P_1 S T P_2

EJEMPLO 4. Demostrar que los puntos: $\frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$ y $\frac{1}{3}P_1 + \frac{2}{3}P_2$ trisecan al segmento $\overline{P_1P_2}$.

Demostración. En efecto, por definición:

$$\overline{P_1P_2} = \{P=P_1+r(P_2-P_1)/\ r\in[0,1]\} \qquad (\alpha)$$

Supongamos que: $S = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$ y $T = \frac{1}{3}P_1 + \frac{2}{3}P_2$

Luego: $S = P_1 + \frac{1}{3}P_2 - \frac{1}{3}P_1 = P_1 + \frac{1}{3}(P_2-P_1)$, $\frac{1}{3}\in[0,1]$

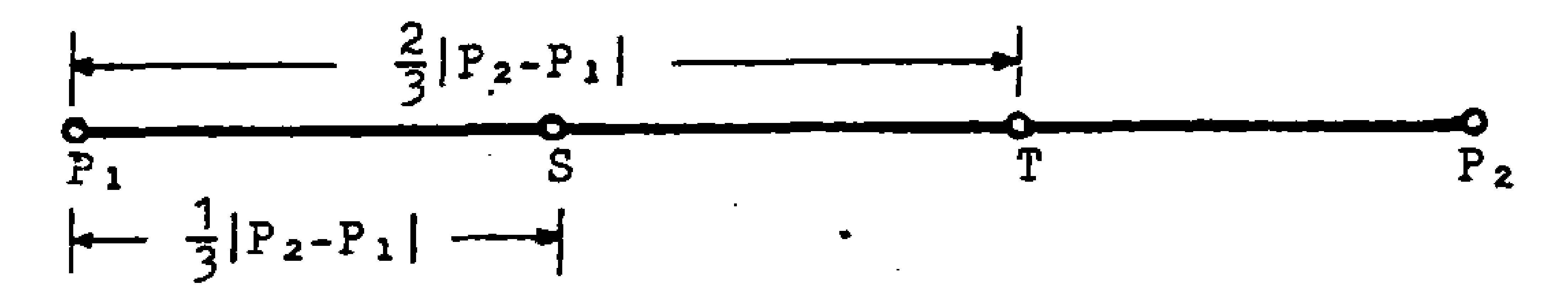
$T = P_1 + \frac{2}{3}P_2 - \frac{2}{3}P_1 = P_1 + \frac{2}{3}(P_2-P_1)$, $\frac{2}{3}\in[0,1]$

Entonces, por (α), S y T pertenecen al segmento $\overline{P_1P_2}$.

Entonces: $d(P_1,S) = |S-P_1| = \frac{1}{3}|P_2-P_1|$

$d(P_1,T) = |T-P_1| = \frac{2}{3}|P_2-P_1|$

Por consiguiente, S y T trisecan al segmento $\overline{P_1P_2}$.



Observación. Si se escribe la ecuación (29) en términos del parámetro t y de las coordenadas de P_1, P_2 y P tenemos:

$$L: (x,y) = (x_1,y_1) + t[(x_2,y_2)-(x_1,y_1)]$$
$$= (x_1,y_1) + t(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)$$
$$= [x_1+t(x_2-x_1)\ ,\ y_1+t(y_2-y_1)]$$

Esta ecuación vectorial equivale a las ecuaciones:

$$L: \begin{cases} x = x_1+t(x_2-x_1) \\ y = y_1+t(y_2-y_1) \end{cases} ,\ t\varepsilon R \qquad (33)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de sistema de *ecuaciones paramétricas cartesianas* de la recta que pasa por P_1 y P_2.

EJEMPLO 5. Obtener el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por los puntos $P_1(-2,3)$ y $P_2(5,1)$.

Solución. Según la ecuación (33): $x=-2+t(5+2)$, $y=3+t(1-3)$

Por tanto: $L: \begin{cases} x = -2+7t \\ y = 3-2t \end{cases}$

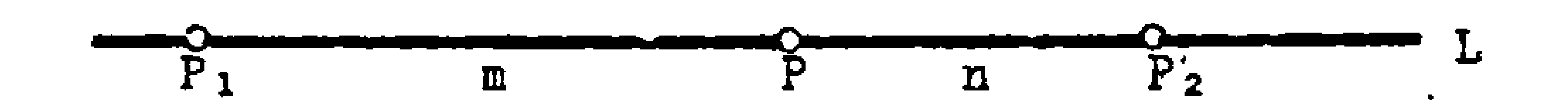
1.29 DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Consideremos P como un punto cualquiera sobre la recta L que pasa por los puntos P_1 y P_2 y que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $\frac{m}{n}$, esto es:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Entonces, la ecuación vectorial que define al punto P es:

$$\vec{P} = \frac{n}{m+n}\vec{P}_1 + \frac{m}{m+n}\vec{P}_2 \ , \ m\neq -n$$



En efecto, de (1): $\overline{P_1P} = (\frac{m}{n})\overline{PP_2}$

$$= (\frac{m}{n})(\overline{P_1P_2} - \overline{P_1P})$$

de donde: $(m+n)\overline{P_1P} = m\overline{P_1P_2} \rightarrow (m+n)(\vec{P}-\vec{P}_1) = m(\vec{P}_2-\vec{P}_1)$

$\rightarrow (m+n)\vec{P} - (m+n)\vec{P}_1 = m\vec{P}_2 - m\vec{P}_1$

$$\therefore \ \vec{P} = \frac{n}{m+n}\vec{P}_1 + \frac{m}{m+n}\vec{P}_2 \ , \ m\neq -n \qquad (34)$$

Observaciones. (1) Si m y n tienen el mismo signo, es decir, $\frac{m}{n}>0$ entonces P es interior al segmento $\overline{P_1P_2}$.

(2) Si m y n tienen signos diferentes, esto es: $\frac{m}{n}<0$, entonces el punto P es exterior al segmento $\overline{P_1P_2}$, y ocurre que:

a) Si $|\frac{m}{n}|<1$, entonces P estará más cerca de P_1.

b) Si $|\frac{m}{n}|>1$, entonces P estará más cerca de P_2.

EJEMPLO 6. Dados los puntos $P_1(-3,3)$ y $P_2(2,8)$, hallar el punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón 2:3.

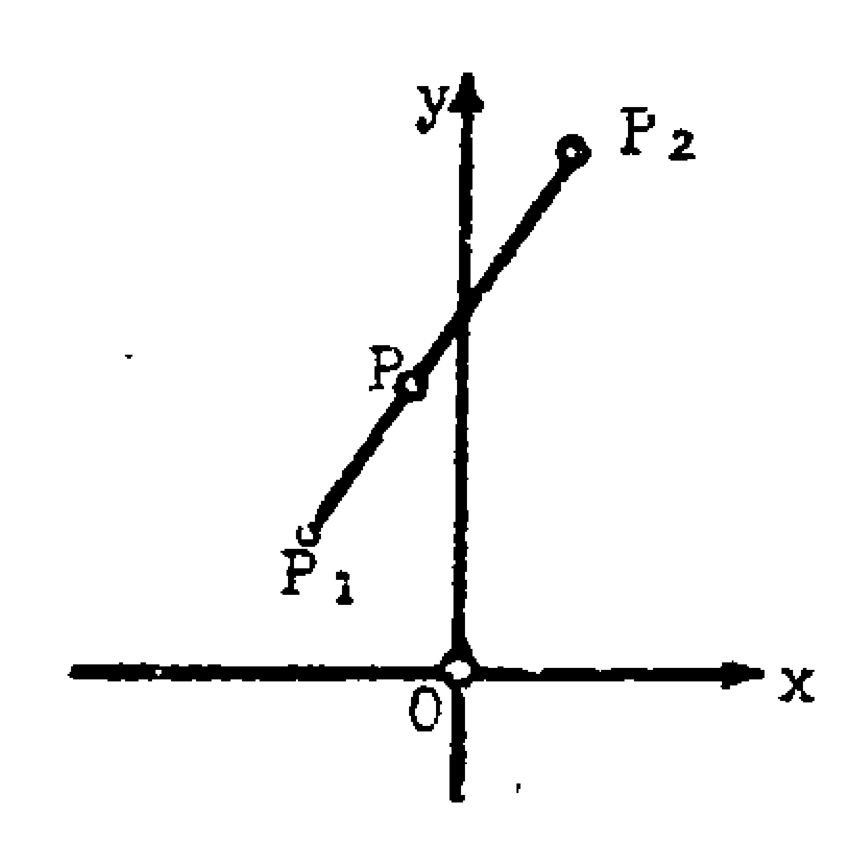
Solución. Tenemos: $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$

$\rightarrow m=2 \ , \ n=3 \ , \ m+n=5$

Como la razón es positiva, el punto P estará en el interior de $\overline{P_1P_2}$.

Luego, según (34): $\vec{P} = \frac{3}{5}\vec{P}_1 + \frac{2}{5}\vec{P}_2$

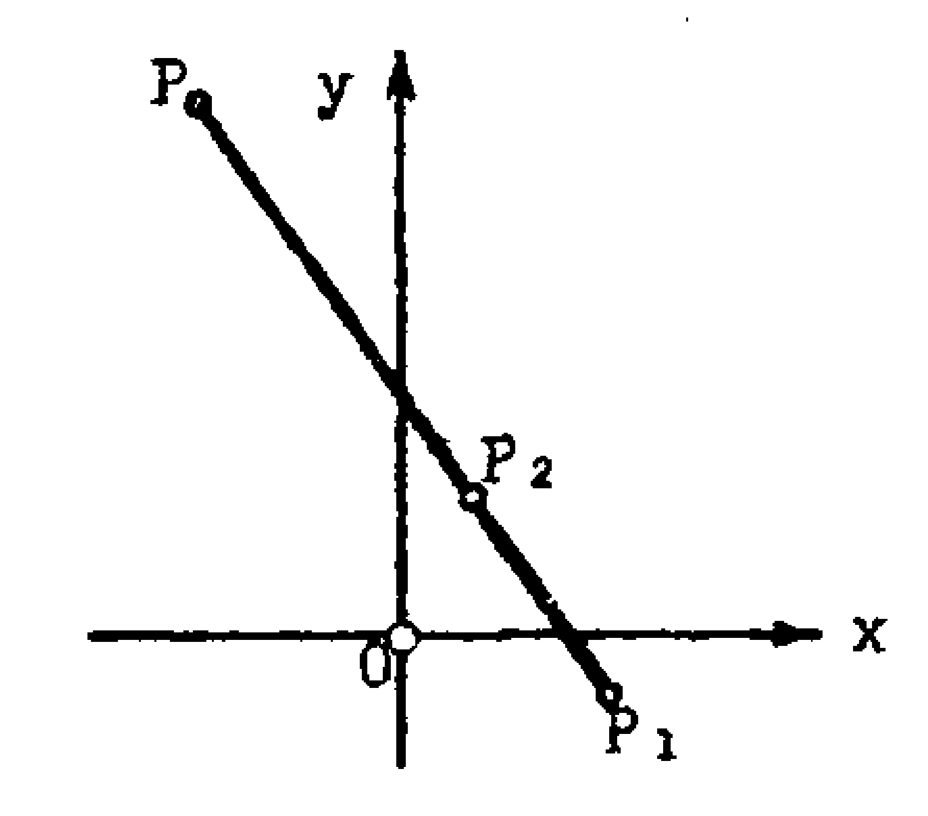
$\rightarrow P = \frac{3}{5}(-3,3) + \frac{2}{5}(2,8) = (-1,5)$



EJEMPLO 7. Dados los puntos $P_1(3,-1)$ y $P_2(1,2)$, hallar el punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón (-3):2.

Solución. Aquí: $\frac{m}{n} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \rightarrow m=-3, \ n=2 \ , \ m+n=-1$

Siendo la razón negativa y $|-\frac{3}{2}|>1$, entonces P es exterior al segmento $\overline{P_1P_2}$ y está más cerca de P_2.



Según (34): $P = \frac{2}{-1}(3,-1) + \frac{-3}{-1}(1,2)$

$= -2(3,-1) + 3(1,2)$

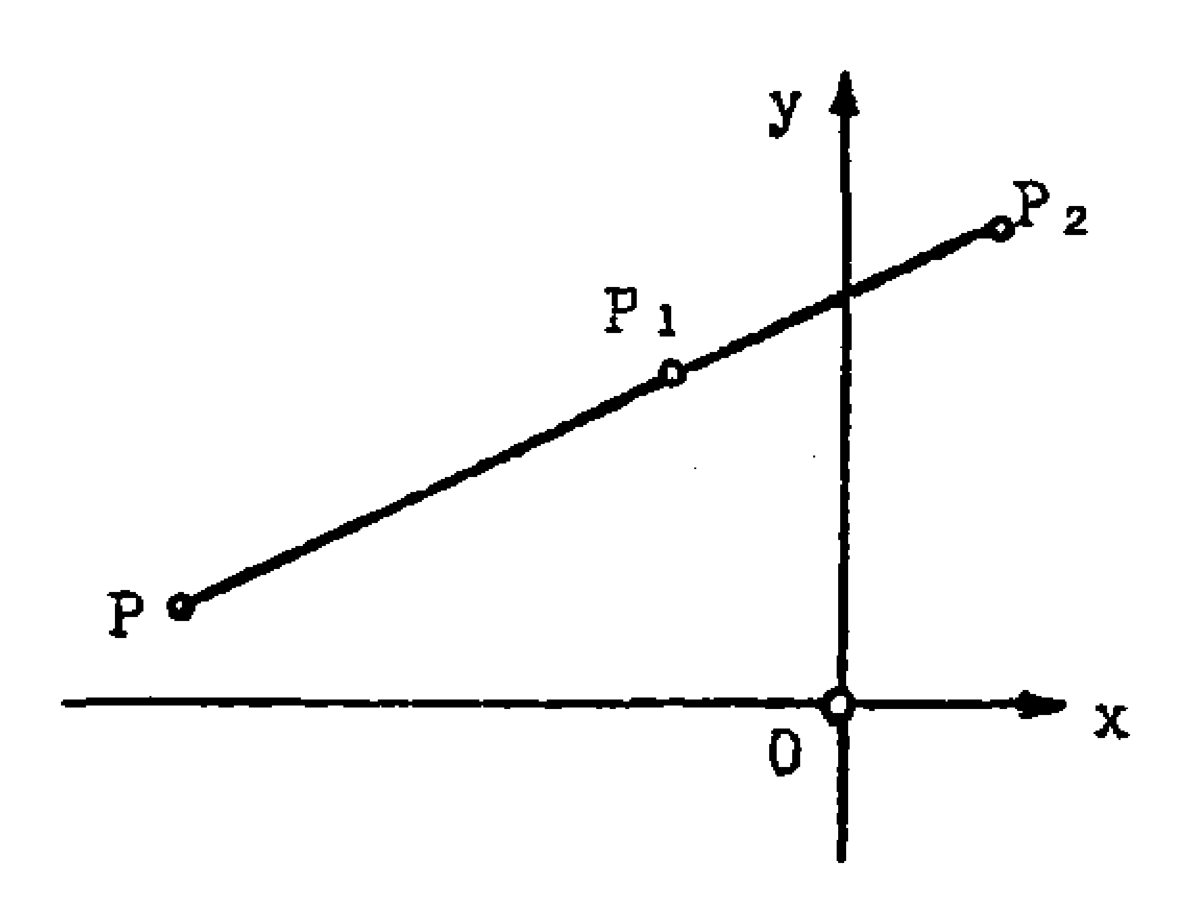
$= (-3,8)$

EJEMPLO 8. Si $P_1(-2,4)$ y $P_2(2,6)$, hallar las coordenadas de P, que divide al segmento P_1P_2 en la razón $3:(-5)$.

Solución. Tenemos: $\frac{m}{n} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$

$\rightarrow m=3,\ n=-5,\ m+n=-2$

Siendo la razón negativa y $|-\frac{3}{5}|<1$, el punto P es exterior al segmento $\overline{P_1P_2}$ y está más cerca de P_1.



Según (34): $P = \frac{-5}{-2}(-2,4) + \frac{3}{-2}(2,6)$

$= 5(-1,2) - 3(1,3)$

$= (-8,1)$

EJEMPLO 9. Un triángulo tiene por vértices $A(-2,-3)$, $B(2,8)$ y $C(5,2)$. Por el punto $D(16/5,28/5)$ que pertenece al lado $\overline{BC}$ se traza una paralela a $\overline{AB}$ que corta al lado $\overline{AC}$ en el punto E. Hallar las coordenadas de E.

Solución. Supongamos que: $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$

$\rightarrow m(\vec{C}-\vec{D}) = n(\vec{D}-\vec{B})$

$\rightarrow m(\frac{9}{5},-\frac{18}{5}) = n(\frac{6}{5},-\frac{12}{5})$

de donde: $3m(1,-2) = 2n(1,-2) \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$

Como $\overline{DE}\,||\,\overline{BA}$, entonces E divide a $\overline{AC}$ en la misma razón, esto es: $\overline{AE}:\overline{EC} = 2:3$

Luego, según la ecuación (34) se tiene:

$$\vec{E} = (\frac{n}{m+n})\vec{A} + (\frac{m}{m+n})\vec{C} = \frac{3}{5}(-2,-3) + \frac{2}{5}(5,2) = (\frac{4}{5},-1)$$

$$\therefore\ E(4/5,-1)$$

EJERCICIOS

1. Hallar la ecuación paramétrica vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que contiene a los puntos dados P_1 y P_2.

   a) $P_1(4,-2)$, $P_2(4,3)$ Rp. $L: P=(4,-2)+t(0,5)$

   b) $P_1(-7.2)$, $P_2(-3,-1)$ Rp. $L: P=(-7,2)+t(4,-3)$

   c) $P_1(2a,b)$, $P_2(3a,2b)$ Rp. $L: P=(2a,b)+t(a,b)$

2. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos dados P_1 y P_2.

   a) $P_1(-3,6)$, $P_2(12,-15)$ Rp. $S(2,-1)$, $T(7,-8)$

   b) $P_1(3,-4)$, $P_2(-9,2)$ Rp. $S(-1,-2)$, $T(-5,0)$

   c) $P_1(-3,7)$, $P_2(4,1)$ Rp. $S(-\frac{2}{3},5)$, $T(\frac{5}{3},3)$

3. Hallar la ecuación vectorial del segmento que une a $P_1(2,5)$ con el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(5,1)$ y $B(7,-3)$. Rp. $P=(2,5)+t(4,-6)$, $t\varepsilon[0,1]$

4. Hallar la ecuación vectorial del segmento que une el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(-5,2)$ y $B(1,6)$ con el punto que está a 1/3 de la distancia que separa a $R(-2,6)$ y $T(1,9)$. Rp. $P=(-2,4)+t(1,3)$, $t\varepsilon[0,1]$

5. Obtener la ecuación paramétrica vectorial del segmento que une al punto que está a 2/3 de la distancia que separa a los puntos $A(8,-2)$ y $B(2,7)$ con el punto que está a una cuarta parte de la distancia que separa a los puntos $C(1,6)$ y $D(9,10)$. Rp. $P=(4,4)+t(-1,3)$, $t\varepsilon[0,1]$

6. Demostrar que las coordenadas (x,y) y (x',y') de los puntos que trisecan el segmento de extremos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ están dadas por:

$$x = \frac{2x_1+x_2}{3} , \quad y = \frac{2y_1+y_2}{3} \quad ; \quad x' = \frac{x_1+2x_2}{3} , \quad y' = \frac{y_1+2y_2}{3}$$

7. Si $P_1(-3,8)$ y $P_2(12,-32)$, hallar los puntos que dividen al segmento $\overline{P_1P_2}$ en cinco partes iguales.
Rp. (0,0), (3,-8), (6,-16), (9,-24)

8. Dados los puntos $P_1(3,-2)$ y $P_2(-7,8)$, hallar el punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón 2:3. Rp. P(-3,4)

9. Dados los puntos $P_1(-7,6)$ y $P_2(1,5)$, hallar el punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón (-2):1. Rp. P(9,4)

10. Si $P_1(2,-3)$ y $P_2(5,-7)$, hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón 3:(-4). Rp. P(-7,9)

11. El segmento de extremos A(-2,-4) y B(1,0) es dividido por P Q en las razones (-3):2 y (-2):3 respectivamente. Hallar la norma de $\overline{QP}$. Rp. 25

12. Un triángulo tiene por vértices A(-1,-3), B(3,5) y C(5,-1). Por el punto E(15/4,11/4) del lado $\overline{BC}$ se traza una paralela a $\overline{AC}$ que corta al lado $\overline{AB}$ en el punto D. Hallar las coordenadas del punto D. Rp. D(3/2,2)

13. Los vértices de un cuadrilátero son A(-4,6), B(-2,-1),C(8,0) y D(6,11). Hallar la razón m:n=$\overline{BP}$:$\overline{PD}$ en que la diagonal $\overline{AC}$ divide a $\overline{BD}$, donde P es el punto de intersección de las diagonales. Rp. 3/5

14. En un triángulo ABC, el punto P(4/5,5) divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\overline{AP}$:$\overline{PB}$=2:3. El punto Q(27/5,22/5) divide al segmento $\overline{BC}$ en la razón $\overline{BQ}$:$\overline{QC}$=2:3. El punto R(14/5,3/5) divide al segmento $\overline{AC}$ en la razón $\overline{AR}$:$\overline{RC}$=3:2. Hallar los vértices del triángulo. Rp. A(-2,3), B(5,8), C(6,-1)

15. Sean A(-2,5) y B(1,-2) los extremos del segmento $\overline{AB}$ y P(x,y) un punto que resulta de prolongar AB por B. Si $\overline{BP}$=4$\overline{AB}$, determinar las coordenadas de P. Rp. P(13,-30)

16. Dos vértices de un triángulo ABC son A(2,1) y B(5,3). Hallar las coordenadas del tercer vértice si la intersección de las medianas es G(3,4). Rp. C(2,8)

1.29 PUNTOS QUE ESTAN SOBRE UNA RECTA

Anteriormente vimos que la ecuación vectorial, o que el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas, de una recta L queda determinada si se conocen las coordenadas de dos puntos de L. Esta ecuaciones también se pueden determinar si se conocen un punto de L y un *vector de dirección* de L.

En efecto, sea la recta L que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$ y que es paralela al vector no nulo $\vec{a}=(h,k)$. (Figura 25). Ahora bien, un punto cualquiera P(x,y) está sobre L si y sólo si el vector $\vec{P}-\vec{P}_1$ es paralelo al vector $\vec{a}$, esto es:

$$\vec{P} - \vec{P}_1 = t\vec{a}$$

o bien:

$$L: \vec{P} = \vec{P}_1+t\vec{a} \qquad (35)$$

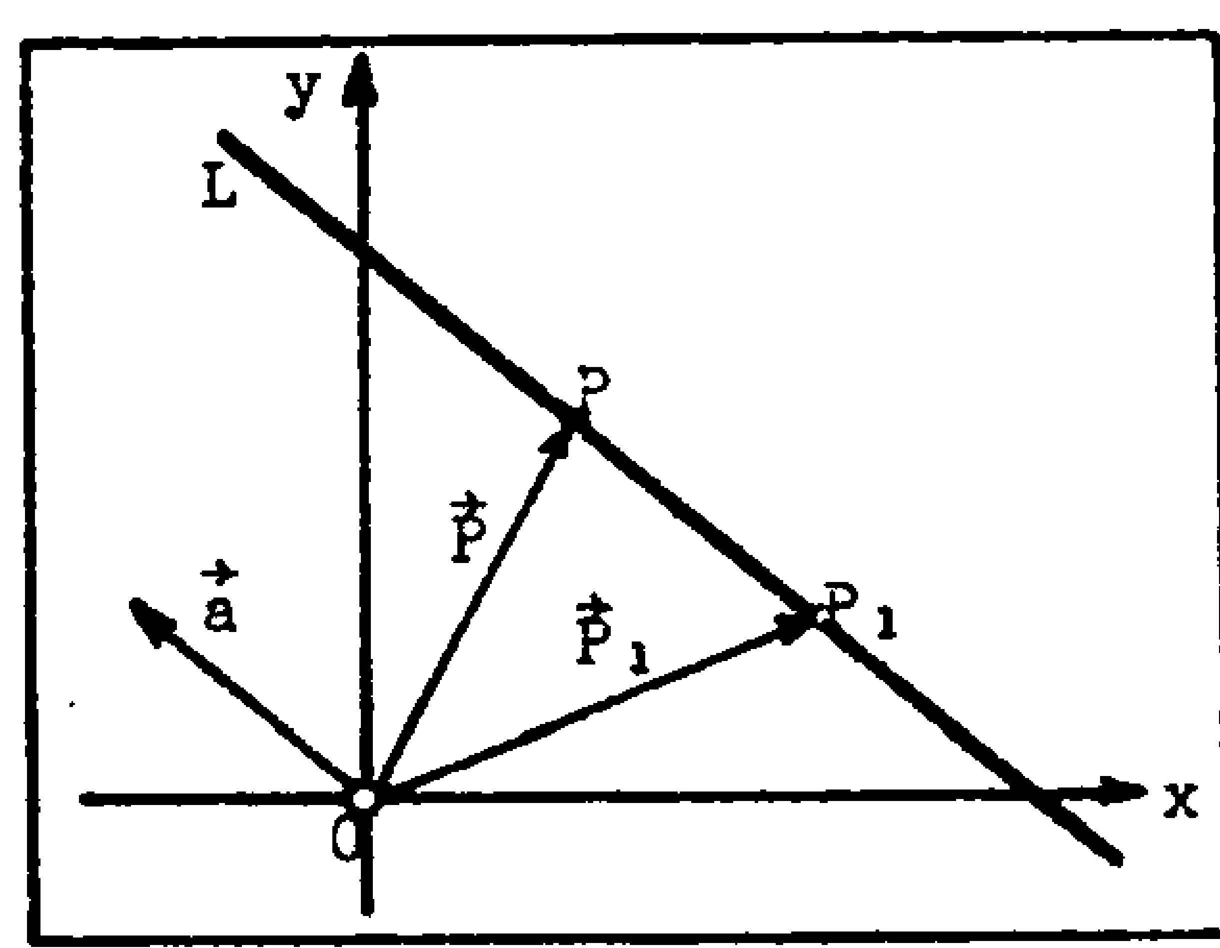


Figura 25

La ecuación (35) recibe el nombre de *ecuación paramétrica vectorial ordinaria* de la recta que pasa por P_1 y es paralela al vector $\vec{a}$. Puesto que la ecuación (35) se puede escribir de la forma:

$$L: (x,y) = (x_1,y_1)+t(h,k) \ , \ t\varepsilon R$$

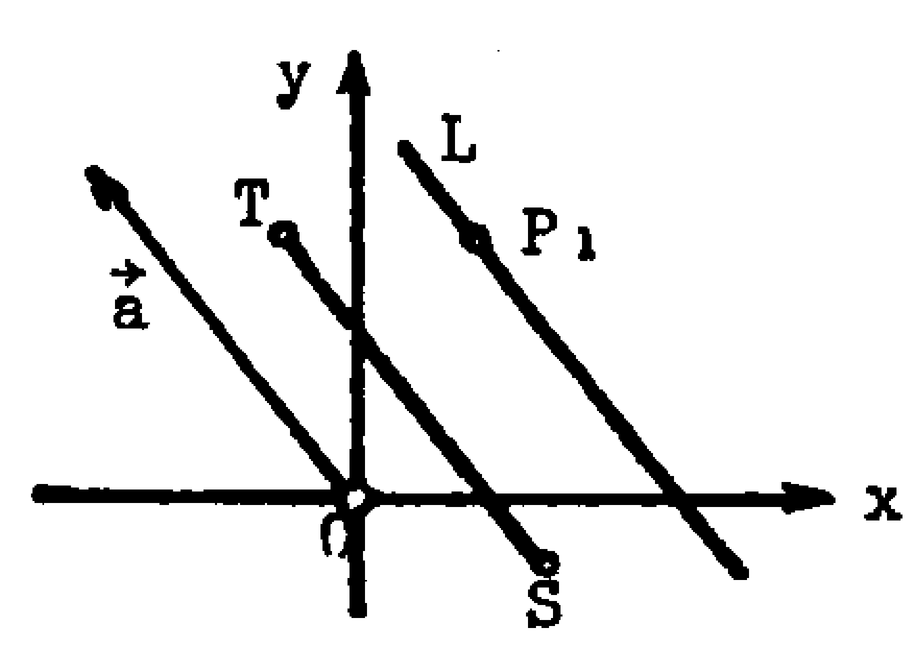
el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas correspondientes de L es:

$$L: \begin{cases} x = x_1+th \\ y = y_1+tk \end{cases} \ , \ t\varepsilon R \qquad (36)$$

EJEMPLO 1. Hallar la ecuación vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por $P_1(2,4)$ y es paralela al vector que va de S(3,-1) a T(-1,4).

Solución. Sea $\vec{a} = \overline{ST} = \vec{T}-\vec{S}$

$= (-1,4)-(3,-1) = (-4,5)$



Según (35) la ecuación vectorial de la recta es, L: P=(2,4)+t(-4,5), $t\varepsilon R$

y por (36), $L: \begin{cases} x = 2-4t \\ y = 4+5t \end{cases} \ , \ t\varepsilon R$

EJEMPLO 2. Identificar a la recta $L: \begin{cases} x = -1+5t \\ y = 2-3t \end{cases}$, $t\in R$

Solución. Por inspección: $L: (x,y) = (-1+5t, 2-3t)$, $t\in R$

$$= (-1,2)+t(5,-3),\ t\in R$$

Entonces, L es la recta que pasa por (-1,2) y es paralela al vector $\vec{a}=(5,-3)$.

EJEMPLO 3. Determinar si el punto S(3,-1) está o no sobre la línea recta que pasa por $P_1(2,-5)$ y es paralela al vector $\vec{a}=(1,2)$.

Solución. La ecuación vectorial de la recta es,

$L: P=(2,-5)+t(1,2),\ t\in R$

Si $S(3,-1)\in L \rightarrow (3,-1) = (2,-5)+t(1,2)$ (α)

$$\rightarrow (3,-1) = (2+t,-5+2t) \leftrightarrow \begin{cases} 3=2+t \rightarrow t=1 \\ -1=-5+2t \rightarrow t=2 \end{cases}$$

Puesto que $1\neq 2$, no existe un número real t para el cual se cumple la ecuación (α), por lo que el punto S(3,-1) no está sobre L

Existe otra manera más sencilla para llegar a esta conclusión y es como sigue:

Si $\vec{a}$ es el vector de dirección de una recta L que contiene al punto P_1, entonces un punto P está sobre L si y sólo si $\vec{P}-\vec{P}_1$ es paralelo al vector $\vec{a}$.

Recordemos que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si y sólo si: $\vec{a}.\vec{b}^{\perp}=0$. Estos resultados se pueden combinar para obtener el siguiente enunciado y determinar si un punto P(x,y) está sobre una recta L.

DEFINICION 9. Si $\vec{a}$ es un vector de dirección de la recta L que contiene al punto P_1, entonces un punto P está sobre L si y sólo si:

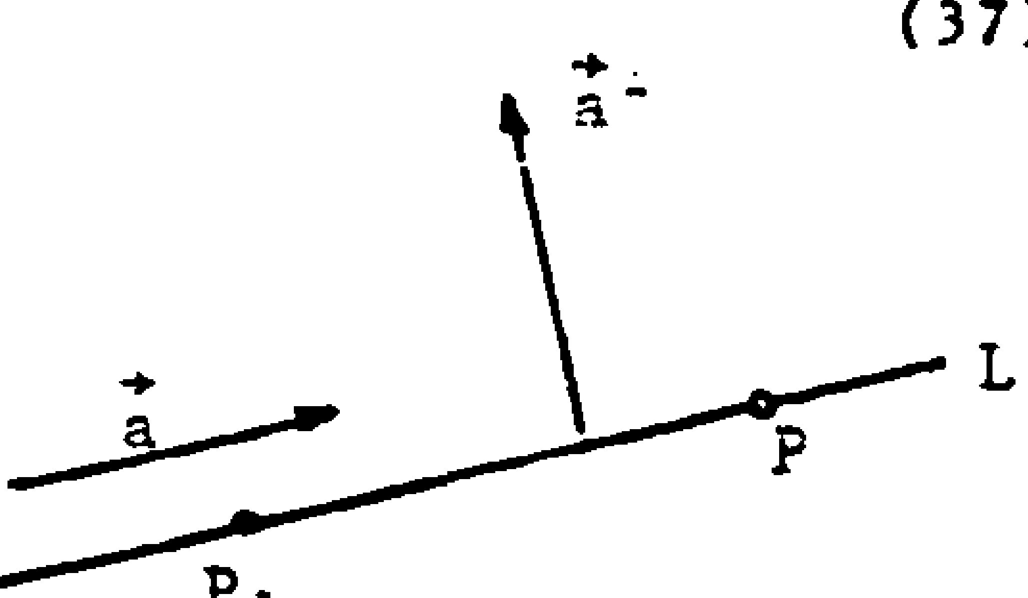
$$(\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{a}^{\perp} = 0 \tag{37}$$

En efecto, como $\vec{a}\perp\vec{a}^{\perp} \rightarrow \vec{a}^{\perp}\perp L$

Luego, $P\in L \leftrightarrow (\vec{P}-\vec{P}_1)||\vec{a}$

$\leftrightarrow (\vec{P}-\vec{P}_1)\perp\vec{a}^{\perp}$

$\leftrightarrow (\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{a}^{\perp} = 0$



Si designamos $\vec{a}^{\perp}=\vec{n}$ (vector normal),

la ecuación vectorial de la recta L se puede escribir:

$$L:\ \vec{n}.(\vec{P}-\vec{P}_1) = 0 \qquad (38)$$

Expresión que se conoce como la *ecuación normal* de la recta L.

EJEMPLO 4. Determinar si los puntos S(8,5) y T(-2,2) están sobre la recta L:P=(4,-1)+t(2,3).

Solución. Por inspección: $P_1=(4,-1)$ y $\vec{a}=(2,3) \rightarrow \vec{a}^{\perp}=(-3,2)$

Para el punto S: $\vec{S}-\vec{P}_1=(8,5)-(4,-1)=(4,6)$

Entonces: $(\vec{S}-\vec{P}_1).\vec{a}^{\perp} = (4,6).(-3,2) = -12+12 = 0$

Por tanto, $(\vec{S}-\vec{P}_1)||\vec{a}$ y luego el punto S está sobre la recta L.

Para el punto T: $\vec{T}-\vec{P}_1=(-2,2)-(4,-1)=(-6,3)$

Entonces: $(\vec{T}-\vec{P}_1).\vec{a}^{\perp} = (-6,3).(-3,2) = 18+6 = 24 \neq 0$

Luego $(\vec{T}-\vec{P}_1)||\vec{a}$, por tanto, el punto T no está sobre la recta L

EJEMPLO 5. Hallar la ecuación normal de la recta L: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-4t \end{cases}$

Solución. La ecuación vectorial de la recta dada es:

L: P=(1,2)+t(3,-4) , $t \in R$

Si $\vec{a}=(3,-4)||L \rightarrow \vec{a}^{\perp}=\vec{n}=(4,3)$ es el vector normal a L.

Luego, según (38): L: (4,3).[(x,y)-(1,2)]=0

$\leftrightarrow$ L: (4,3).(x-1,y-2)=0

Observación. Si el vector de dirección $\vec{a}$, en la ecuación $\vec{P} = \vec{P}_1 + t\vec{a}$ es un vector unitario, entonces para cualquier punto P sobre la gráfica de L, |t| es la distancia que separa P_1 de P. (Figura 26)

En efecto:

$$d(P_1,P) = ||\vec{P}-\vec{P}_1|| = ||t\vec{a}|| = |t|$$

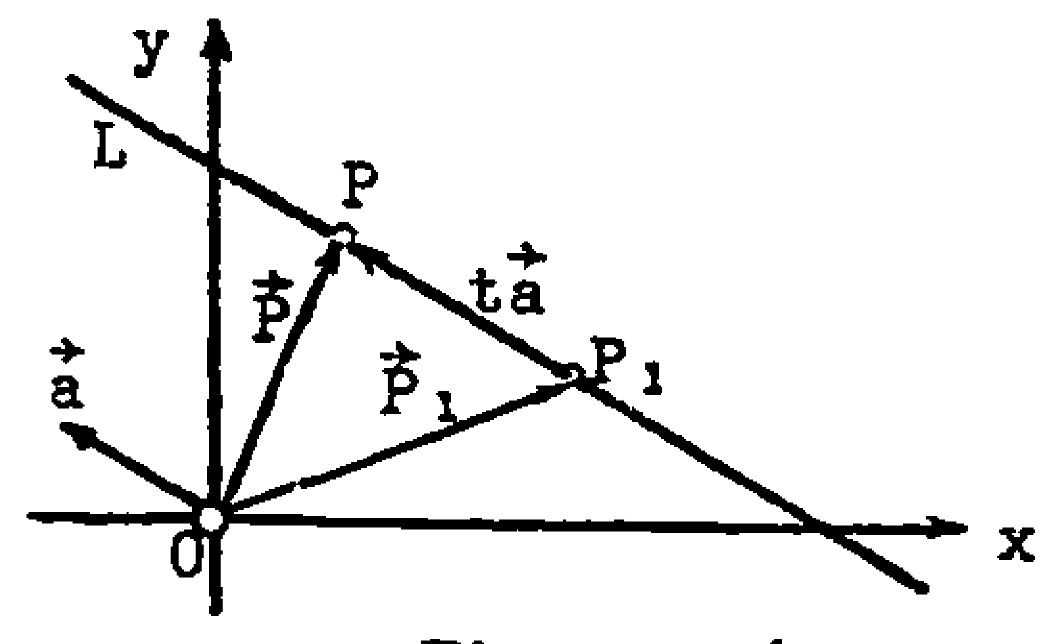


Figura 26

EJEMPLO 6. Dada la recta L:P=(-1,6)+t(1,4), obtener las coordenadas de los puntos de L que están a $2\sqrt{17}$ unidades de distancia del punto S(1,14).

Solución. En primer lugar veamos si S(1,14) está sobre L

En efecto,
$\vec{S}-\vec{P}_1 = (1,14)-(-1,6) = (2,8) \rightarrow (\vec{S}-\vec{P}_1).\vec{a}^{\perp} = (2,8).(-4,1) = 0$
Luego, el punto S está sobre L.

Ahora, un vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ es: $\vec{u} = \dfrac{(1,4)}{\sqrt{17}}$

Como $S\varepsilon L$, otra ecuación de L es: $\vec{P} = (1,4) + t\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}}, \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$

Se desea hallar las coordenadas de los puntos P(x,y) tales que:

$$|t| = 2\sqrt{17} \leftrightarrow t=2\sqrt{17} \text{ ó } t=-2\sqrt{17}$$

Para $t=2\sqrt{17} \rightarrow (x_1,y_1) = (1,14) + 2\sqrt{17}\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}}, \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right) = (3,22)$

Para $t=-2\sqrt{17} \rightarrow (x_2,y_2) = (1,14) - 2\sqrt{17}\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}}, \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right) = (-1,6)$

Por tanto, $P_1(3,22)$ y $P_2(-1,6)$ son los puntos buscados.

EJEMPLO 7. Una recta L pasa pasa por el punto $A(3k,k-2)$ y es ortogonal al vector $\vec{v}=(3/k,3)$, $k\neq0$; hallar los valores de k tales que el punto $B(5k,k^2-6)$ esté sobre L.

Solución. Sea $\vec{n}=\vec{v}$ el vector normal a L.
Según la definición 9, $B\varepsilon L \leftrightarrow (\vec{B}-\vec{A}).\vec{n} = 0$

Entonces: $(2k,k^2-k-4).(3/k,3) = 0$
de donde: $k^2-k-2=0 \leftrightarrow k=-1$ ó $k=2$

EJEMPLO 8. Sean los conjuntos:
$L_1=\{P=(-2+3t,3-t)/t\varepsilon R\}$ y $L_2=\{(1,3).[P-(1,2)]=0/P\varepsilon R^2\}$
Demostrar que L_1 y L_2 representan rectas y que $L_1=L_2$.

Demostración. En efecto, el conjunto L_1 se puede expresar como $L_1=\{P=(-2,3)+t(3,-1)/t\varepsilon R\}$, que por definición es una recta que pasa por $P_1(-2,3)$ y cuyo vector de dirección es $\vec{a}=(3,-1)$.
El conjunto L_2 es la forma normal de la ecuación de una recta cuyo punto de paso es $P_1(1,2)$ y cuyo vector de dirección es:

$$\vec{b}=(1,3)^{\perp}=(-3,1) \rightarrow L_2=\{P=(1,2)+s(-3,1),\ s\varepsilon R\}$$

Vemos que: $\vec{a} = -\vec{b} \rightarrow L_1||L_2$
Ahora debemos probar que $L_1\subset L_2$ y que $L_2\subset L_1$, para lo cual debemos verificar que: $P_1\varepsilon L_2$ y $P_2\varepsilon L_1$.

En efecto: si $P_1 \epsilon L_2 \rightarrow (\vec{P}_2-\vec{P}_1).\vec{n}_2 = (3,-1).(1,3) = 3-3 = 0$
Luego, $(\vec{P}_2-\vec{P}_1)||\vec{b} \rightarrow P_1 \epsilon L_2$, o sea: $L_1 \subset L_2$

Si $P_2 \epsilon L_1 \rightarrow (\vec{P}_1-\vec{P}_2).\vec{n}_1 = (-3,1).(1,3) = -3+3 = 0$
Luego, $(\vec{P}_1-\vec{P}_2)||\vec{a} \rightarrow P_2 \epsilon L_1$, o sea: $L_2 \subset L_1$
Por tanto, si $L_1 \subset L_2$ y $L_2 \subset L_1 \rightarrow L_1 = L_2$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 3, diga si el punto S está o no sobre la recta L cuya ecuación paramétrica vectorial se da.

1. $S(2,-1)$, L: $P=(1,2)+t(-1,3)$, $t \epsilon R$ — Rp. $S \epsilon L$
2. $S(3,2)$, L: $P=(1,1)+t(2,-3)$, $t \epsilon R$ — Rp. $S \notin L$
3. $S(-1,1)$, L: $P=(-2,-3)+t(1,4)$, $t \epsilon R$ — Rp. $S \epsilon L$

En los ejercicios del 4 al 6, identificar cada uno de los conjuntos en R^2 dado.

4. $\{(x,y)/x=2t+1,\ y=-3t+4,\ t \epsilon R\}$
5. $\{(x,y)/(1,2)+t(1,1),\ t \epsilon [0,1]\}$
6. $\{(x,y)/(-2,1).(x+3,y-4)=0\}$

7. Hallar la ecuación normal de la recta
   $L: \begin{cases} x=3t \\ y=1+5t \end{cases}$, $t \epsilon R$ — Rp. $L:(-5,3).(x,y-1)=0$

En los ejercicios del 8 al 10, determinar si las ecuaciones vectoriales dadas corresponden a la misma recta o no.

8. $P=(2,1)+t(3,-1)$, $P=(2,1)+t(-3,1)$ — Rp. Si
9. $P=(-1,-2)+t(-2,4)$, $P=(1,0)+t(1,-2)$ — Rp. No
10. $P=(2,3)+t(-1,2)$, $P=(1,5)+t(2,-4)$ — Rp. Si

11. Una recta L pasa por el punto $A(2k-1,3)$ y es ortogonal al vector $\vec{v}=(2,k+2)$; hallar los valores de k tales que $B(7k,k-2)$ esté sobre L. — Rp. $k=1$ ó $k=-8$

12. Una recta L pasa por el punto S(2k,3) y es paralela al vector $\vec{v}=(3,-4/k)$, $k\neq0$; hallar los valores de k tales que el punto $T(\frac{k}{2},\frac{3k^2+24}{8})$ pertenezca a L. Rp. $k=\pm4\sqrt{3}/3$

En los ejercicios 13-14, hallar las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 que están sobre la recta cuya ecuación paramétrica vectorial se da y que están a la distancia dada del punto S dado.

13. Sobre L:P=(4,-2)+t(1,1), $3\sqrt{2}$ unidades de S(4,-2)
Rp. $P_1(7,1)$, $P_2(1,-5)$

14. Sobre L:P=(-3,2)+t(2,-1), $2\sqrt{5}$ unidades de S(1,0)
Rp. $P_1(5,-2)$, $P_2(-3,2)$

1.31 PENDIENTE DE UNA RECTA

Por estudios anteriores de matemáticas sabemos que el cociente de la altura y la base de un segmento recibe el nombre de *pendiente del segmento*. Si designamos esta pendiente por m, se tendrá entonces que:

$$m = \frac{\text{altura}}{\text{base}}$$

Si $\vec{a}=(h,k)$ es el vector de dirección de una recta L que contiene al punto $P_1(x_1,y_1)$, entonces L tiene por ecuación vectorial:

$$L:P=P_1+t(h,k),\ t\epsilon R$$

Si hacemos t=1, vemos que las coordenadas de otro punto $P_2(x_2,y_2)$ que está sobre L se puede calcular sumando h y k a las coordenadas respectivas de P_1, esto es:

$$x_2=x_1+h \quad , \quad y_2=y_1+k$$

Por lo tanto, h y k son la base y altura del segmento P_1P_2, y si $h\neq0$, entonces $\frac{h}{k}$ es la pendiente de P_1P_2 y de la recta que lo contiene. (Figura 27)

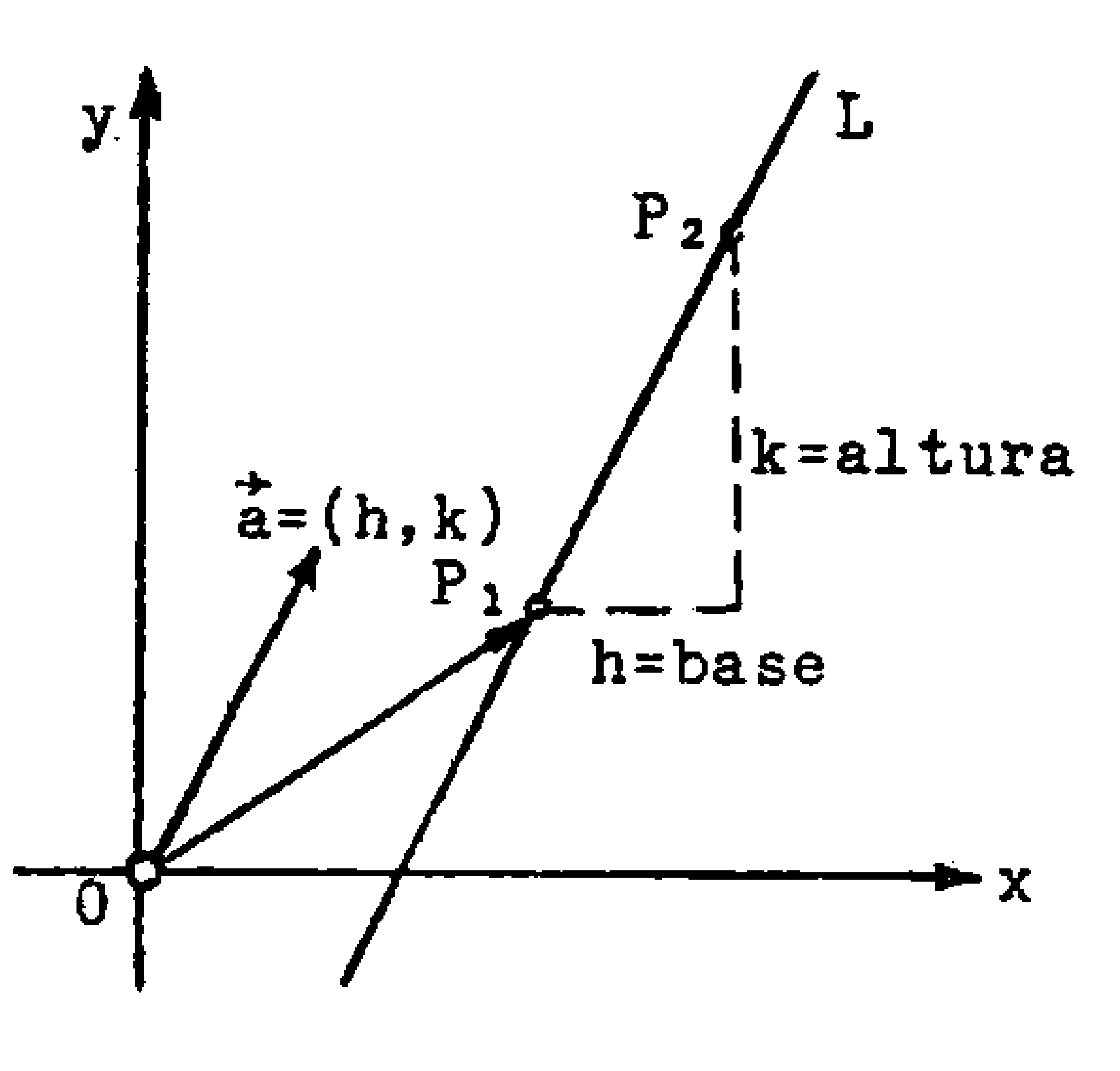


Figura 27

Por tanto, se define la *pendiente de una recta* como sigue:

DEFINICION 10. Si L es una recta tal que uno de sus vectores de direción es (h,k) con $h\neq0$, entonces la pendiente m de la recta L está dada por:

$$m = \frac{k}{h}$$

De esta definición podemos afirmar que m es la pendiente de una recta L si y sólo si (1,m), o bien (1,k/h), es un vector de dirección de L. Esto indica que la ecuación (35) se puede escribir de la forma:

$$L: P=P_1+t(1,m),\ t\epsilon R \qquad (39)$$

EJEMPLO 1. Calcular la pendiente de la recta L que pasa por los puntos $P_1(5,3)$ y $P_2(2,-6)$, y obtener la ecuación paramétrica vectorial de la forma de la ecuación (39) que describa esta recta.

Solución. El vector de dirección de la recta buscada es:
$\vec{a} = \vec{P}_2-\vec{P}_1 = (2,-6)-(5,3) = (-3,-9)$

Entonces, según la definición 10: $m = \frac{-9}{-3} = 3$

Como $P_1(5,3)\epsilon L$, entonces, una ecuación paramétrica vectorial de L es: $L: P=(5,3)+t(1,3),\ t\epsilon R$

Observaciones. (1) Puesto que un vector de dirección de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es:

$$\vec{a} = \vec{P}_2-\vec{P}_1 = (x_2-x_1,y_2-y_1)$$

se sigue que de la definición de pendiente, si $x_1\neq x_2$, entonces la pendiente de la recta L está dada por:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(2) Se dice que una recta con un vector de dirección de la forma (h,0), $h\neq0$, es una *recta horizontal* (paralela al eje X) y su pendiente es: $m = \frac{0}{h} = 0$.

(3) Si una recta tiene un vector de dirección de la forma (0,k), $k\neq0$, se dice que la recta es *vertical* (paralela al eje Y), y su pendiente m=h/0 no está definida.

DEFINICION 11. RECTAS PARALELAS

Dos rectas en el plano, $L_1: P=P_1+t\vec{a},\ t\in R$; $L_2: P=Q_1+r\vec{b}, r\in R$, son paralelas si y sólo si sus vectores de dirección son paralelos. Esto es:

$$L_1 || L_2 \leftrightarrow \vec{a} || \vec{b}$$

EJEMPLO 2. Determinar si la recta L_1 que pasa por $P_1(3,5)$ y $P_2(2,8)$ es paralela a la recta L_2 que pasa por $Q_1(-1,9)$ y $Q_2(7,-15)$. Obtener la ecuación paramétrica vectorial de cada una.

Solución. El vector de dirección de L_1 es: $\vec{a}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=(2,8)-(3,5)$ $\rightarrow \vec{a}=(-1,3)$, y el de L_2 es: $\vec{b}=\vec{Q}_2-\vec{Q}_1=(7,-15)-(-1,9)$ $\rightarrow \vec{b}=(8,-24)=-8(-1,3)$

Vemos que: $\vec{b}=r\vec{a} \rightarrow \vec{b}||\vec{a}$, por tanto: $L_2||L_1$

Como $P_1\in L_1 \rightarrow L_1: P=(3,5)+t(-1,3),\ t\in R$

$Q_1\in L_2 \rightarrow L_2: P=(-1,9)+s(-1,3),\ s\in R$

Observación. Si $L_1: P=P_1+t\vec{a}$ y $L_2: P=P_2+r\vec{b}$, entonces L_1 es coincidente con L_2, o bien:

$$L_1 = L_2 \leftrightarrow P_2\in L_1 \text{ y } \vec{a}||\vec{b}$$

EJEMPLO 3. Si L_1 contiene a $P_1(2,-5)$, L_2 contiene a $P_2(-1,-3)$ y L_1 y L_2 tienen ambas al vector $\vec{a}=(3,2)$ como vector de dirección; coinciden ambas rectas?

Solución. Si L_1 y L_2 tienen el mismo vector de dirección entonces son paralelas. Coincidirán si y sólo si P_1 y P_2, están sobre ambas rectas. Esto es:

$$L_1=L_2, \text{ si } (\vec{P}_2-\vec{P}_1)||\vec{a} \leftrightarrow (\vec{P}_2-\vec{P}_1).\vec{a}^{\perp} = 0$$

Entonces: $[(-2,-3)-(1,-5)].(-2,3) = (-3,2).(-2,3) = 12 \neq 0$

Por tanto, L_1 y L_2 no coinciden, es decir: $L_1\neq L_2$.

EJEMPLO 4. Determinar la pendiente de las siguientes rectas paralelas: $L_1=\{(x_1,y_1)+t(2,b)/t\in R,\ b>0\}$ y $L_2:(3,-2b).[P-(-1,5)]=0$.

Solución. Si $\vec{a}_1=(2,b)$ es el vector direccional de $L_1 \rightarrow m = \frac{b}{2}$

$\vec{n} = (3,-2b)$ es el vector normal de L_2.

Si $L_1||L_2 \rightarrow \vec{a}_1.\vec{n} = (2,b).(3,-2b) = 0$

$\rightarrow 6-2b^2=0 \leftrightarrow b=\sqrt{3}$ ó $b=-\sqrt{3}$

Por definición de L_1, elegimos $b=\sqrt{3}$

Por tanto, la pendiente de la rectas L_1 y L_2 es: $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$

EJEMPLO 5. Determinar m+n para que las rectas $L_1=\{(2,0)+t(m,1)/t\varepsilon R\}$ y $L_2=\{(\frac{1}{m},0)+s(-2,n)/s\varepsilon R\}$ sean coincidentes.

Solución. Por definición: $L_1=L_2. \leftrightarrow P_2\varepsilon L_1$ y $\vec{a}_1||\vec{a}_2$

Si $P_2\varepsilon L_1 \leftrightarrow (\vec{P}_2-\vec{P}_1).\vec{a}_1^{\perp}=0 \leftrightarrow [(\frac{1}{m},0)-(2,0)].(-1,m)=0$

$\leftrightarrow (\frac{1}{m}-2,0).(-1,m)=0$

de donde: $m = 1/2$

Si $\vec{a}_1||\vec{a}_2 \rightarrow \vec{a}_1.\vec{a}_2^{\perp}=0 \rightarrow (m,1).(-n,-2)=0$

$\rightarrow -mn-2=0 \rightarrow -(1/2)n=2 \rightarrow n=-4$

$\therefore m+n = -7/2$

EJEMPLO 6. Dadas las rectas $L_1=\{(x+1,4x-1)+t(x^2+x,-3x^2-2x+1)\}$ y $L_2=\{(2x+2,-2x+1)+s(-2x^2,2x^2+2x)\}$. Hallar $x\varepsilon R$ tal que L_1 y L_2 no sean coincidentes.

Solución. Sean $\vec{a}_1=(x^2+x,-3x^2-2x+1)$ y $\vec{a}_2=(-2x^2,2x^2+2x)$ los vectores de dirección no nulos de L_1 y L_2.

Si $\vec{a}_1\neq\theta \rightarrow [x(x+1),(-3x+1)(x+1)] \neq (0,0) \rightarrow x \neq -1$

$\vec{a}_2\neq\theta \rightarrow [-2x^2,-2x(x+1)] \neq (0,0) \rightarrow x \neq 0$

O sea, no existen L_1 y L_2 para x=-1 y x=0

Supongamos que L_1 y L_2 sean coincidentes, esto es:

$L_1 = L_2 \leftrightarrow P_1\varepsilon L_2$ y $\vec{a}_1||\vec{a}_2$

$\leftrightarrow (\vec{P}_2-\vec{P}_1).\vec{a}_2^{\perp}=0 \wedge \vec{a}_1.\vec{a}_2^{\perp}=0$

Si $(\vec{P}_2-\vec{P}_1).\vec{a}_2^{\perp}=0 \rightarrow (x+1,-6x+2).(-2x^2-2x,-2x^2)=0$

de donde: $x(x-1)(5x+1)=0 \leftrightarrow x=0$, $x=1$, $x=-1/5$

Pero como $x\neq0 \rightarrow x=1$ ó $x=-1/5$

Si $\vec{a}_1.\vec{a}_2^{\perp}=0 \rightarrow [x(x+1),(-3x+1)(x+1)].[-2x(x+1),-2x^2] = 0$

de donde: $-4x^2(x+1)(x-1)=0 \leftrightarrow x=0$, $x=-1$, $x=1$

Pero como $x\neq0$ y $x\neq-1 \rightarrow x=1$

Luego, $(x=1$ ó $x=-1/5) \wedge (x=1) = x=1$

Entonces: $\{-1/5,1\}\wedge\{1\} = \{1\}$

Luego, L_1 y L_2 son coincidentes si $x=1$.

Por tanto, L_1 y L_2 son no coincidentes si $x\varepsilon R-\{-1,0,1\}$

EJEMPLO 7. Hallar la ecuación normal de la recta L cuyos puntos equidistan de las rectas $L_1=\{(0,1)+t(4,2)/t\varepsilon R\}$ y $L_2=\{(0,-5)+r(4,2)/r\varepsilon R\}$.

Solución. Vemos que $\vec{a}_1=\vec{a}_2=2(2,1)$

Si $\vec{a}$ es el vector de dirección de L $\rightarrow$ $\vec{a}=(2,1)$

Además si $Q\varepsilon L$ $\rightarrow$ $Q = \frac{1}{2}(P_1+P_2) = \frac{1}{2}(0,-4) = (0,-2)$

Luego, la ecuación de la recta buscada es $L:\vec{a}^{\perp}.(\vec{P}-\vec{Q})=0$

$$\therefore\ L:(-1,2).[P-(0,2)]=0$$

EJEMPLO 8. Establecer el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

(1) Existe por lo menos un $k\varepsilon R$ tal que $L_1=\{(2,3)+t(6k,\frac{1}{2}-3k)\}$ sea paralela a la recta $L_2:x=0$

(2) $L_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\end{cases}$ y $L_2=\{(3,-1)+s(-2,2)\}$ $\rightarrow$ $L_1 = L_2$

(3) Existe por lo menos un $k\varepsilon R$ para que $L_1=\{(1,2)+r(k,3)\}$ y $L_2=\{(7,5)+s(1,-\frac{1}{2}k)\}$ son paralelas.

(4) Sea $L_1=\{P_1+t\vec{a}\}$ una recta no vertical. Si $Q_1\notin L_1$ y $L_2=\{Q_1+s\vec{a}\}$ entonces $L_1\cap L_2 \neq \phi$

Solución. (1) Dado que L_2 es una recta vertical, entonces para que L_1 sea paralela a L_2 es necesario que L_1 sea vertical, es decir:

$$(6k,\frac{1}{2}-3k)||(0,1) \leftrightarrow (6k,\frac{1}{2}-3k).(-1,0)=0$$

$$\leftrightarrow -6k+0 = 0 \rightarrow k=0\varepsilon R$$

Luego, la afirmación es *verdadera*.

(2) Tenemos: $L_1=\{(1,1)+t(1,-1)\}$ y $L_2=\{(3,-1)+s(-2,2)\}$

Si $L_1=L_2$ $\rightarrow$ $(\vec{P}_2-\vec{P}_1).\vec{a}_1^{\perp}=0$ y $\vec{a}_1||\vec{a}_2$

$\rightarrow$ $(2,-2).(1,1) = 2-2 = 0$

$\rightarrow$ $\vec{a}_2 = -2(1,-1) = r\vec{a}_1$ $\rightarrow$ $\vec{a}_2||\vec{a}_1$

Entonces: $L_1=L_2$, luego, la afirmación es *verdadera*.

(3) Si $L_1||L_2$ $\rightarrow$ $m_1=m_2$ $\rightarrow$ $\frac{3}{k} = -\frac{1}{2}k$ $\rightarrow$ $k^2=-6$ $\rightarrow$ $\nexists k\varepsilon R$

Entonces $L_1 || L_2$ y por lo tanto, la afirmación es *falsa*.

(4) Como los vectores de dirección de L_1 y L_2 son iguales y el punto $Q_1 \notin L_1$ entonces las rectas son paralelas y no coincidentes. Luego, $L_1 \cap L_2 = \phi$, por tanto, la afirmación es *falsa*.

DEFINICION 12. RECTAS ORTOGONALES

Dos rectas en el plano $L_1: P = P_1 + t\vec{a}$, $t \in R$ y $L_2: P = Q_1 + r\vec{b}$, $r \in R$, se dice que son ortogonales si y sólo si sus vectores de dirección son ortogonales. Esto es:

$$L_1 \perp L_2 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Si m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, entonces, sus vectores de dirección son de la forma: $\vec{a} = (1, m_1)$ y $\vec{b} = (1, m_2)$.
Luego, si $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow (1, m_1).(1, m_2) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + m_1.m_2 = 0$

de donde: $\quad m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ ó $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

Entonces, dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si la pendiente de una es el *negativo del recíproco* de la pendiente de la otra.

EJEMPLO 9. Demostrar que la recta L_1 que contiene a los puntos $Q(-1,-2)$ y $R(2,2)$ es perpendicular a la recta L_2 que contiene a los puntos $S(-5,7)$ y $T(3,1)$.

Demostración. En efecto, sea $\vec{a}_1$ el vector de dirección de L_1, entonces: $\vec{a}_1 = \overline{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (2,2) - (-1,-2) = (3,4)$

Sea $\vec{a}_2$ el vector de dirección de L_2, entonces:

$$\vec{a}_2 = \overline{ST} = \vec{T} - \vec{S} = (3,1) - (-5,7) = (8,-6)$$

Puesto que: $\quad \vec{a}_1.\vec{a}_2 = (3,4).(8,-6) = 24 - 24 = 0$

$$\rightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \leftrightarrow L_1 \perp L_2$$

EJEMPLO 10. Sean las rectas $L_1: P = P_1 + t\vec{a}$, $t \in R$ y $L_2: P = Q_1 + r\vec{b}$, $r \in R$, donde $\vec{a} = (4-k, k+3)$ y $\vec{b} = (k-3, k+2)$. Si $L_1 \perp L_2$, hallar el valor de $||\vec{a} - \frac{7}{5}\vec{b}||$.

Solución. Si $L_1 \perp L_2 \leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \quad \rightarrow \quad (4-k, k+3).(k-3, k+2) = 0$

$$\rightarrow \quad (4-k)(k-3) + (k+3)(k+2) = 0$$

de donde: k=1/2. Entonces: $\vec{a} = (4-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+3) = \frac{7}{2}(1,1)$

$\vec{b} = (\frac{1}{2}-3, \frac{1}{2}+2) = \frac{5}{2}(-1,1)$

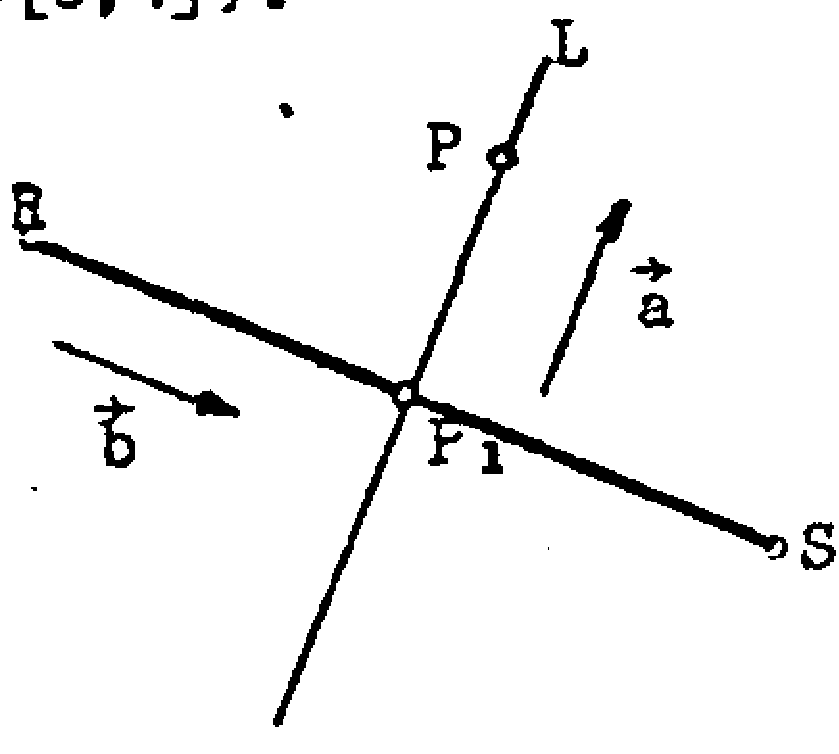
Luego, $\vec{a} - \frac{7}{5}\vec{b} = \frac{7}{2}(1,1) - \frac{7}{2}(-1,1) = (7,0)$

$$\therefore \ ||\vec{a} - \frac{7}{5}\vec{b}|| = 7$$

EJEMPLO 11. Hallar la ecuación vectorial de la mediatriz del segmento $\overline{RS}=\{(-1,3)+t(6,-2)/t\varepsilon[0,1]\}$.

Solución. Para t=0 → R=(-1,3)

t=1 → S=(5,1)



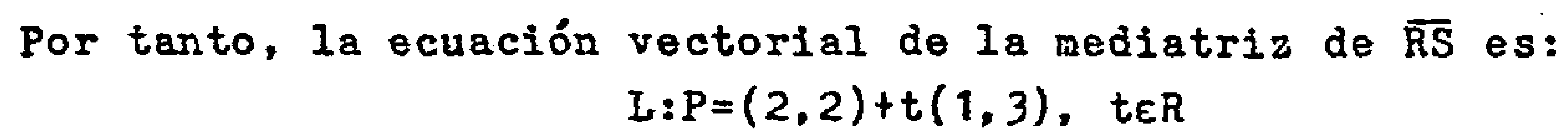
Como P_1 biseca al segmento $\overline{RS}$, entonces

$$P_1 = \frac{1}{2}(R+S) = (2,2)$$

El vector de dirección de RS es:

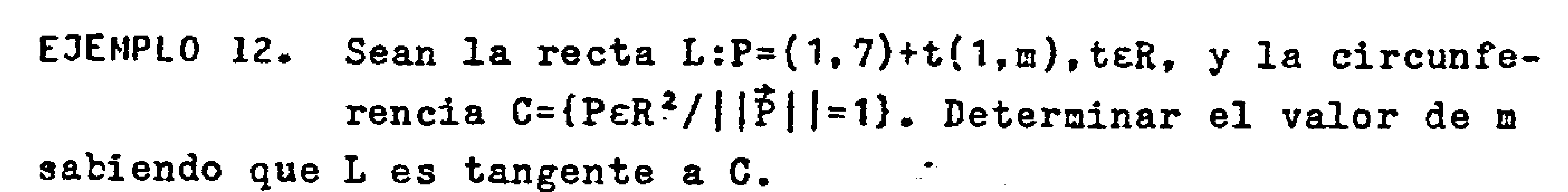
$\vec{b} = (6,-2) = 2(3,-1)$

Si L⊥RS → $\vec{a} = \vec{b}^{\perp} = (1,3)$

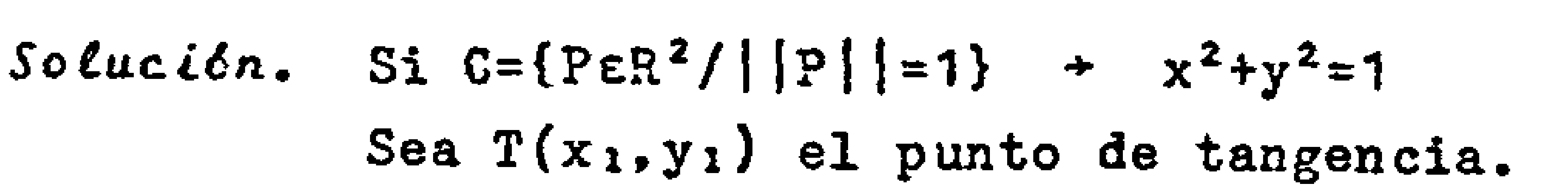


Por tanto, la ecuación vectorial de la mediatriz de $\overline{RS}$ es:

$$L:P=(2,2)+t(1,3), \ t\varepsilon R$$



EJEMPLO 12. Sean la recta $L:P=(1,7)+t(1,m), t\varepsilon R$, y la circunferencia $C=\{P\varepsilon R^2/||\vec{P}||=1\}$. Determinar el valor de m sabiendo que L es tangente a C.



Solución. Si $C=\{P\varepsilon R^2/||P||=1\}$ → $x^2+y^2=1$

Sea $T(x_1,y_1)$ el punto de tangencia.

Como $T\varepsilon C$ → $x_1^2 + y_1^2 = 1$ (1)

Siendo el radio perpendicular a L en T,

→ $\overline{P_1T}.\overline{OT} = 0$ → $(x_1-1,y_1-7).(x_1,y_1)=0$

de donde: $x_1^2 + y_1^2 - x_1 - 7y_1 = 0$ (2)

Resolviendo (1) y (2) obtenemos:

$x_1 = -\frac{24}{25}$, $y_1 = \frac{7}{25}$ → $\overline{OT} = (-\frac{24}{25}, \frac{7}{25})$

Siendo también $L \perp \overline{OT}$ → $(1,m).(-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}) = 0$ ↔ m=24/7

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4 determinar si las rectas cuyas ecuaciones vectoriales se dan, son: a) paralelas, b) coincidentes, c) perpendiculares, d) oblícuas.

1. $L_1:P=(3,-5)+t(2,-3)$, $L_2:P=(-1,1)+r(-6,9)$ Rp. (b)
2. $L_1:P=(2,-1)+t(-2,6)$, $L_2:P=(0,1)+r(13,-39)$ Rp. (a)
3. $L_1:P=(1,-2)+t(-2,-3)$, $L_2:P=(9,2)+r(4,-3)$ Rp. (d)
4. $L_1:P=(4,7)+t(-19,57)$, $L_2:P=(3,0)+r(51,17)$ Rp. (c)
5. Determinar la pendiente de las rectas paralelas $L_1=\{P_1+t(a,6)/t\epsilon R,\ a<0\}$ y $L_2:(3a,-2).[P-(2,-1)]=0$. Rp. m=3
6. Determinar a+b para que las rectas $L_1:P=(-1,0)+t(-a,1)$ y $L_2:P=(\frac{1}{b},0)+s(-3,b)$ sean coincidentes. Rp. -4
7. Hallar la ecuación normal de la recta L cuyos puntos equidistan de las rectas $L_1=\{(-1,5)+t(3,-6)/t\epsilon R\}$ y $L_2=\{(5,-9)+r(7,-14)/r\epsilon R\}$. Rp. $L:(2,1).[P-(2,-2)]=0$
8. Sean A(2,3) y B(-4,7) dos puntos de R^2. Cuántas de las siguientes expresiones vectoriales representa a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

   a) $P=(2t+1,8+3t),t\epsilon R$ c) $P=(5+2t,14+3t),t\epsilon R$

   b) $P=(2t-3,4+3t),t\epsilon R$ d) $P=(2t-1,5+3t),\ t\epsilon R$
9. Hallar la ecuación vectorial de la mediatriz del segmento: $\overline{AB}=\{(-2,3)+t(6,-4),\ t\epsilon[0,1]\}$. Rp. $L:P=(1,1)+t(2,3),t\epsilon R$
10. Los extremos de una de las diagonales de un rombo son S(2,-1) y T(14,3). Hallar la ecuación vectorial que contiene a la otra diagonal. Rp. $L:P=(8,1)+t(-1,3),t\epsilon R$
11. Determinar m+n para que las rectas $L_1:P=(-1,2)+t(m,2),t\epsilon R$ y $L_2=\{(\frac{1}{n},0)+r(3,-n),\ s\epsilon R\}$, sean coincidentes. Rp. 3.8

12. Si $L_1=\{(a^3+3,-7)+t(1-a^2,a)/t\varepsilon R\}$ y $L_2=\{(a,3a-7)+s(a-5,8-3a)/s\varepsilon R\}$. Hallar $a\varepsilon N$ tal que L_1 y L_2 sean rectas coincidentes.
Rp. a=2

13. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por (-3,1) y es tangente a la circunferencia $C=\{P\varepsilon R^2/||P||=2\sqrt{2}\}$.
Rp. $L:P=(-3,1)+t(1,1),t\varepsilon R$

14. Sean A(-3,2), B, C(-1,13) y D los vértices de un rectángulo, tal que $\overline{AC}$ es una de las diagonales y $\overline{AB}$ es ortogonal al vector $\vec{v}=(4,-3)$. Hallar: a) La ecuación vectorial de la recta que contiene a $\overline{BD}$. b) $Proy_{\overline{BD}}\overline{AC}$.
Rp. a) $L=\{(3,10)+t(2,1)/t\varepsilon R\}$
b) (6,3)

ECUACIONES CARTESIANAS EN LA RECTA

1.31 FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA RECTA

La forma general de la ecuación de una recta es:

$$L: Ax+By+C=0 \ , \ A^2+B^2\neq 0$$

En efecto, cualquier vector no nulo que sea perpendicular al vector de dirección de una recta L es un *vector normal* a L. En la Figura 28, se muestra a una recta L, que contiene al punto $P_1(x_1,y_1)$, así como el vector $\vec{n}=(A,B)$, normal a L, donde A y $B\varepsilon R$, uno de los cuales es diferente de cero.

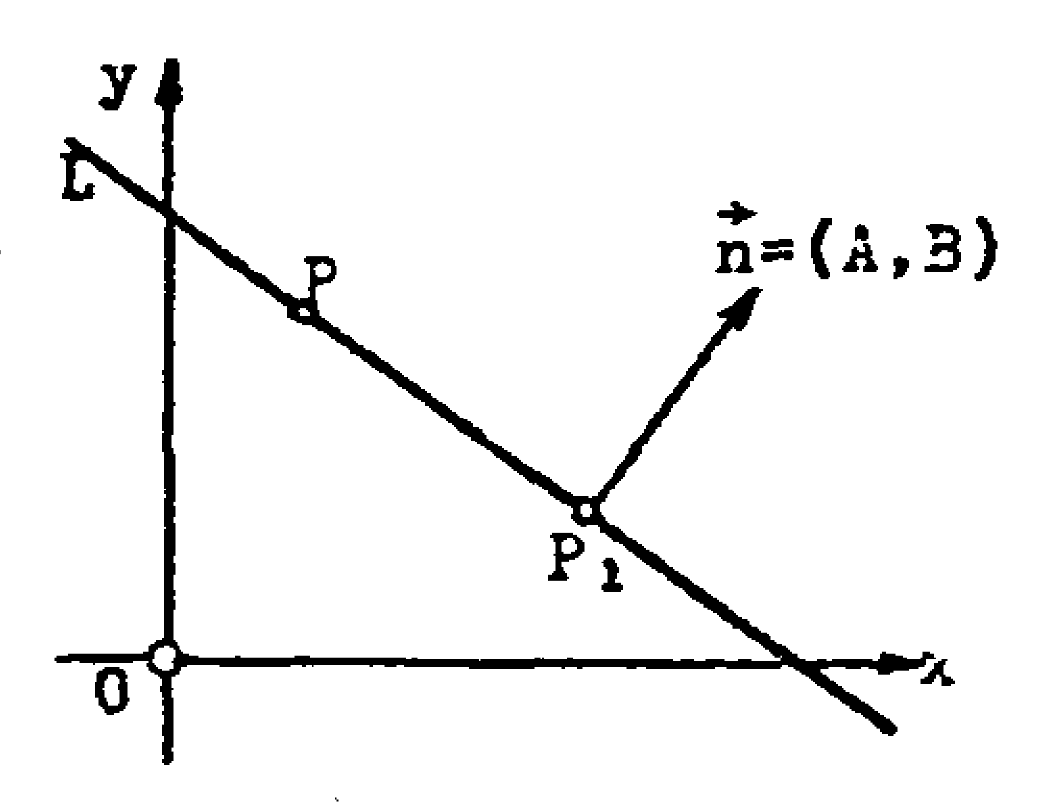


Figura 28

Un punto P(x,y) está sobre L si y sólo si $\vec{P}-\vec{P}_1$ es paralelo a L, es decir, si y sólo si $\vec{P}-\vec{P}_1$ es perpendicular a $\vec{n}$. Entonces, una ecuación de L es:

$$(\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{n} = 0 \ \rightarrow \ \vec{P}.\vec{n}-\vec{P}_1.\vec{n} = 0 \ \leftrightarrow \ \vec{P}.\vec{n} = \vec{P}_1.\vec{n}$$

Puesto que $P=(x,y)$, $P_1=(x_1,y_1)$ y $\vec{n}=(A,B)$, la última ecuación se puede escribir de la forma:

$$(x,y).(A,B) = (x_1,y_1).(A,B) \leftrightarrow Ax+By = Ax_1+By_1$$

Toda vez que x_1, y_1, A y B son constantes, al número Ax_1+By_1 es también constante, y podemos denotarlo por -C. Se tendrá entonces que:

$$Ax+By+C=0 \ , \ A^2+B^2 \neq 0 \qquad (40)$$

Dado que la ecuación (40) no contiene vectores se le denomina también, *ecuación escalar* de L.

Nota. Si $\vec{n}=(A,B)$ es un vector normal a una recta L, entonces $\vec{a}=(-B,A)$ es un vector de dirección de L. Por consiguiente la pendiente de L está dada por:

$$m = -\frac{A}{B} \ , \ \text{si } B \neq 0$$

EJEMPLO 1. Hallar la ecuación general de la recta que contiene al punto R(-3,2) y que tiene a $\vec{a}=(1,-2)$ como vector de dirección.

Solución. Usaremos dos métodos para resolver el problema:

(1) Dado que $\vec{a}=(1,-2) \rightarrow \vec{n} = \vec{a}^{\perp} = (2,1)$

Si P(x,y) es un punto genérico de la recta L, entonces:

$(\vec{P}-\vec{R}).\vec{n} = 0 \leftrightarrow [(x,y)-(-3,2)].(2,1) = 0$

$\leftrightarrow (x+3,y-2).(2,1) = 0$

de donde: $L:2x+y+4=0$

(2) Si $\vec{a}=(1,-2) \rightarrow \vec{n} = \vec{a}^{\perp} = (2,1) = (A,B) \rightarrow A=2$ y $B=1$

Entonces, en la ecuación (40); $L:2x+y+C=0$

Si $R(-3,2)\in L \rightarrow 2(-3)+(2)+C=0 \leftrightarrow C=4$

$\therefore \ L:2x+y+4=0$

Observaciones. (1) Puesto que los vectores $\vec{n}_1=(A,B)$ y $\vec{n}_2=(-B,A)$ son perpendiculares, y si son respectivamente normales a las rectas L_1 y L_2, se tiene que las ecuaciones de la forma

$$Ax + By + C = 0$$
$$-Bx + Ay + k = 0 \qquad (41)$$

donde $A^2+B^2 \neq 0$, son ecuaciones generales de dos rectas que son perpendiculares.

(2) Si $\vec{n}=(A,B)$ es un vector normal a una recta L, entonces es también normal a cualquier otra recta paralela a L. Esta pro

piedad se indica por las ecuaciones:

$$Ax + By + C = 0$$
$$Ax + By + k = 0 \qquad (42)$$

donde $A^2+B^2 \neq 0$.

EJEMPLO 2. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $S(1,3)$ y es perpendicular a la recta $L_1: 2x-5y+7=0$.

Solución. Según (41), la ecuación buscada es de la forma
$L_2: 5x+2y+k=0$
Si $S(1,3) \in L_2 \rightarrow 5(1)+2(3)+k=0$, de donde: $k=-11$

$$\therefore L_2: 5x+2y-11=0$$

EJEMPLO 3. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $S(-6,2)$ y es paralela a la recta $L_1: 5x+6y-9=0$.

Solución. Según (42), la ecuación buscada es de la forma
$L_2: 5x+6y+k=0$
Si $S(-6,2) \in L_2 \rightarrow 5(-6)+6(2)+k=0$, de donde: $k=18$

$$\therefore L_2: 5x+6y+18=0$$

1.32 FORMA PUNTO PENDIENTE.

En la Figura 29 se muestra a la recta L que pasa por el punto dado $P_1(x_1,y_1)$. Si $P(x,y)$ es un punto genérico de L, entonces un vector direccional de dicha recta es:

$$\vec{a} = \vec{P} - \vec{P}_1 = (x-x_1, y-y_1)$$

Entonces, por la definición 10, la pendiente m de L está dada por:

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Figura 29

de donde obtenemos:

$$y-y_1 = m(x-x_1) \qquad (43)$$

EJEMPLO 4. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por punto $P_1(1,-3)$ y cuya pendiente es 2/5.

Solución. Si hacemos $x_1=1$, $y_1=-3$ y $m=2/5$ en la ecuación (43) se obtiene: $y-(-3) = \frac{2}{5}(x-1) \leftrightarrow L: 2x-3y-11=0$

Nota. Si una recta L contiene a los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, entonces la pendiente m de la recta está dada por:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Si se sustituye esta expresión de m en la ecuación (43) se obtiene la ecuación equivalente:

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad (44)$$

Esta es la ecuación cartesiana de L que pasa por dos puntos dados.

EJEMPLO 5. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos S(-4,3) y T(-2,-1).

Solución. Si en la ecuación (44) se sustituye x_1, y_1 por las coordenadas del punto S(-4,3), y a x_2 e y_2 por las coordenadas del punto T(-2,-1) obtenemos:

$$y-3 = \frac{-1-3}{-2+4}(x+4) \leftrightarrow L: 2x+y+5=0$$

1.33 FORMA PENDIENTE Y ORDENADA AL ORIGEN

En la Figura 30 se muestra una recta L, no vertical, que corta al eje Y en el punto T(0,b), b∈R. El número b se llama la *ordenada en el origen* de L. Si se sustituye a x_1 por 0 y a y_1 por b en la ecuación (43) se obtiene:

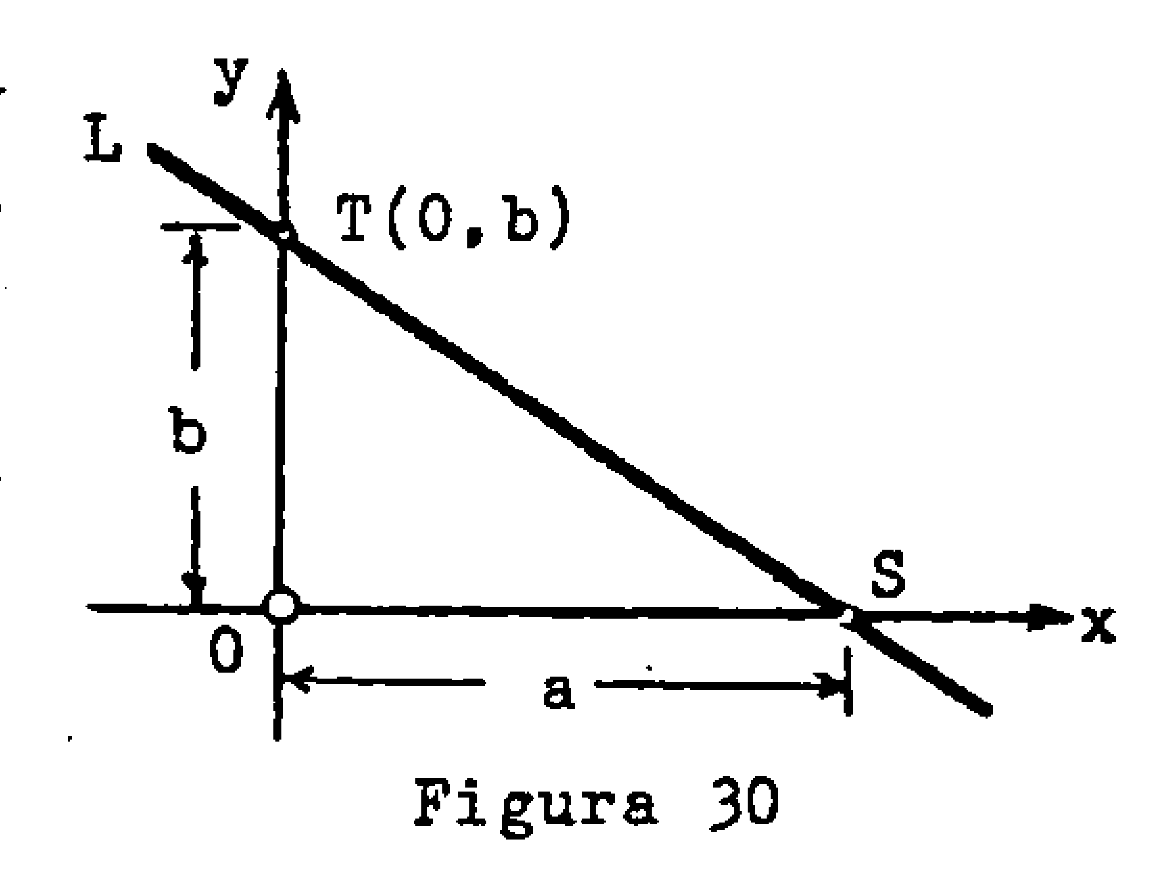


Figura 30

$$y-b = m(x-0)$$

$$\leftrightarrow \quad y = mx + b \qquad (45)$$

Si en la ecuación general $Ax+By+C=0$, $B\neq 0$, se despeja a y en función de x, se tiene: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Si comparamos con (45) resulta que: $m=-A/B$ y $b=-C/B$

EJEMPLO 6. Calcular la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación general es $L:5x+4y-16=0$.

Solución. Despejando y en función de x se tiene: $y=-\frac{5}{4}x+4$

Por simple inspección: $m=-5/4$ y $b=4$.

1.35 FORMA ABSCISA Y ORDENADA AL ORIGEN

En la Figura 30 se muestra una recta, no horizontal, que intercepta al eje X en el punto $S(a,0)$, $a\in R$. El número a recibe el nombre de *abscisa al origen* de L.
Si sustituimos las coordenadas de los puntos $S(a,0)$ y $T(0,b)$ en la ecuación (44) se obtiene:

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a) \quad \leftrightarrow \quad bx+ay=ab$$

Dividiendo ambos extremos entre ab resulta:

$$L: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (46)$$

Esta es la ecuación *abscisa y ordenada* de la recta L.

EJEMPLO 7. Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada al origen suman -1, y que pasa por el punto $S(2,2)$

Solución. Sea la recta buscada, $L: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Si $S(2,2)\varepsilon L \rightarrow \frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1 \leftrightarrow 2a+2b=ab$ (1)

Como $a+b=-1 \rightarrow b=-1-a$ (2)

Resolviendo (1) y (2) obtenemos: $a_1=-2$ ó $a_2=1$; $b_1=1$ ó $b_2=-2$

Por tanto, $L_1: \frac{x}{-2}+\frac{y}{1}=1$ ó $L_2: \frac{x}{1}+\frac{y}{-2}=1$

$\leftrightarrow L_1:x-2y+2=0$ ó $L_2:2x-y-2=0$

1.36 FORMA SIMETRICA

Dada la ecuación paramétrica vectorial de una recta

$$L: P=P_1+t\vec{a}, \quad t\varepsilon R$$

Las componentes h y k del vector de dirección $\vec{a}=(h,k)$ recibe el nombre de *números directores* de L.

Si $P_1(x_1,y_1)$ es un punto de L, entonces una ecuación paramétrica vectorial de la recta es:

$$(x,y) = (x_1,y_1)+t(h,k),\ t\epsilon R$$

de donde se obtienen las ecuaciones paramétricas cartesianas:

$$x = x_1+th \quad ; \quad y = y_1+tk$$

despejando t de cada una de estas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{y-y_1}{k}\ ,\ h\neq0\ ,\ k\neq0 \qquad (47)$$

La ecuación (47) recibe el nombre de *forma simétrica* de la ecuación de una recta.
En los casos en que h=0 ó k=0, la forma simétrica no es aplicable.

EJEMPLO 8. Hallar la ecuación de la recta L, en su forma simétrica, que pasa por los puntos S(-1,3) y T(4,-3).

Solución. Un vector de dirección de L es: $\vec{a}=\overline{ST}$
$\rightarrow$ $\vec{a} = (4,-3)-(-1,3) = (5,-6)$
Luego, el par de números directores son: h=5 y k=-6
Sustituyendo a x_1 e y_1, en la ecuación (47), por las coordenadas del punto S ó T se tiene:

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{-6} \quad ó \quad \frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{-6}$$

Se puede verificar que cada una de estas ecuacciones representa a la misma recta reduciéndolas a su forma general.

Observaciones:

(1) Dada una ecuación general para una recta L, se puede escribir una ecuación equivalente en forma simétrica identificando un punto $P_1(x_1,y_1)$ que está sobre la gráfica de L:Ax+By+C=0, y notando que el vector $\vec{a}=(-B,A)$ es un vector de dirección de la gráfica. Por lo tanto, se tiene que la ecuación de L en forma simétrica es:

$$\frac{x-x_1}{-B} = \frac{y-y_1}{A} \qquad (48)$$

EJEMPLO 9. Hallar la ecuación en su forma simétrica que sea

eqivalente a la ecuación $L:2x+5y-10=0$

Solución. Resolvemos la ecuación $2x+5y-10=0$ asignándole un valor a x, por ejemplo, $x=-5$, se obtiene:
$2(-5)+5y-10=0$, de donde: $y=4$. Luego, $P_1(-5,4)$ es un punto de la gráfica de la ecuación dada. Como $A=2$ y $B=5$, el vector $\vec{a}=(-5,2)$ es un vector de dirección de L. Por tanto, la ecuación en su forma simétrica es:

$$L: \frac{x+5}{-5} = \frac{y-4}{2}$$

(2) Se puede emplear los números directores h y k de una recta L para determinar otra forma simétrica en función de los ángulos directores α y β. (Figura 31). En efecto, recordemos que $m=k/h$, entonces α se puede determinar a través de la ecuación:

$$Tg\alpha = \frac{k}{h}$$

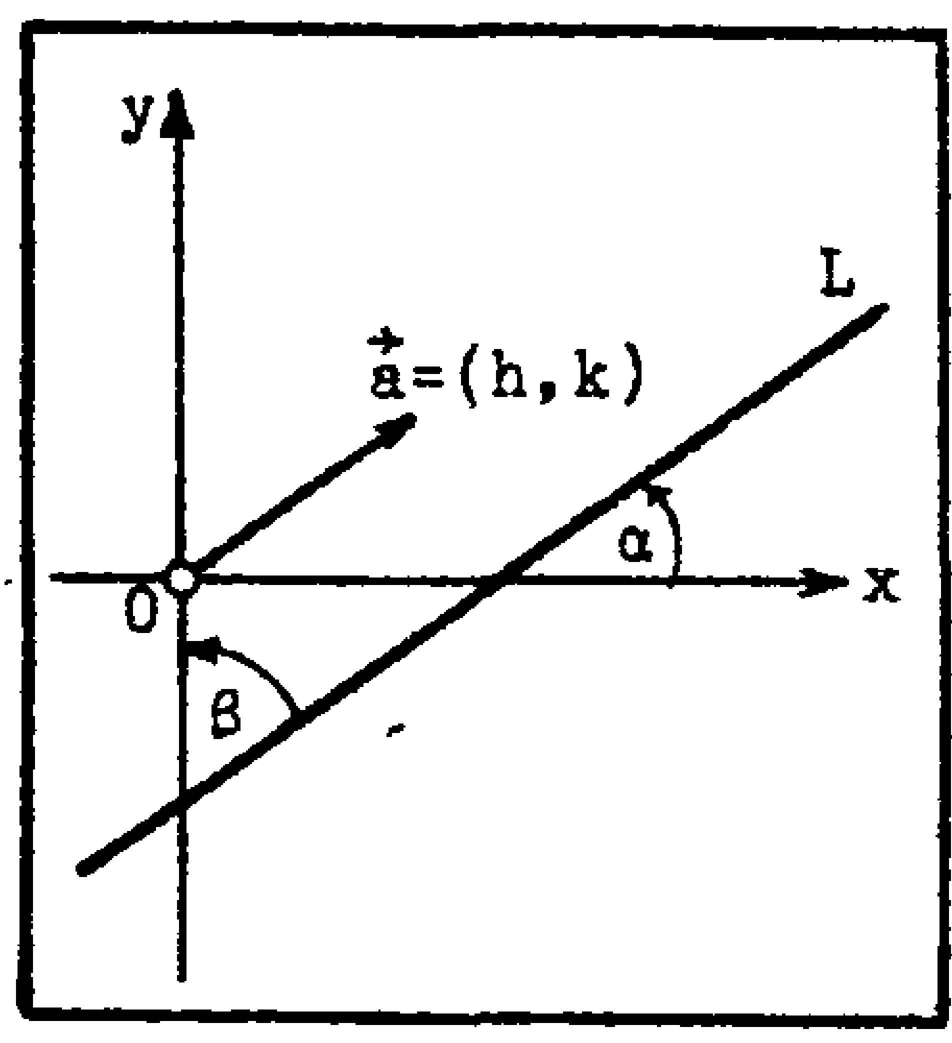


Figura 31

y como $\vec{a}=(h,k)=(-B,A)$ es el vector de dirección de la recta $L:Ax+By+C=0$, entonces si $B\neq 0$, el ángulo de dirección α está dado por:

$$Tg\alpha = -\frac{A}{B}\ ,\ 0^\circ \leq m(\alpha) < 180^\circ$$

Si en la ecuación (43) sustituimos $m = Tg\alpha = \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha}$, tendremos:

$$y - y_1 = \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha}(x - x_1)$$

Pero como $\beta=90-\alpha \rightarrow Cos\beta = Cos(90-\alpha) = Sen\alpha$

Entonces: $$y-y_1 = \frac{Cos\beta}{Cos\alpha}(x-x_1) \leftrightarrow L: \frac{x-x_1}{Cos\alpha} = \frac{y-y_1}{Cos\beta} \qquad (49)$$

EJEMPLO 10. Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por $S(-5,3)$, y cuyo ángulo de dirección α sea 60°.

Solución. Si $\alpha=60^\circ \rightarrow \beta=30^\circ$, luego, los cosenos directores de la recta L son: $Cos\alpha=1/2$ y $Cos\beta=\sqrt{3}/2$

Sustituyendo las coordenadas de S en la ecuación (49) se tiene:

$$L: \frac{x+5}{1/2} = \frac{y-3}{\sqrt{3}/2}$$

Relaciones entre Rectas

1.36 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA DADA

Dada una recta L, cuyo vector de dirección es $\vec{a}$, y dadas las coordenadas de S y de algún punto P_1 sobre L, entonces la distancia de S a la recta L, denotado por d(S,L), es la norma de la proyección del vector $\vec{S}-\vec{P}_1$ en la dirección de la normal $\vec{n}$ (Figura 32).

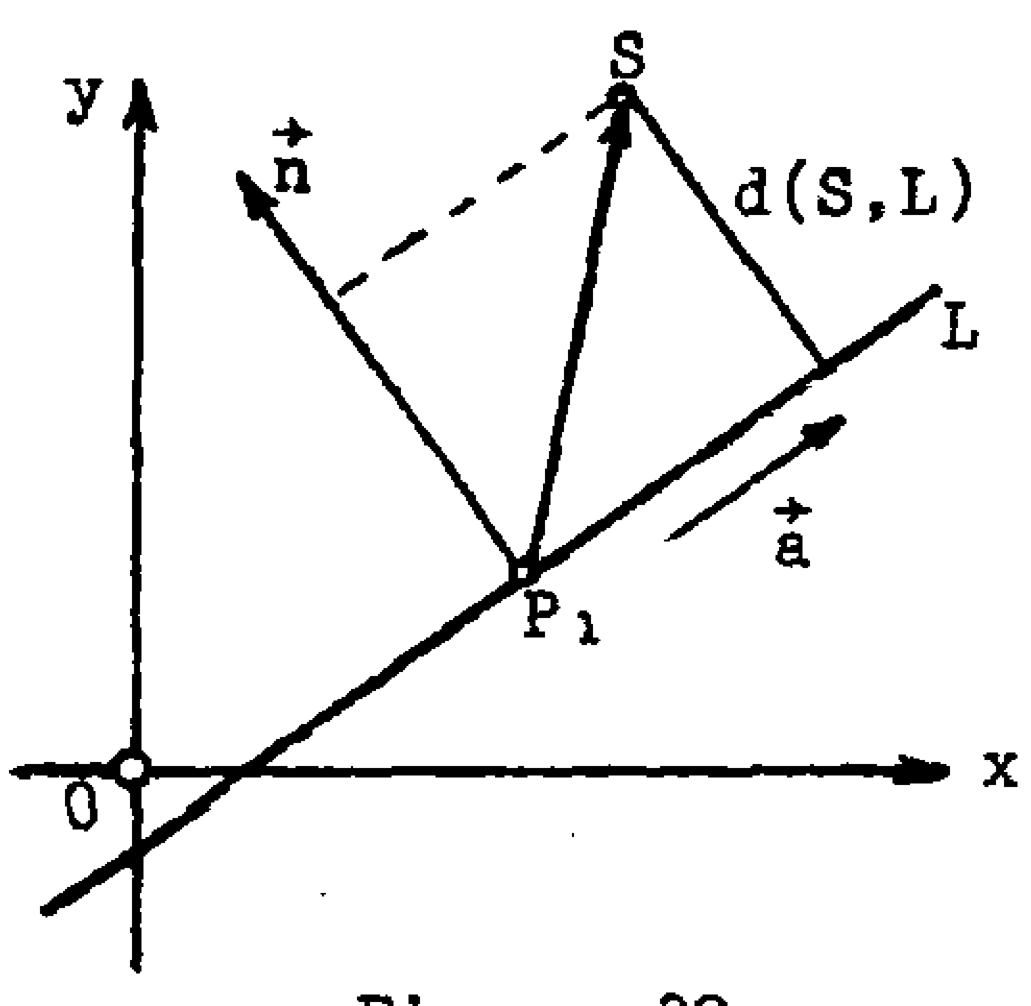


Figura 32

Esto es:

$$d(S,L) = ||Proy_{\vec{n}}(\vec{S}-\vec{P}_1)||$$
$$= |Comp_{\vec{n}}(\vec{S}-\vec{P}_1)|$$
$$\therefore\ d(S,L) = \frac{|(\vec{S}-\vec{P}_1).\vec{n}|}{||\vec{n}||} \qquad (50)$$

La distancia que separa a S de L no depende de la elección de un punto particular P_1 sobre L.

En efecto, Tomemos dos puntos P_1 y P_2 sobre L. En la Figura 33 se observa que:

$$\vec{S}-\vec{P}_1 = (\vec{P}_2-\vec{P}_1)+(\vec{S}-\vec{P}_2)$$

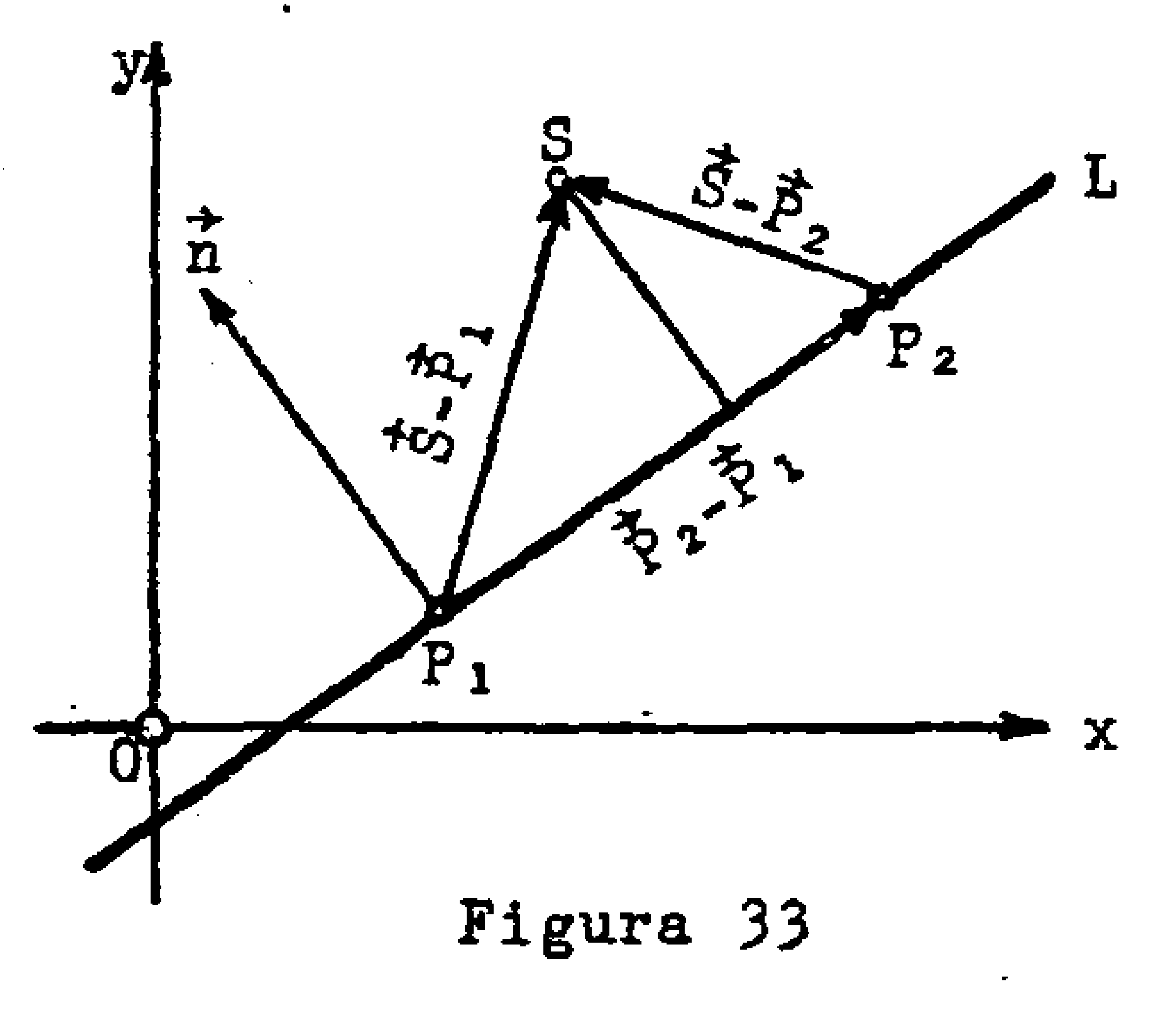


Figura 33

Multiplicando escalarmente ambos extremos por $\vec{n}$ se tiene:

$$(\vec{S}-\vec{P}_1).\vec{n} = (\vec{P}_2-\vec{P}_1).\vec{n} + (\vec{S}-\vec{P}_2).\vec{n}$$
$$= 0 + (\vec{S}-\vec{P}_2).\vec{n}$$
$$\therefore\ \frac{(\vec{S}-\vec{P}_1).\vec{n}}{||\vec{n}||} = \frac{(\vec{S}-\vec{P}_2).\vec{n}}{||\vec{n}||}$$

EJEMPLO 1. Hallar la distancia que separa al punto S(4,-2) de la recta que pasa por T(5,-3) y cuya pendiente es $\frac{1}{2}$.

Solución. Si $m=1/2 \rightarrow \vec{a}=(2,1)$ es el vector de dirección de L. Luego, $\vec{n} = \vec{a}^{\perp} = (-1,2)$

El vector que va de S a T es: $ST = (5,-3)-(4,-2) = (1,-1)$
Luego, según la ecuación (50):

$$d(S,L) = \frac{|(1,-1).(-1,2)|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-1-2|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Nota. Para calcular una fórmula que permita hallar la d(S,L) cuando la ecuación de L está dada en la forma general L: $Ax+By+C=0$, se procede de la siguiente manera:
Supongamos que $S=(x_0,y_0)$ y $P_1=(x_1,y_1) \rightarrow \vec{S}-\vec{P}_1=(x_0-x_1,y_0-y_1)$, y $\vec{n}=(A,B)$. Si sustituimos las componentes de estos vectores en la ecuación (50) se tiene:

$$d(S,L) = \frac{|(x_0-x_1,y_0-y_1).(A,B)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_0-Ax_1+By_0-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Pero $P_1(x_1,y_1)\epsilon L \rightarrow Ax_1+By_1+C=0 \rightarrow C = -(Ax_1+By_1)$

$$\therefore\ d(S,L) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (51)$$

EJEMPLO 2. Hallar la distancia del punto S(-2,5) a la recta L: $5x-12y-8=0$.

Solución. Dado que: $A=5$ y $B=-12 \rightarrow \vec{a}=(5,-12)$. Además: $x_0=-2, y_0=5$
Luego, según la fórmula (51):

$$d(S,L) = \frac{|5(-2)-12(5)-8|}{\sqrt{(5)^2+(-12)^2}} = \frac{|-10-60-8|}{13} = 6$$

EJEMPLO 3. Calcular el valor de k tal que el punto P(2,k) sea equidistante de las rectas cuyas ecuaciones son:
$L_1: x+y-2=0$ y $L_2: x-7y+2=0$.

Solución. Se debe verificar que: $d(P,L_1) = d(P,L_2)$
Entonces, según la ecuación (51) se tiene:

$$\frac{|2+k-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2-7k+2|}{\sqrt{1+49}} \leftrightarrow \frac{|k|}{\sqrt{2}} = \frac{|4-7k|}{5\sqrt{2}}$$

de donde: $5|k| = |4-7k| \leftrightarrow 5k=4-7k$ ó $5k=-4+7k$

$\leftrightarrow k=1/3$ ó $k=2$

EJEMPLO 4. Obtener las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $L:3x-4y+10=0$ y que están a 5 unidades de distancia de L.

Solución. Según (42), las rectas paralelas a L son de la forma

$L_1:3x-4y+k=0$ (1)

Como todos los puntos de L equidistan de L_1, podemos elegir un punto cualquiera de L, dando una solución para $3x-4y+10=0$.

Por ejemplo, para $x=2 \rightarrow 3(2)-4y+10=0 \rightarrow y=4$. Luego $P(2,4)\in L$

Entonces, si $d(P,L_1) = 5 \leftrightarrow \dfrac{|3(2)-4(4)+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5$

de donde: $|k-10|=25 \leftrightarrow k-10=25$ ó $k-10=-25$

$\leftrightarrow k=35$ ó $k=-15$

Sustituyendo en (1) obtenemos las ecuaciones buscadas, esto es:

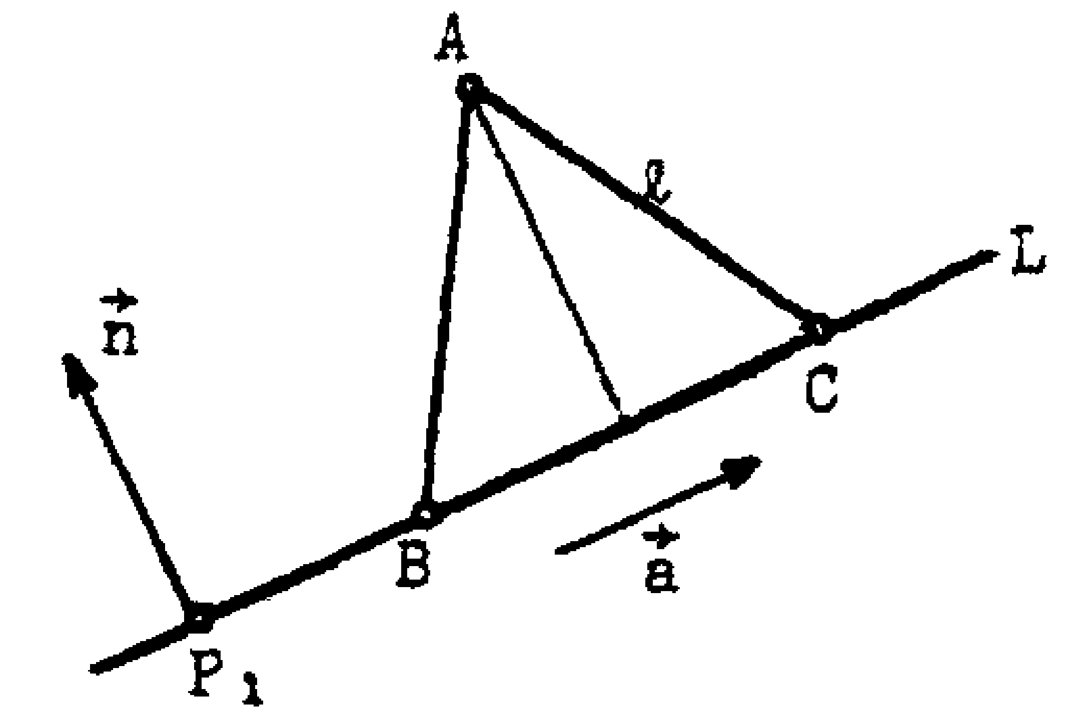
$L_1:3x-4y+35=0$ ó $L_1:3x-4y-15=0$

EJEMPLO 5. Hallar el perímetro del triángulo equilátero ABC, si $A(-1,3)$ y sabiendo que el lado $\overline{BC}$ está contenido en la recta $L=\{(-2,-4)+t(4,3)/t\in R\}$.

Solución. En un triángulo equilátero: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \rightarrow \ell=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$

Perímetro del ΔABC: $2p=3\ell \rightarrow 2p = 2\sqrt{3}h$ (1)

Pero $h = d(A,L) = \dfrac{|(\vec{A}-\vec{P}_1).\vec{n}|}{||\vec{n}||}$



en donde: $\vec{A}=(-1,3)$, $\vec{P}_1=(-2,-4)$

$\rightarrow \vec{A}-\vec{P}_1 = (-1,3)-(-2,-4) = (1,7)$

$\vec{n} = \vec{a}^{\perp} = (-3,4) \rightarrow ||\vec{n}||=5$

Entonces: $h = \dfrac{|(1,7).(-3,4)|}{5} = 5$

Luego, en (1), el perímetro es: $2p=10\sqrt{3}$

EJEMPLO 6. Los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ sobre la recta $L:5x-12y+15=0$, distan 3 unidades de la recta L_1: $(3,4).[(x,y)-(0,3)]=0$. Hallar x_1+x_2.

Solución. En L_1 tenemos: $\vec{n}=(3,4)$ y $P_1(0,3)$

Si $S(x,y)\in L \rightarrow d(S,L)=3$

o sea: $\dfrac{|(\vec{S}-\vec{P}_1).\vec{n}|}{||\vec{n}||} = \dfrac{|(x,y-3).(3,4)|}{5} = 3$

de donde: $|3x+4y-12| = 15 \leftrightarrow 3x+4y-12=15$ ó $3x+4y-12=-15$

$\leftrightarrow 3x_1+4y_1=27$ ó $3x_2+4y_2=-3$ (1)

Pero $A\varepsilon L$ y $B\varepsilon L$, entonces: $\rightarrow 5x_1-12y_1=-15$ ó $5x_2-12y_2=-15$ (2)

Eliminando y_1 e y_2 del sistema de ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$x_1=33/7$ y $x_2=-12/7 \rightarrow x_1+x_2=3$

EJEMPLO 7. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, siendo α el ángulo de inclinación. Si L_1 pasa por $P_1(a,b)$ y L_2 pasa por $P_2(h,k)$, hallar la distancia entre las rectas en términos de α y los puntos dados, si $L_1 \neq L_2$.

Solución. La pendiente de ambas rectas es $m = Tg\alpha = \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha}$

Luego, el vector de dirección de ambas rectas es $\vec{a}=(Cos\alpha,Sen\alpha)$ y el vector normal es: $\vec{n}=(-Sen\alpha,Cos\alpha)$

El vector que va de P_1 a P_2 es:

$$\vec{v} = \vec{P}_2-\vec{P}_1 = (h-a,k-b)$$

Entonces: $d(L_1,L_2) = |Comp_{\vec{n}}\vec{v}| = \frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{||\vec{n}||}$

$$d(L_1,L_2) = \frac{|(h-a,k-b).(-Sen\alpha,Cos\alpha)|}{\sqrt{Sen^2\alpha+Cos^2\alpha}}$$

$$= |-(h-a)Sen\alpha + (k-b)Cos\alpha| = |(a-h)Sen\alpha + (k-b)Cos\alpha|$$

EJEMPLO 8. Sea el ΔOAB. Si $\overline{OA}=10$, $L_1:P=t(4,3), t\varepsilon R$; L_2 es una recta que pasa por $S(2,5)$ y tiene la misma pendiente que L_1; calcular el área del triángulo OAB.

Solución. Siendo $L_1||L_2$, la altura del ΔOAB es la $d(L_1,L_2)$.

Entonces: $h = |Comp_{\vec{n}}\overline{OS}| = \frac{|\overline{OS}.\vec{n}|}{||\vec{n}||} = \frac{|(2,5).(-3,4)|}{5} = \frac{14}{5}$

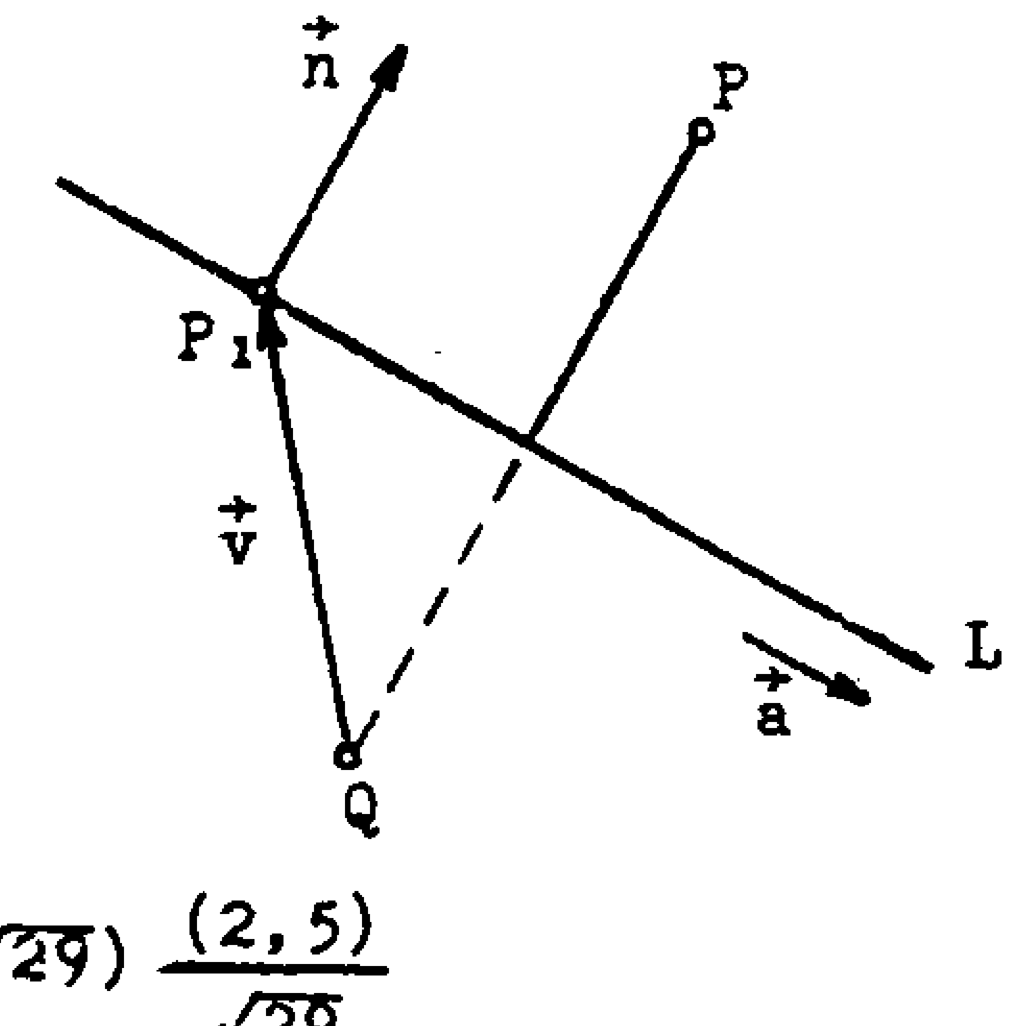
$$\therefore a(\Delta OAB) = \frac{1}{2}(10)(\frac{14}{5}) = 14u^2$$

EJEMPLO 9. Hallar el punto simétrico al punto $Q(-2,-9)$ respecto de la recta $L:P=(4,6)+t(5,-2), t\varepsilon R$.

Solución. Si $\vec{a}=(5,-2) \rightarrow \vec{n}=(2,5)$

Un vector unitario en la dirección de la normal es:

$$\vec{u} = \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} = \frac{(2,5)}{\sqrt{29}}$$



Sea $\vec{v}=QP=(4,6)-(-2,-9)=(6,15)=3(2,5)$

$$d(Q,L) = \frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{||\vec{n}||} = \frac{|3(2,5).(2,5)|}{\sqrt{29}} = 3\sqrt{29}$$

Si $\overline{QP} = \vec{P}-\vec{Q} \rightarrow \vec{P} = \vec{Q} + \overline{QP}$

o sea: $\vec{P} = \vec{Q} + 2d(Q,L)\vec{u} = (-2,-9) + (6\sqrt{29})\frac{(2,5)}{\sqrt{29}}$

de donde: $P=(10,21)$

EJEMPLO 10. Una persona tiene que ir desde un punto A(1,5) hasta un punto B(11,5) pero pasando por un río para sacar agua. Si la orilla del río se encuentra en la recta L: $P=(-2,4)+t(2,-1), t\in R$; ubicar un punto T en la orilla del río de modo que dicha persona recorra la mínima distancia.

Solución. Como los puntos A y B están situados a un mismo lado de la recta L, se halla el punto B', simétrico de B respecto de la recta L.

Es evidente que la suma:

$\overline{AT} + \overline{TB} = \overline{AT} + \overline{TB'}$ es mínima, donde $T\in(L \cap \overline{AB'})$

La ecuación cartesiana de la recta dada es $L: x+2y-6=0 \rightarrow \vec{n}=(1,2)$

Un vector unitario en la dirección de n es: $\vec{u} = \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$

$$d(B,L) = \frac{|1(11)+2(5)-6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

Si $\overline{B'B} = \overline{B}-\overline{B'} \rightarrow \overline{B'} = \overline{B}-\overline{B'B} = \overline{B} - 2d(B,L)\vec{u}$

$$\rightarrow \overline{B'} = (11,5) - (6\sqrt{5})\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = (5,-7)$$

Ecuación de $\overline{AB'}$: $y-5 = \frac{-7-5}{5-1}(x-1) \leftrightarrow \overline{AB'}: 3x+y-8=0$

$$\therefore (x+2y-6=0) \cap (3x+y-8=0) = T(2,2)$$

EJERCICIOS

1. Desde el punto $P(1,2)$ se trazan dos lados de un triángulo equilátero cuya base se halla en la recta $L:P=(0,1)+t(-3,1)$, $t\varepsilon R$. Hallar el perímetro de dicho triángulo. Rp. $4\sqrt{30}/5$

2. Si $L_1:2x-5y+7=0$, $L_2:P=(1,3)+t(-1,4), t\varepsilon R$; $L_3=\{P/(x-2,y+1).(-3,1)=0\}$, y si $d_1=d(0,L_1)$, $d_2=d(0,L_2)$ y $d_3=d(0,L_3)$; hallar el valor de $d_1^{-2}+d_2^{-2}+d_3^{-2}$. Rp. 8/7

3. Hallar el valor de k tal que el punto $P(k,4)$ sea equidistante de las rectas $L_1:13x-9y-10=0$ y $L_2:x+3y-6=0$.
Rp. $k=19/2$ ó $k=8/9$

4. La distancia del punto $P(7,1)$ a la recta $L=\{(2,1)+t\vec{a}/t\varepsilon R\}$ es $\sqrt{2}$. Hallar la pendiente de L, sabiendo que es positiva.
Rp. $m=1/2$

5. Sea k un número real diferente de cero, $P_1(2,1)$ un punto y $L_1:k^2x+(k+1)y+3=0$, $L_2:\frac{1}{k}x-2ky+7=0$, rectas ortogonales. Hallar $d(P_1,L_1).d(P_1,L_2)$. Rp. 12.8

6. Sean las rectas $L_1:2x+3y+4=0$ y $L_2:3x+4y-6=0$. Hallar los puntos de L_1 que disten 2 unidades de L_2.
Rp. $P_1(64,-44)$, $P_2(4,-4)$

7. Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a L: $(3,4).[P-(3,-1)]=0$. Rp. $L_1:3x+4y+5=0$, $L_2:3x+4y-15=0$

8. Hallar el simétrico del punto $Q(4,8)$ con respecto de la recta $L:x-y+2=0$. Rp. $P(6,6)$

9. Sea ABC un triángulo isósceles de lados iguales AC y BC. Si $A(5,2)$, $B(13,8)$, $L=\{P_1+t\vec{a}/t\varepsilon R\}$ contiene a los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, $||\overline{AC}||=5\sqrt{5}$; hallar la distancia de $P_1(-12,-9/2)$ a la recta que contiene al lado $\overline{BC}$ del triángulo. Rp. $10\sqrt{5}$

1.37 INTERSECCION DE RECTAS

Sabemos que si L_1 y L_2 son rectas no paralelas en R^2, entonces si intersectan en uno y solamente un punto.

En efecto, sean las rectas no paralelas: $L_1=\{P_1+t\vec{a}/t\in R\}$ y
$L_2=\{Q_1+s\vec{b}/s\in R\}$

Si L_1 y L_2 no son paralelas implican que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos.
Entonces existen números t y s tales que:

$$\overline{Q_1P_1} = \overline{Q_1P} + \overline{PP_1}$$

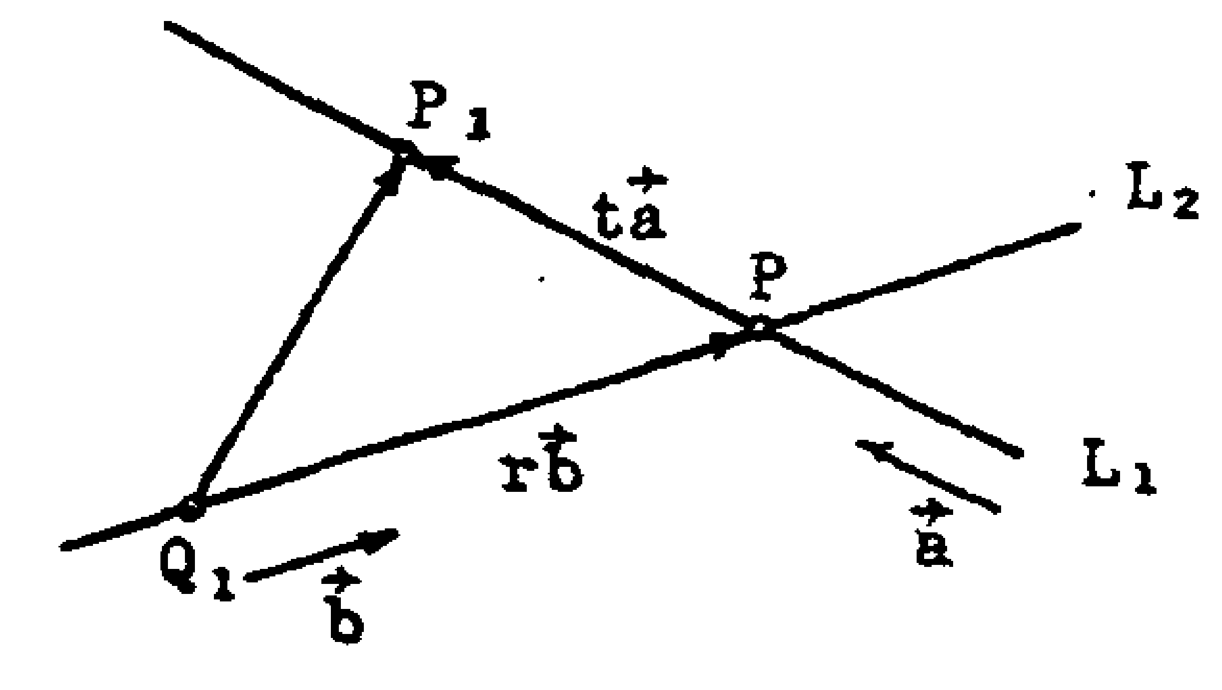


Figura 34

o sea:

$$P_1-Q_1 = s\vec{b} + t\vec{a} \rightarrow P_1-t\vec{a} = Q_1+s\vec{b}$$

Por tanto, el punto $P = P_1-t\vec{a} = Q_1+s\vec{b}$ pertenece tanto a L_1 como a L_2, y es el punto de intersección de L_1 y L_2.

EJEMPLO 1. Hallar la intersección de las rectas $L_1=\{(2,-3)+t(4,-2)/t\in R\}$ y $L_2=\{(-2,1)+s(-1,-2)/s\in R\}$.

Solución. Primero verifiquemos que: $L_1 \not\parallel L_2$

Como $(4,-2)^{\perp}.(-1,-2) = (2,4).(-1,-2) = -20\neq 0 \rightarrow L_1\not\parallel L_2$

Luego, $\exists t,s\in R/P=(2,-3)+t(4,-2) = (-2,1)+s(-1,-2)$ (1)

o sea:

$$t(4,-2)-s(-1,-2) = (-4,4) \qquad (2)$$

Para eliminar s, tomemos el producto escalar de la ecuación (2) con el vector $(-1,-2)^{\perp}=(2,-1)$, para obtener:

$$t(4,-2).(2,-1)-s(0) = (-4,4).(2,-1) \text{ , de donde: } t=-\frac{6}{5}$$

Sustituyendo en (1): $P = (2,-3)-\frac{6}{5}(4,-2) = (-\frac{14}{5},-\frac{3}{5})$

Para comprobar este resultado, eliminemos t, multiplicando escalarmente la ecuación (2) por $(4,-2)^{\perp}=(2,4)$

$$t(0) - s(-1,-2).(2,4) = (-4,4).(2,4) \rightarrow s=4/5$$

Luego, en (1): $P = (-2,1) + \frac{4}{5}(-1,-2) = (-\frac{14}{5},-\frac{3}{5})$

EJEMPLO 2. Hallar la intersección de la recta L_1 que pasa por los puntos (3,7) y (9,10) y la recta que pasa por (2,-1) y (11,8).

Solución. Los vectores de dirección de L_1 y L_2 son respectivamente: $\vec{a}=(9,10)-(3,7)=(6,3)=3(2,1)$

$\vec{b}=(11,8)-(2,-1)=(9,9)=9(1,1)$

Como $(3,7)\in L_1 \rightarrow L_1=\{(3,7)+t(2,1)/t\in R\}$

$(2,-1)\in L_2 \rightarrow L_2=\{(2,-1)+s(1,1)/s\in R\}$

Por inspección vemos que $L_1 \not\parallel L_2 \rightarrow \exists t,s\in R$, tal que:

$$P = (3,7)+t(2,1) = (2,-1)+s(1,1) \qquad (1)$$

de donde: $t(2,1)-s(1,1) = (-1,-8) \leftrightarrow (2t-s,t-s) = (-1,-8)$

Por igualdad de vectores: $2t-s=-1$ y $t-s=-8$

Resolviendo el sistema obtenemos: $t=7$ y $s=15$

Sustituyendo ambos valores en (1) se tiene finalmente:

$$P = (3,7)+7(2,1) = (17,14)$$
$$P = (2,-1)+15(1,1) = (17,14)$$

EJEMPLO 3. Hallar el punto de intersección de las rectas de ecuaciones $L_1:x+3y=7$ y $L_2:2x+y=-1$.

Solución. Por simple inspección vemos que $L_1 \not\parallel L_2$.

Luego, la ecuación vectorial equivalente al sistema dado es:

$$(x+3y,2x+y) = (7,-1) \leftrightarrow x(1,2) + y(3,1) = (7,-1)$$

Esta ecuación se puede resolver empleando el método descrito en el ejemplo 1. Es decir, se elimina y multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(3,1)^{\perp}=(-1,3)$.

$\rightarrow x(1,2).(-1,3) = (7,-1).(-1,3)$

$\rightarrow x(-1+6) = (-7-3)$, de donde: $x=-2$

Ahora, para eliminar x multiplicamos escalarmente por: $(1,2)^{\perp}=(-2,1)$

$\rightarrow y(3,1).(-2,1) = (7,-1).(-2,1)$

$\rightarrow y(-6+1) = (-14-1)$, de donde: $y=3$

Por tanto, el punto de intersección es: $P(-2,3)$

Los ejemplos anteriores ilustran 3 de los muchos métodos que existen para hallar la intersección de dos rectas en el plano.

EJEMPLO 4. Si L_1 es la recta que pasa por (4,2) y es perpendicular al vector $\vec{v}=(5,3)$ y L_2 es la recta que pasa por (-1,-1) es paralela a la recta $L_3: 10x-6y=3$, hallar $L_1 \cap L_2$.

Solución. Si $L_1 \perp \vec{v}=(5,3) \rightarrow L_1=\{(4,2)+t(-3,5)/t\in R\}$.

$L_2 || L_3 \rightarrow m_2 = m_3 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, luego, $\vec{b}=(3,5)$ es un vector de dirección de L_2, entonces: $L_2=\{(-1,-1)+r(3,5)/r\in R\}$.

Como $L_1 \not\parallel L_2 \rightarrow \exists t,r\in R/\ P = (4,2)+t(-3,5) = (-1,-1)+r(3,5)$ (1)

$$\rightarrow t(-3,5)-r(3,5) = (-5,-3)$$

Multiplicando escalarmente por $(3,5)^{\perp}=(-5,3)$ se tiene:

$$t(-3,5).(-5,3) = (-5,-3).(-5,3)$$
$$\rightarrow t(15+15) = (25-9) \leftrightarrow t=8/15$$

Sustituyendo en (1): $P = (4,2) + \frac{8}{15}(-3,5) = (\frac{12}{5},\frac{14}{3})$

EJEMPLO 5. Dadas las rectas $L_1=\{(1,4)+t(2,1)/t\in R\}$, $L_2=\{(-2,1)+s(1,-2)/s\in R\}$ y $L_3=\{p(-3,2)/p\in R\}$. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

(1) $L_1 || L_3$ (3) $(-3,2)\in(L_1 \cap L_2)$

(2) $L_1 \perp L_2$ (4) $(-3,2)\in(L_1 \cap L_3)$

Solución. (1) Si $L_1 || L_3 \rightarrow \vec{a}_1 || \vec{a}_3$, o bien: $\vec{a}_1.\vec{a}_3^{\perp}=0$

$\rightarrow (2,1).(-2,-3) = -4-3 = -7\neq 0 \rightarrow L_1 \not\parallel L_3$

Luego, la afirmación es FALSA

(2) Si $L_1 \perp L_2 \rightarrow \vec{a}_1.\vec{a}_2=0$

$\rightarrow (2,1).(1,-2) = 2-2 = 0$. Entonces: $L_1 \perp L_2$

La afirmación es VERDADERA.

(3) Si $(-3,2)\in(L_1 \cap L_2) \rightarrow \exists t,s\in R$, tal que:

$(-3,2) = (1,4)+t(2,1)$ y $(-3,2) = (-2,0)+s(1,-2)$

$\rightarrow -2(2,1) = t(2,1)$ y $-(1,-2) = s(1,-2)$

de donde: $t=-2\in R$ y $s=-1\in R$, luego: $(-3,2)\in(L_1 \cap L_2)$

La afirmación es VERDADERA.

(4) Si $(-3,2)\in(L_1 \cap L_3) \rightarrow \exists t,p\in R$, tal que:

$(-3,2) = (1,4)+t(2,1)$ y $(-3,2) = p(-3,2)$

de donde: $t=-2\in R$ y $p=1\in R$, luego: $(-3,2)\in(L_1 \cap L_3)$

La afirmación es VERDADERA.

EJEMPLO 6. Sean las rectas $L_1:P=(1,2)+t(1,-2), t\varepsilon R$; $L_2:P=(a,2a)+s\vec{b}$, $s\varepsilon R$. Si $L_2\perp L_1$ y $(L_2\cap L_1)\cap(\text{Eje } Y)\neq\Phi$, hallar a.

Solución. Si $L_2\perp L_1 \rightarrow L_2:P=(a,2a)+s(2,1)$, $s\varepsilon R$

En L_1: $(x,y) = (1,2)+t(1,-2) \leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \end{cases}$

Si $x=0 \rightarrow t=-1$, luego: $y = 2+2 = 4$

Por tanto, L_1 intercepta al eje Y en el punto $P(0,4)$

Dado que: $(L_2\cap L_1)\cap(\text{Eje } Y) \neq \Phi \rightarrow P(0,4)\varepsilon L_2$

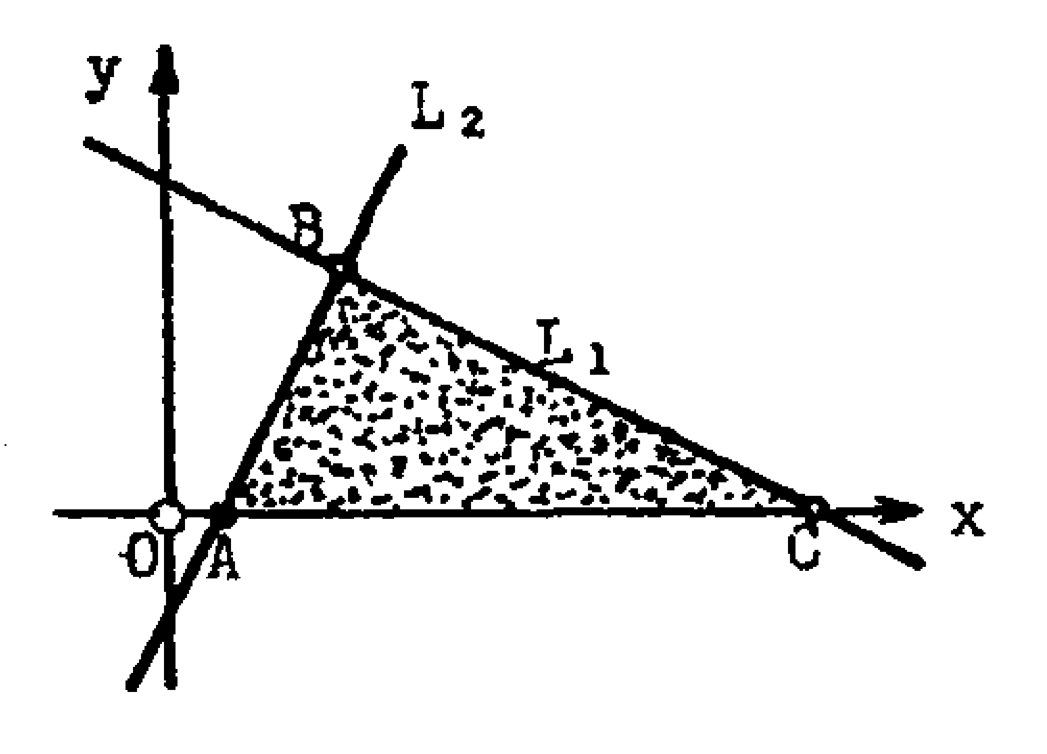
o sea: $(0,4) = (a,2a)+s(2,1)$

Multiplicando escalarmente por $(2,1)^{\perp}=(-1,2)$ se tiene:

$(0,4).(-1,2) = (a,2a).(-1,2)$

$\rightarrow 0 + 8 = -a + 4a$, de donde: $a=8/3$

EJEMPLO 7. Se tiene la recta $L_1:x+2y=16$ y la recta L_2 que es perpendicular a L_1 y que corta al eje X en el punto A(1,0). Hallar el área del ΔABC.



Solución. Según (41), la ecuación de L_2 es de la forma $L_2:2x-y+k=0$

Si $A(1,0)\varepsilon L_2 \rightarrow 2(1)-0+k=0 \rightarrow k=-2$

$\therefore L_2:2x-y-2=0$

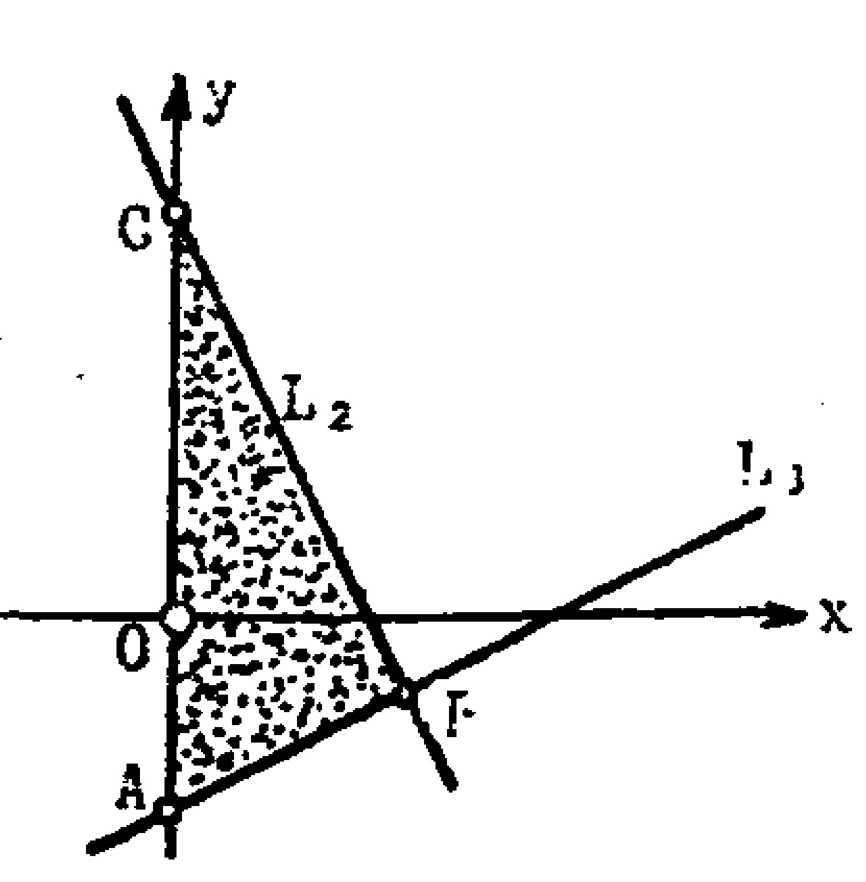
En L_1, si $y=0 \rightarrow x=16 \rightarrow C(16,0)$

$L_1\cap L_2 = (x+2y=16)\cap(2x-y=2) = B(4,6)$

Luego: $\overline{AB} = \vec{B}-\vec{A} = (3,6)$ y $\overline{BC} = \vec{C}-\vec{B} = (12,-6)$

$\therefore a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}(\overline{AB}).(\overline{BC}^{\perp}) = \frac{1}{2}(3,6).(6,12) = 45u^2$

EJEMPLO 8. Sean las rectas $L_1:P=(1,-2)+t(2,1), t\varepsilon R$; $L_2:(2,1).[P-(2,1)]=0$. Hallar el área del triángulo que determinan estas rectas y el eje Y.



Solución. En L_2, $\vec{n}=(2,1) \rightarrow \vec{a}_2=(-1,2)$

Entonces: $L_2:P=(2,1)+r(-1,2)$

Si $B\varepsilon(L_1\cap L_2) \rightarrow \exists t,r\varepsilon R$, tal que:

$(1,-2)+t(2,1) = (2,1)+r(-1,2)$

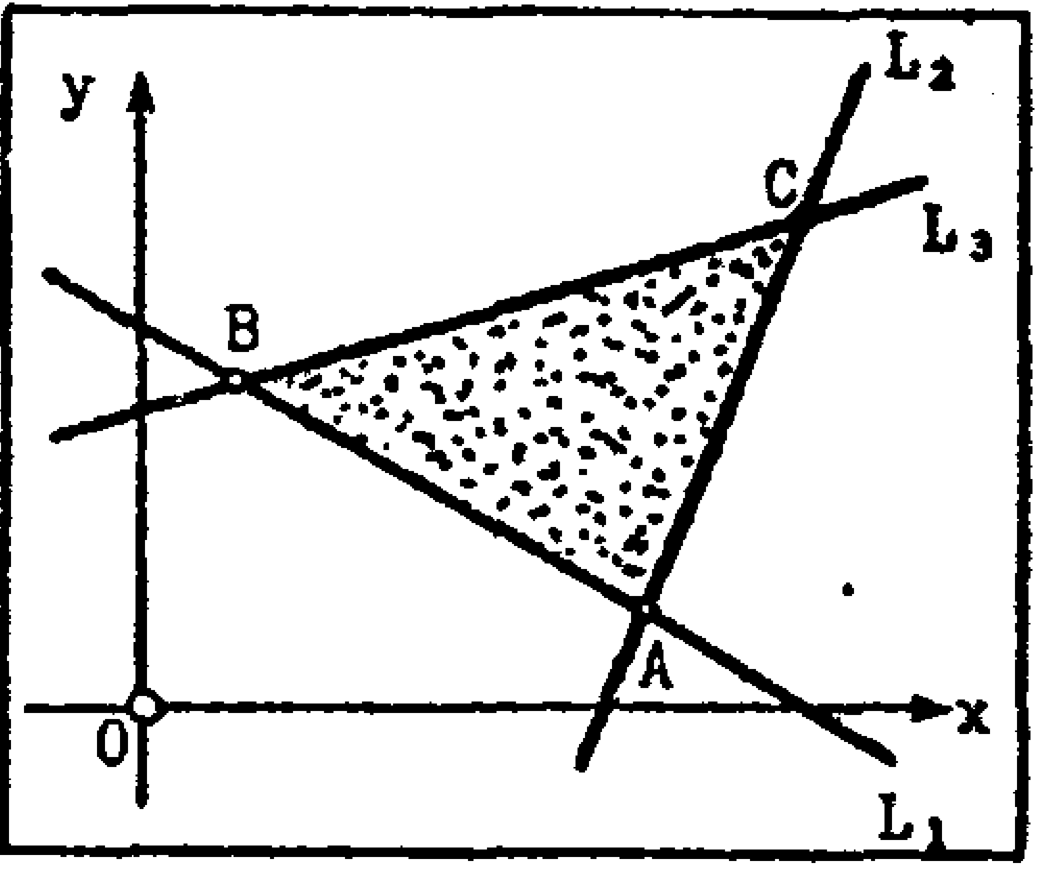
o sea: $t(2,1)-r(-1,2) = (1,3)$

Multiplicando escalarmente por $(-1,2)^{\perp}$ se tiene: $t(2,1).(2,1) = (1,3).(2,1)$

de donde: $t=1 \rightarrow B=(1,-2)+(2,1)=(3,-1)$
Interceptando L_1 y L_2 con el eje Y obtenemos: $A(0,-\frac{5}{2})$ y $C(0,5)$
Luego: $\overline{AB}=(3,-1)-(0,-5/2)=(3,3/2)$ y $\overline{BC}=(0,5)-(3,-1)=(-3,6)$

$$\therefore\ a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|(\overline{BC}).(\overline{AB}^{\perp})| = \frac{1}{2}|(-3,6).(-\frac{3}{2},3)| = 45/4\ u^2$$

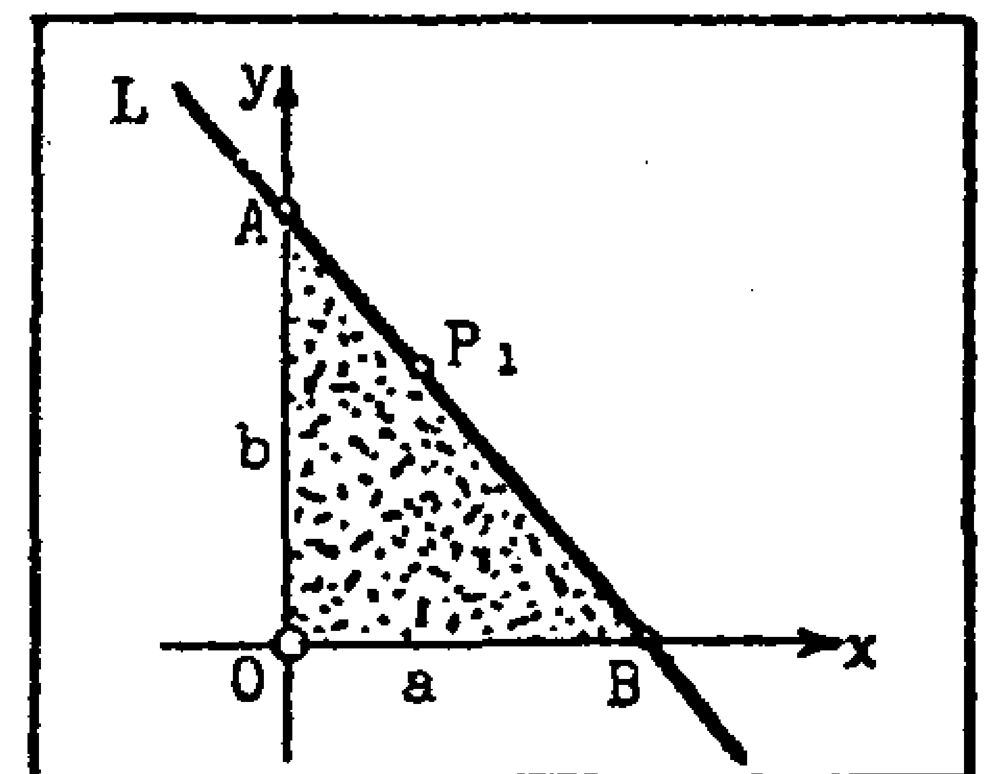
EJEMPLO 9. Hallar el área del triángulo determinado por las rectas L_1, L_2 y L_3, sabiendo que L_1 pasa por el punto (1,4) y es ortogonal al vector (3,5), L_2 pasa por el punto (6,1) y es paralela a la recta $L:5x-2y-3=0$, L_3 pasa por el punto (8,6) y es perpendicular a una recta de pendiente -7/2.



Solución. Las ecuaciones paramétricas de las tres rectas son:
$L_1:P=(1,4)+t(-5,3)$, $L_2:P=(6,1)+r(2,5)$
y $L_3:P=(8,6)+s(7,2)$
Si $A\in(L_1\cap L_2) \rightarrow \exists r,t\in R$, tal que:
$(1,4)+t(-5,3) = (6,1)+r(2,5)$
$\rightarrow t(-5,3)-r(2,5) = (5,-3)$
de donde: $t=-1$ y $r=0 \rightarrow A=(6,1)$
Si $B\in(L_1\cap L_3) \rightarrow \exists t,s\in R/\ (1,4)+t(-5,3) = (8,6)+s(7,2)$
$\rightarrow t(-5,3)-s(7,2) = (7,2)$, de donde: $t=0$ y $s=-1 \rightarrow B=(1,4)$
Si $C\in(L_2\cap L_3) \rightarrow \exists r,s\in R/\ (6,1)+r(2,5)=(8,6)+s(7,2)$
$\rightarrow r(2,5)-s(7,2) = (2,5)$, de donde: $r=1$ y $s=0 \rightarrow C=(8,6)$
Luego: $\overline{AB}=(1,4)-(6,1)=(-5,3)$ y $\overline{AC}=(8,6)-(6,1)=(2,5)$

$$\therefore\ a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|\overline{AB}.\overline{AC}^{\perp}| = \frac{1}{2}|(-5,3).(-5,2)| = 15.5u^2$$

EJEMPLO 10. Dadas las rectas $L_1=\{(3,6)+t(1,2)/t\in R\}$, $L_2=\{(0,3)+s(1,-1)/s\in R\}$. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por $(L_1\cap L_2)$ y que forma con los ejes coordenados positivos un triángulo de área 4 u^2.



Solución. Si $P_1\in(L_1\cap L_2) \rightarrow \exists t,s\in R/$
$(3,6)+t(1,2) = (0,3)+s(1,-1)$
$\rightarrow t(1,2)-s(1,-1) = (-3,-3)$
de donde: $t=-2$ y $s=1 \rightarrow P_1=(1,2)$

Sea la recta buscada, $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (1)

Si $P_1(1,2)\in L \rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ (2)

Pero: $a(\Delta AOB) = \frac{1}{2}|ab| \rightarrow |ab|=8 \leftrightarrow ab=8$ ó $ab=-8$

Como a y b son positivos $\rightarrow ab=8$ (3)

Resolviendo (2) y (3) obtenemos: $a=2$ y $b=4$

Luego, en (1): $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \leftrightarrow L:2x+y-4=0 \rightarrow m=-2$

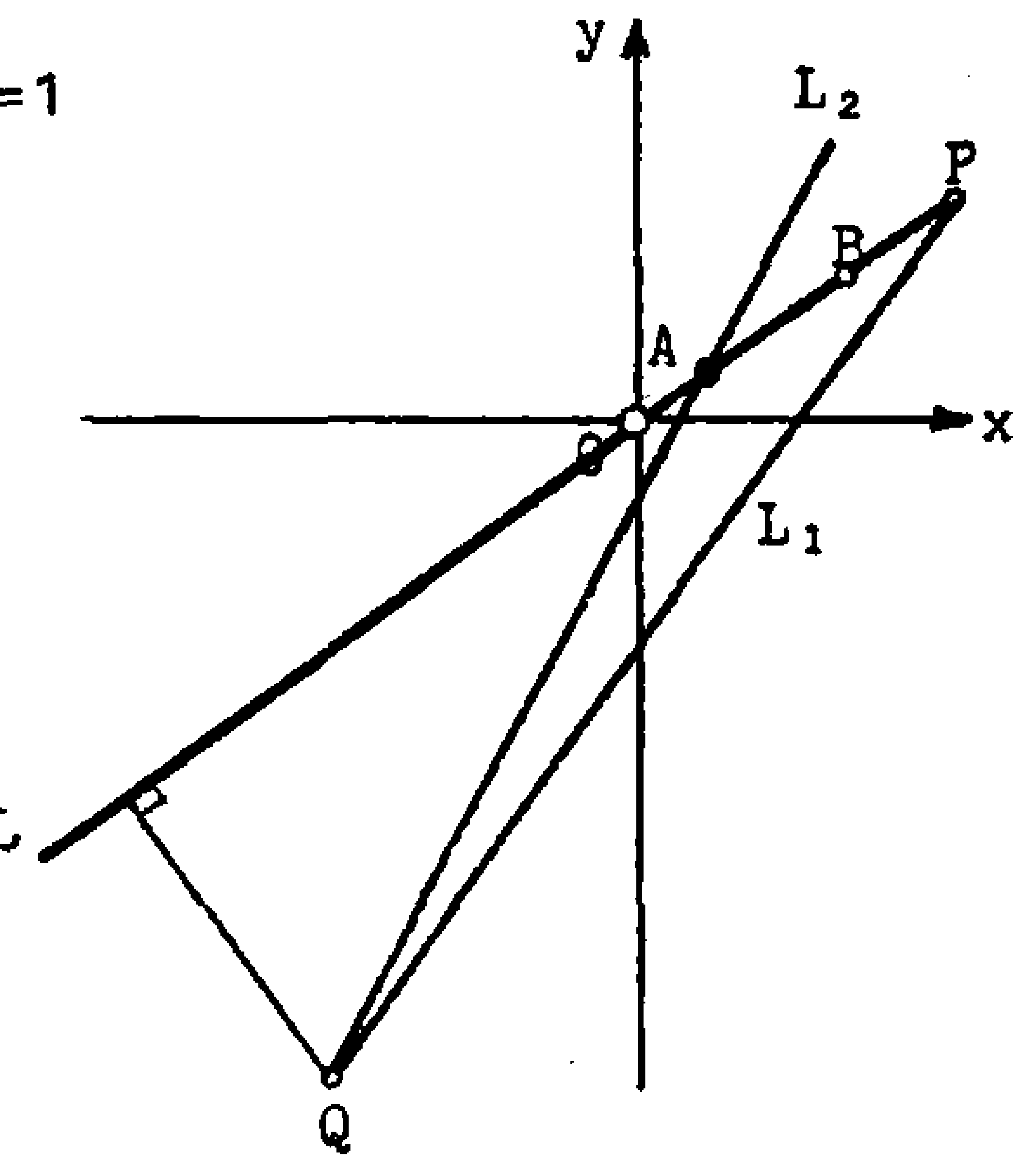
Por tanto, según (39): $L=\{(1,2)+r(1,-2)/r\in R\}$

EJEMPLO 11. Sea P un punto que divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $(-3):1$, donde $A=(3,2)$ y $B=(9,6)$. Si por P pasa una recta L_1 con pendiente $3/2$, otra recta L_2 pasa por A, tal q' la $d(Q,L)=10\sqrt{13}$, donde $Q\in(L_1 \cap L_2)$ y L es la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$. Hallar:

a) La intersección de L_1 y L_2.

b) Las ecuaciones vectoriales de L_1 y L_2.

Nota. Q se encuentra debajo de la recta L.



Solución. a) Si $\frac{m}{n} = \frac{-3}{1} \rightarrow m=-3$ y $n=1$

$$\rightarrow P = \frac{n}{m+n}A + \frac{m}{m+n}B$$

$$\rightarrow P = -\frac{1}{2}(3,2) + \frac{3}{2}(9,6) = (12,8)$$

Luego, $L_1=\{(12,8)+t(2,3)/t\in R\}$

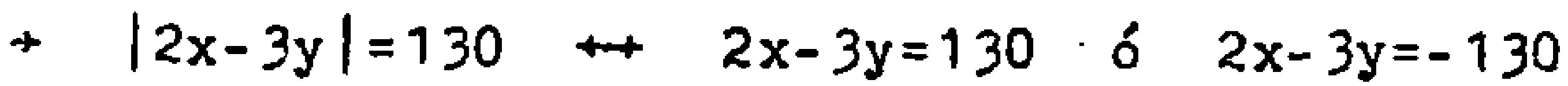
$\leftrightarrow L_1: 3x-2y-20=0$

$\overline{AB} = \vec{B}-\vec{A} = (9,6)-(3,2) = 2(3,2)$

Como $L || \overline{AB} \rightarrow L=\{(3,2)+s(3,2)\}$

$\leftrightarrow L:2x-3y=0$

Si $d(Q,L)=10\sqrt{13} \rightarrow \frac{|2x-3y|}{\sqrt{13}} = 10\sqrt{13}$


$\rightarrow |2x-3y|=130 \leftrightarrow 2x-3y=130$ ó $2x-3y=-130$

$Q\in L_1 \rightarrow Q\in(3x-2y-20=0) \cap (2x-3y=130) \rightarrow Q=(-40,-70)$

$\rightarrow Q\in(3x-2y-20=0) \cap (2x-3y=-130) \rightarrow Q=(64,86)$

Según la nota, Q se encuentra debajo de L $\rightarrow Q=(-40,-70)\in(L_1 \cap L_2)$

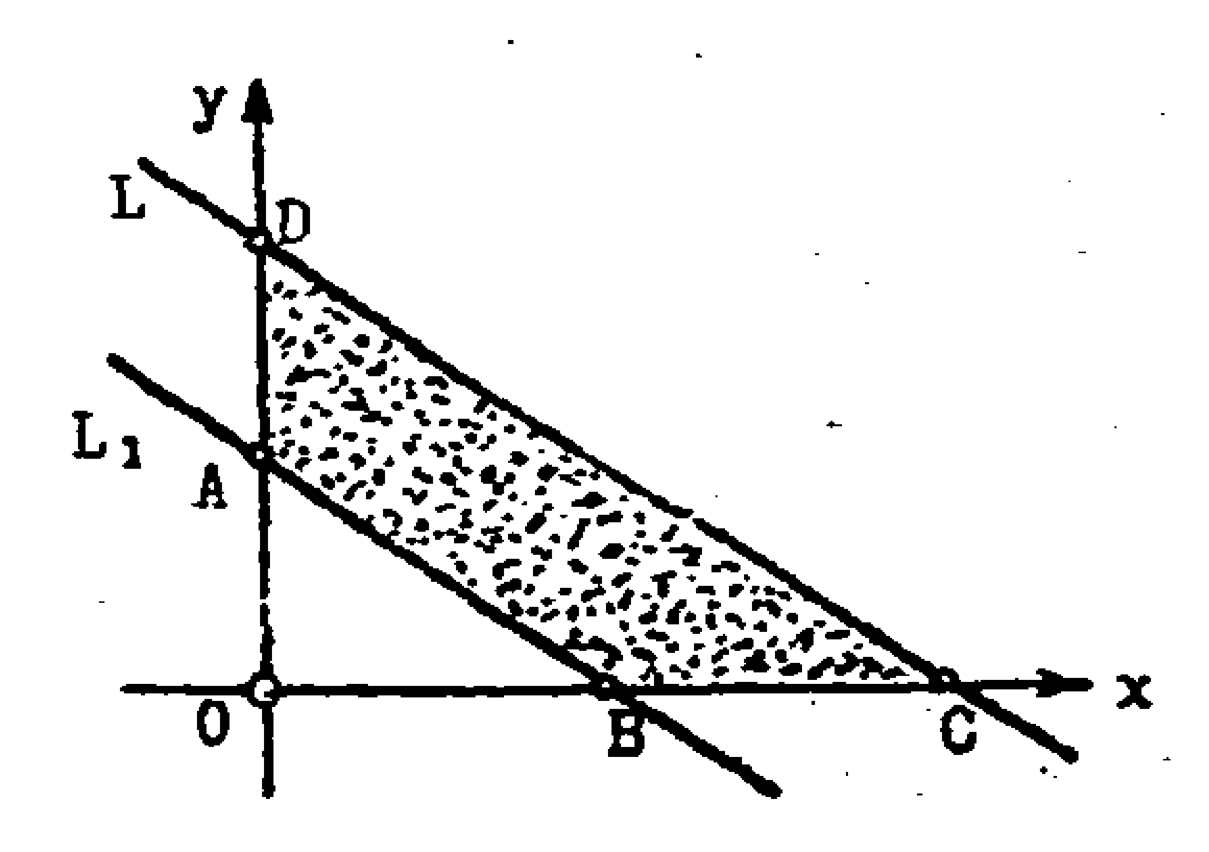
b) La ecuación de L_1 fue hallada en la parte (a).

El vector de dirección de L_2 es: $\vec{b}=\overline{QA}=(3,2)-(-40,-70)=(43,72)$

$\therefore L_2:P=(3,2)+r(43,72),\ r\in R$

EJEMPLO 12. Dada la recta $L_1:2x+3y-6=0$, hallar la ecuación normal de la recta L que es paralela a L_1 y forma con

esta y los ejes coordenados un trapecio de área igual a $9u^2$.



Solución. Interceptando L_1 con los ejes coordenados obtenemos: A(0,2) y B(3,0).

Entonces: $a(\Delta AOB) = \frac{1}{2}(2)(3) = 3u^2$

Una recta paralela a L_1 es de la forma $L:2x+3y+k=0$, cuyos interceptos con los ejes coordenados son:

$$C(-k/2,0) \text{ y } D(0,-k/3)$$

Si $a(ABCD) = a(\Delta DOC)-a(\Delta AOB) \rightarrow 9 = \frac{1}{2}(-\frac{k}{2})(-\frac{k}{3}) - 3$

de donde: $k^2=144 \leftrightarrow k=12$ ó $k=-12$

Como las coordenadas de C y D son positivas $\rightarrow k=-12$

Luego: C(6,0) y D(0,4).

Si $\vec{n}=(2,3)$ es un vector normal a L y $D(0,4)\in L$, su ecuación normal es:

$$L = \{P\in R^2/(2,3).[P-(0,4)]=0\} \leftrightarrow L:(2,3).(x,y-4)=0$$

EJERCICIOS

1. Sean L_1 y L_2 dos rectas ortogonales tales que L_1 pasa por (3,2) y (2,5) y L_2 pasa por (2,1). Hallar la intersección de ambas rectas. Rp. P(16/5,7/5)

2. Sean las rectas $L_1:P=(1,0)+s(2,1)$, $s\in R$; $L_2:P=(a,2a)+tb$, $t\in R$. Si $L_1 \perp L_2$ y $L_1 \cap L_2 \cap (\text{Eje } Y) \neq \phi$; hallar el valor de a. Rp. a=-1/8

3. Hallar la ecuación de la recta L que pasa por la intersección de las rectas $L_1=\{(3,2).[P-(0,2)]=0\}$, $L_2:P=(1,0)+t(6,2)$ $t\in R$, sabiendo que $L||\vec{i}$. Rp. $L=\{(0,1).[P-(14/11,1/11)]=0\}$

4. Dadas las rectas $L_1 = \begin{cases} x=-3r \\ y=2r \end{cases}$, $L_2:(-1,3).[P-(0,3)]=0$ y $L_3=(a,b)+t\vec{i}$, $t\in R$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $L_1 \cap L_2$ y sea perpendicular a L_3. Rp. $L:\vec{i}.[P-(-3,2)]=0$

5. Si $L_2:(5,3).[P-(0,10)]=0$, hallar la ecuación de una recta L_1 tal que $(7,0)\varepsilon L_1$ y $\{(4,k)\}=L_1\cap L_2$.

Rp. $L_1:P=(7,0)+t(9,-10), t\varepsilon R$

6. Las rectas $L_1:P=(10,20)+t(1,a), t\varepsilon R$; $L_2:P=(10,20)+r(1,-a), r\varepsilon R$ intersectan al eje X en los puntos A y B respectivamente. Si la distancia entre A y B es 30, hallar la distancia del punto A a la recta L . Rp. 24

7. Hallar el perímetro del triángulo determinado por las rectas $L_1:P=(5,4)+t(-3,-4), t\varepsilon R$; $L_2:Q=(5,0)+s(0,4), s\varepsilon R$ y el eje X.

Rp. 12

8. Hallar el punto de la recta $L:P=(-2,0)+t(4,3)$ que está más cercano al punto $Q(3,5)$. Rp. $(18/5,21/5)$

9. Una de las diagonales de un rombo está contenida en la recta $L_1=\{(a-1,5a-6)+t(a-3,1)/t\varepsilon R\}$ y uno de los lados del mismo está contenido en la recta $L_2=\{(-4a,a-2)+s(3a,a+1)/s\varepsilon R\}$. Si $a>0$ y $P(3a+1,6a)$ es el punto de intersección de las diagonales del rombo, hallar los vértices y el área del rombo.

Rp. $(-4,7)$, $(6,31)$, $(30,41)$, $(20,17)$; $S=476u^2$

10. Sea la recta $L_1:P=(1,3)+t(2,-6), t\varepsilon R$ que forma con los ejes coordenados un triángulo de área A_1. Si L_2 es una recta tal que $L_1||L_2$ y forma con los ejes un triángulo de área A_2 tal que $A_1=4A_2$; hallar la ecuación de L_1.

Rp. $L_1=\{(1,0)+r(-1,3)/r\varepsilon R\}$

11. Hallar la ecuación normal de la recta L_2 de pendiente entera negativa, que no pase por el tercer cuadrante; sabiendo además, que: $L_3\perp L_1$ en A, $B\varepsilon(L_2\cap L_3)$, $C\varepsilon(L_1\cap L_2)$, la abscisa de A es 3, $L_1:3x-y-5=0$, $||\overline{BC}||=5\sqrt{10}$ y $a(\Delta ABC)=60u^2$.

Rp. $L_2:(3,1).[P-(12,1)]=0$

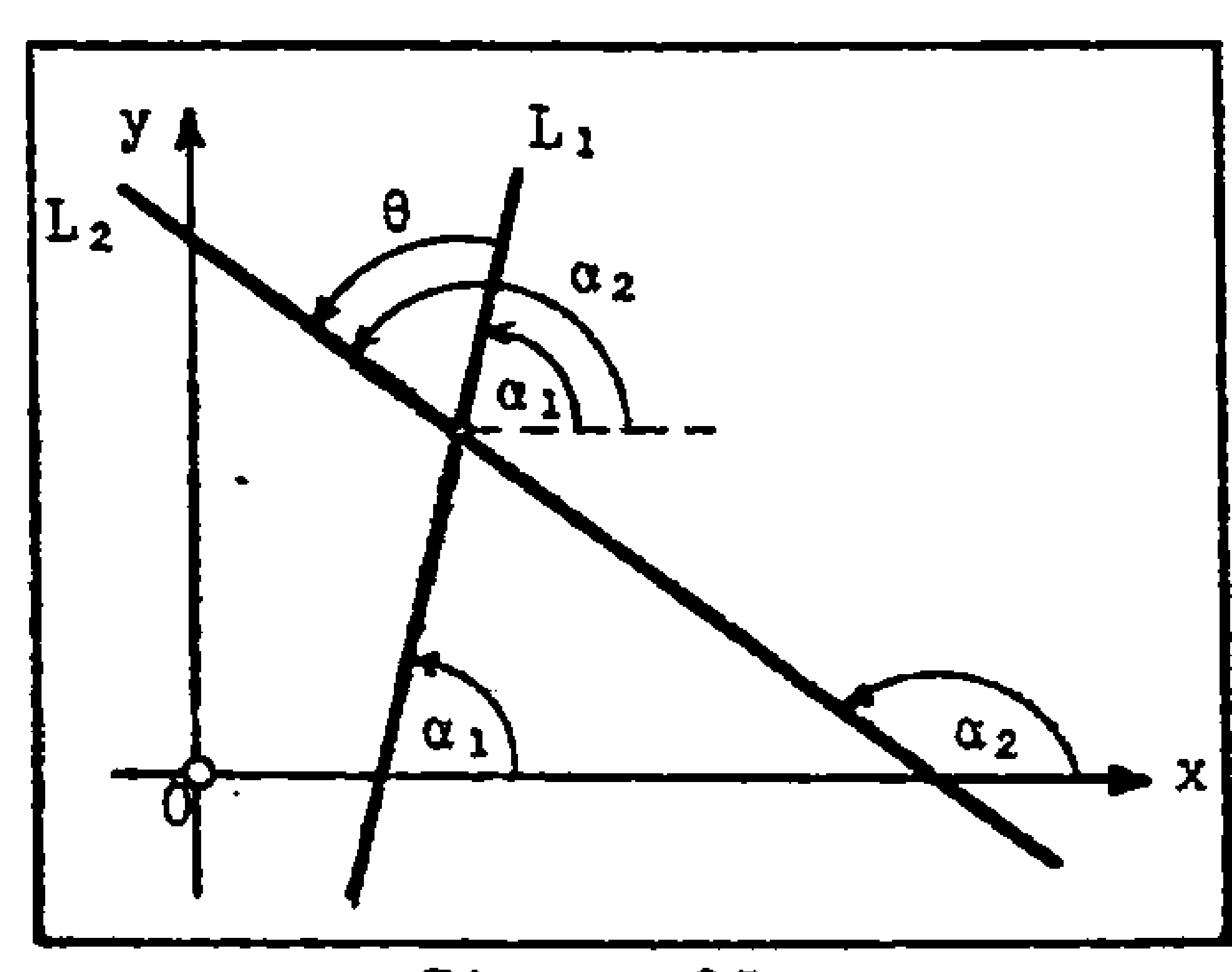
12. Sea L una recta que pasa por la intersección de $L_1:x+2y-1=0$ y $L_2:5x-3y-18=0$, y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $6u^2$. Halle la ecuación de L en su forma simétrica.

Rp. $L: \dfrac{x}{-6\pm6\sqrt{2}} + \dfrac{y}{2\pm2\sqrt{2}} = 1$

1.39 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Si dos rectas se cortan, designemos por L_2 la recta con mayor inclinación α_2, y por L_1 la recta de menor inclinación α_1. Entonces el ángulo θ entre las rectas se define por:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$



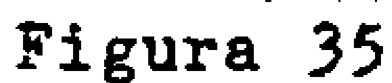


Figura 35

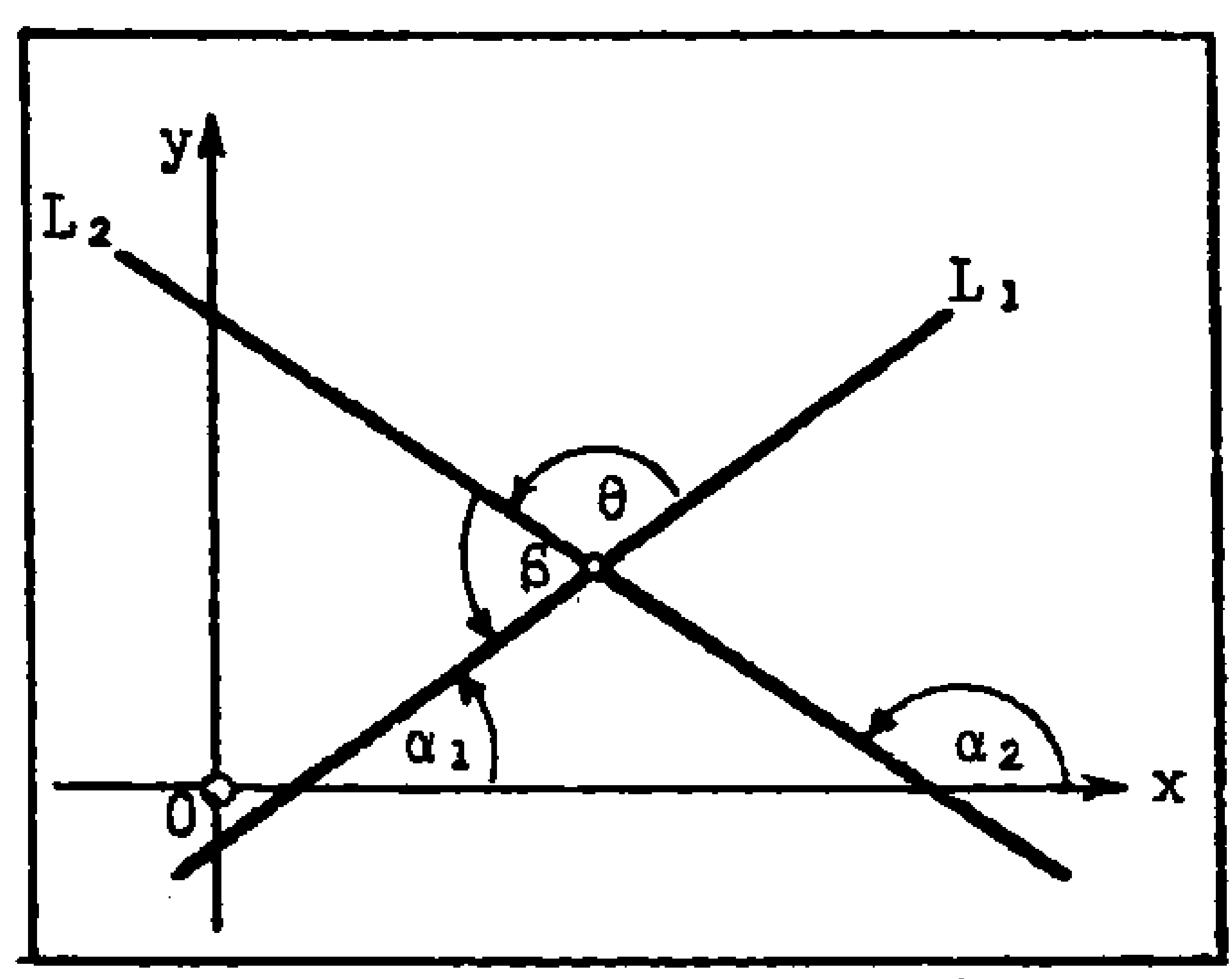


Figura 36

Así, la Figura 35, muestra un caso en que el ángulo θ de L_1 y L_2 es agudo, y la Figura 36, un caso en que el ángulo θ es obtuso.

Nota 1. A la recta de menor inclinación L_1, se le denomina recta inicial porque a partir de ella se mide, en sentido antihorario, el ángulo θ . A la recta de mayor inclinación L_2, se le llama recta final, porque allí termina la medida del ángulo θ.

Si m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, entonces por definición:

$$m_1 = Tg\alpha_1 \text{ y } m_2 = Tg\alpha_2$$

En la figura 35 se observa claramente que: $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

Aplicando tangentes se tiene:

$$Tg\theta = Tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{Tg\alpha_2 - Tg\alpha_1}{1 + Tg\alpha_1 . Tg\alpha_2}$$

$$\therefore \ Tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2} \qquad (52)$$

Si $Tg\theta > 0 \rightarrow \theta$ es agudo, o sea: $\theta \varepsilon <0^o, 90^o>$

$Tg\theta = 0 \rightarrow \theta = 0^o \rightarrow L_1 || L_2 \ (m_1 = m_2)$

Si $Tg\theta<0$ $\rightarrow$ θ es obtuso, o sea: $\theta\epsilon<90^o,180^o>$
$Tg\theta=\infty$ $\rightarrow$ $\theta=90^o$ $\rightarrow$ L_1 L_2 $(m_1.m_2 = -1)$

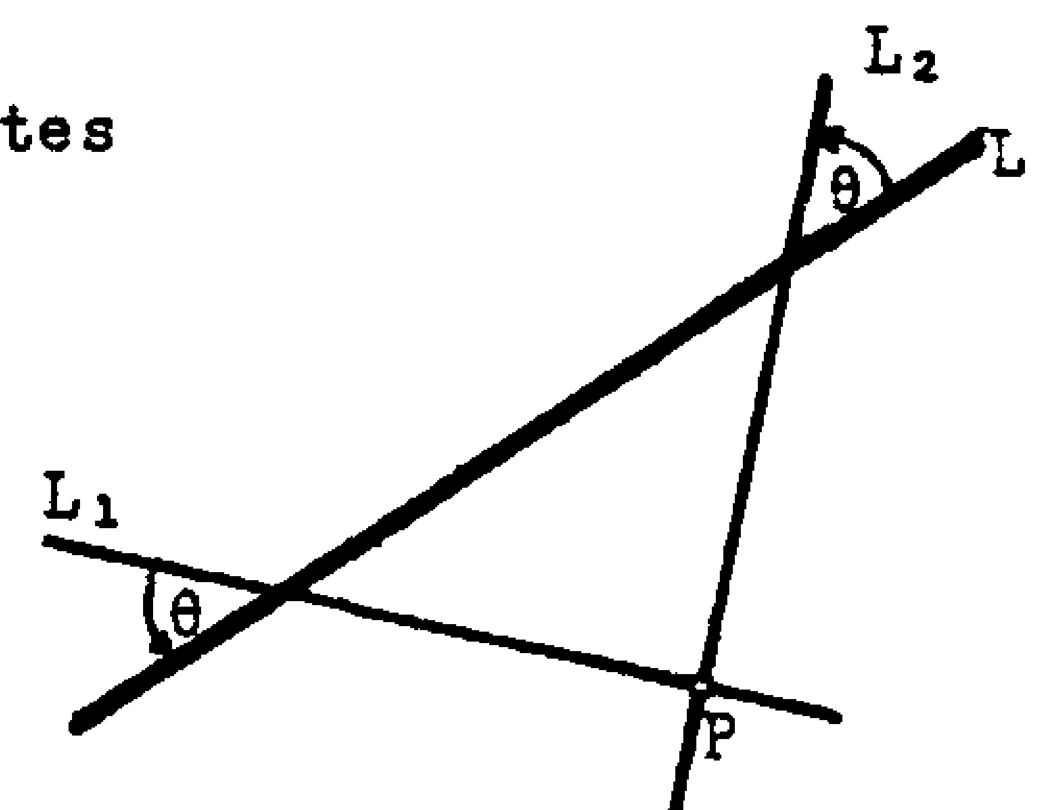
Nota 2. Para aplicar la fórmula (52) y evitar confusiones, es necesario trazar las gráficas de L_1 y L_2. Sin embargo, en la Figura 36, se observa que:

$$\beta=\pi-\theta \rightarrow Tg\beta = Tg(\pi-\theta) = -Tg\theta$$

Es decir, las tangentes de los ángulos suplementarios que forman dos rectas L_1 y L_2, son iguales pero difieren en signo.
Esta propiedad se puede emplear para hallar el ángulo θ entre L_1 y L_2 sin necesidad de trazar sus gráficas, haciendo uso de la fórmula:

$$Tg\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2}\right| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right| \qquad (53)$$

EJEMPLO 1. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por P(2,-1) y forman cada una un ángulo de 45^o con la recta L:2x-3y+7=0.



Solución. Sean m_1 y m_2 las pendientes de las rectas buscadas.
Si L:2x-3y+7=0 $\rightarrow$ m=2/3
Según la fórmula (53) se tiene:

$$Tg45^o = \left|\frac{m-2/3}{1+\frac{2}{3}m}\right| = \left|\frac{3m-2}{3+2m}\right|$$

de donde: $|3m-2| = |3+2m|$

$\leftrightarrow$ $3m-2=3+2m$ ó $3m-2=-3-2m$ $\leftrightarrow$ $m_2=5$ ó $m_1=-1/5$

Por tanto, las ecuaciones requeridas son:

$$y+1 = -\frac{1}{5}(x-2) \quad ó \quad y+1 = 5(x-2)$$

$\leftrightarrow$ L_1:x+5y+3=0 ó L_2:5x-y-11=0

Observaciones.

(1) La fórmula (52) nos permite hallar el ángulo agudo o el obtuso entre L_1 y L_2 en términos de sus respectivas pendientes. Análogamente, si $L_1=\{P_1+t\vec{a}\}$ y $L_2=\{Q_1+s\vec{b}\}$, son las ecuaciones vectoriales de dos rectas no verticales, entonces el ángulo

formado por L_1 y L_2 es el ángulo formado por sus vectores de dirección $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente, y se determina mediante la fórmula:

$$\text{Cos}\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{a}||\ ||\vec{b}||}$$

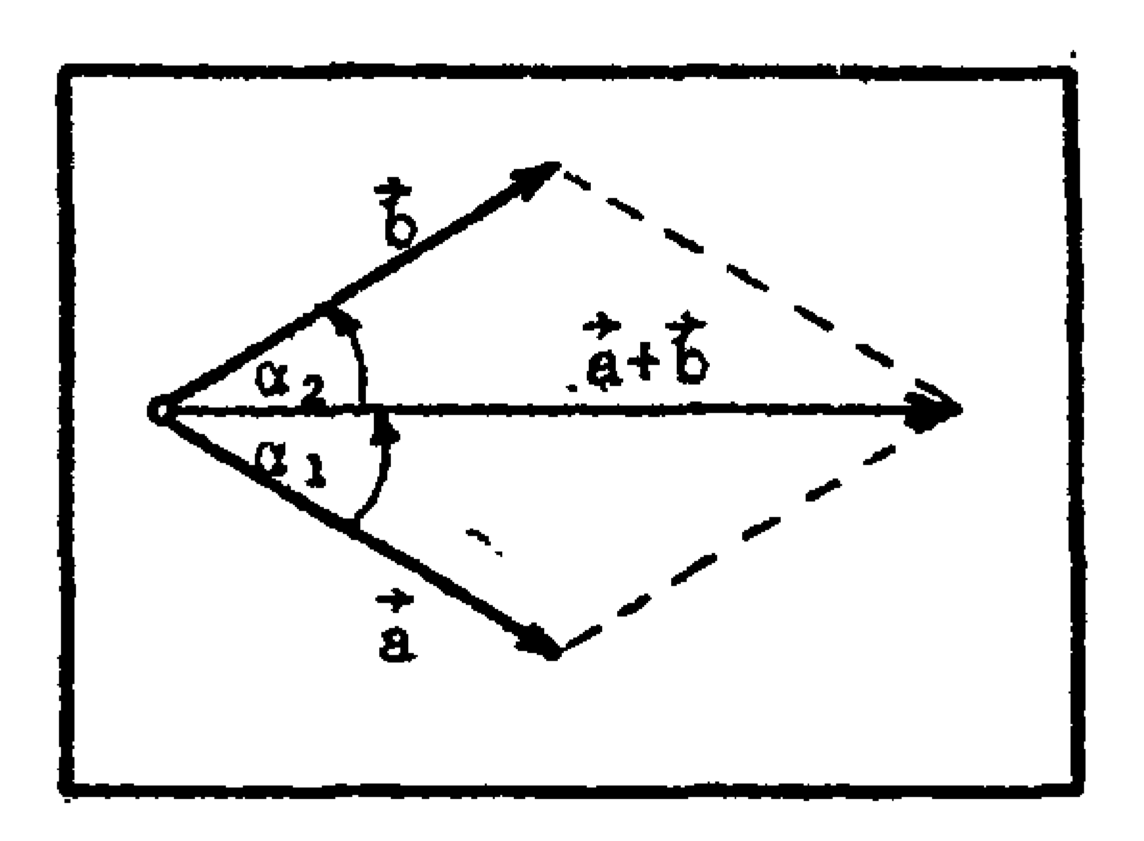
Si $\vec{a}.\vec{b}>0 \rightarrow \text{Cos}\theta > 0 \rightarrow \theta$ es agudo

$\vec{a}.\vec{b}<0 \rightarrow \text{Cos}\theta < 0 \rightarrow \theta$ es obtuso

(2) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores de igual magnitud, es decir: $||\vec{a}||=||\vec{b}||$ y $\vec{a}\neq-\vec{b}$, entonces el vector suma $\vec{a}+\vec{b}$ divide al ángulo θ formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en dos partes iguales, esto es, $\vec{a}+\vec{b}$ sigue la dirección de la bisectriz de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En efecto:

$$\begin{aligned}\text{Cos}\alpha_1 &= \frac{\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})}{||\vec{a}||\ ||\vec{a}+\vec{b}||} \\ &= \frac{||\vec{a}||^2+\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{a}||\ ||\vec{a}+\vec{b}||} \\ &= \frac{||\vec{b}||^2+\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||\ ||\vec{a}+\vec{b}||} \\ &= \frac{\vec{b}.(\vec{b}+\vec{a})}{||\vec{b}||\ ||\vec{a}+\vec{b}||} \\ &= \text{Cos}\alpha_2\end{aligned}$$

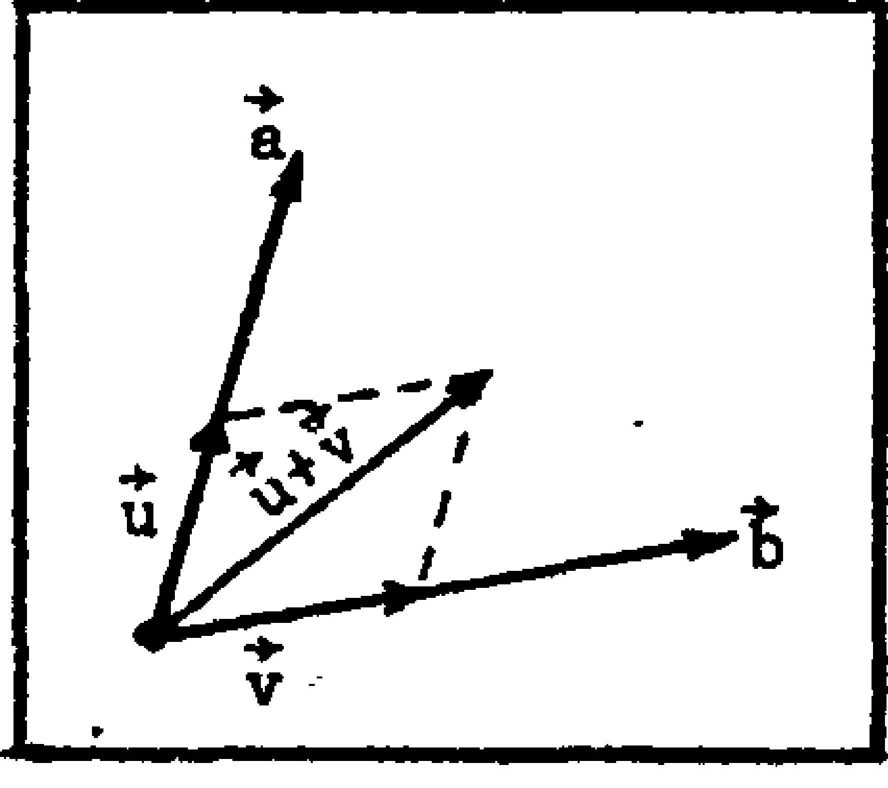


$\therefore\ \alpha_1 = \alpha_2$

(3) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no necesariamente de igual magnitud y no paralelos, entonces el vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ sigue la dirección de la bisectriz del ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, donde:

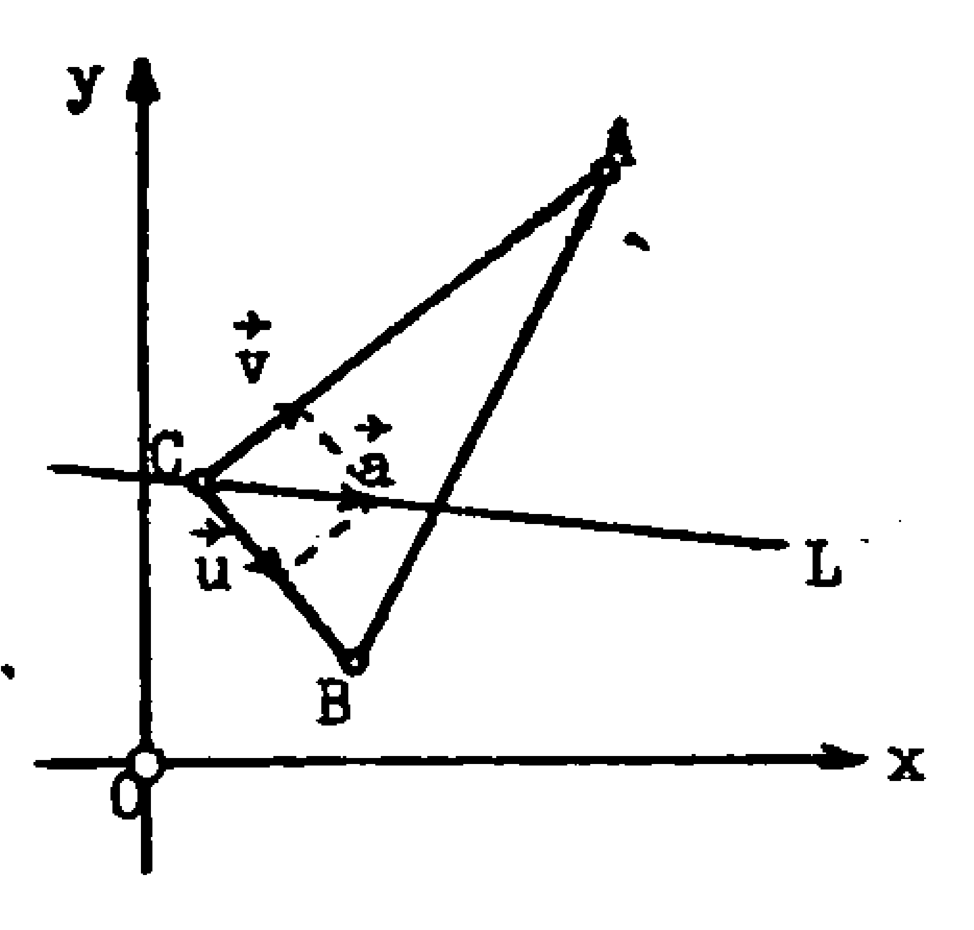
$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} \quad \text{y} \quad \vec{v} = \frac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$$

son vectores unitarios en las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente.



EJEMPLO 2. Los vértices de un triángulo son A(9,12), B(4,2) y C(1,6). Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo interior ACB del triángulo.

Solución. Tenemos: $\overline{CB} = \overline{B}-\overline{C} = (4,2)-(1,6) = (3,-4)$



$\overline{CA} = \vec{A}-\vec{C} = (9,12)-(1,6) = (8,6)$

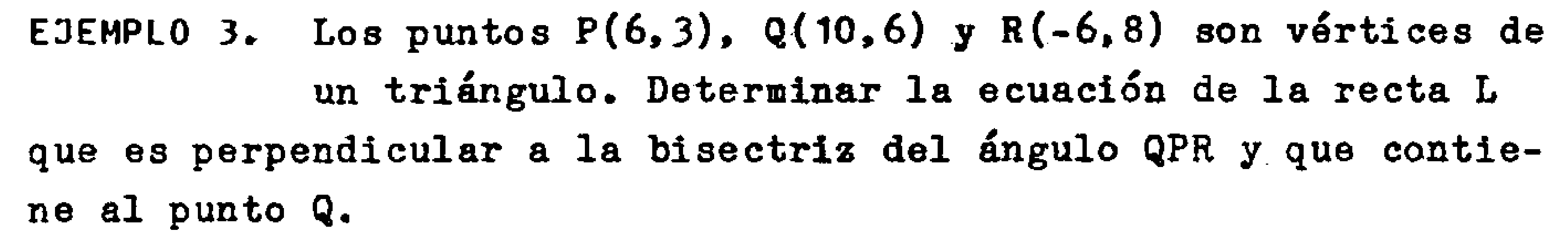
Los vectores unitarios en las direcciones de $\overline{CB}$ y $\overline{CA}$ son respectivamente:

$$\vec{u} = \frac{(3,-4)}{5} \quad y \quad \vec{v} = \frac{(4,3)}{5}$$

Un vector en la dirección de la bisectriz buscada es:

$$\vec{a} = \vec{u}+\vec{v} = \frac{1}{5}(7,-1)$$

Luego, la ecuación de la bisectriz es, $L:P=(1,6)+t(7,-1), t\varepsilon R$



EJEMPLO 3. Los puntos P(6,3), Q(10,6) y R(-6,8) son vértices de un triángulo. Determinar la ecuación de la recta L que es perpendicular a la bisectriz del ángulo QPR y que contiene al punto Q.

Solución. $\overline{PQ} = \vec{Q}-\vec{P} = (4,3)$

$\overline{PR} = \vec{R}-\vec{P} = (-12,5)$

Los vectores unitarios en las direcciones de PQ y PR son, respectivamente:

$$\vec{u} = \frac{(4,3)}{5} \quad y \quad \vec{v} = \frac{(-12,5)}{13}$$

Entonces, los vectores de dirección de L_1 y L_2 son:

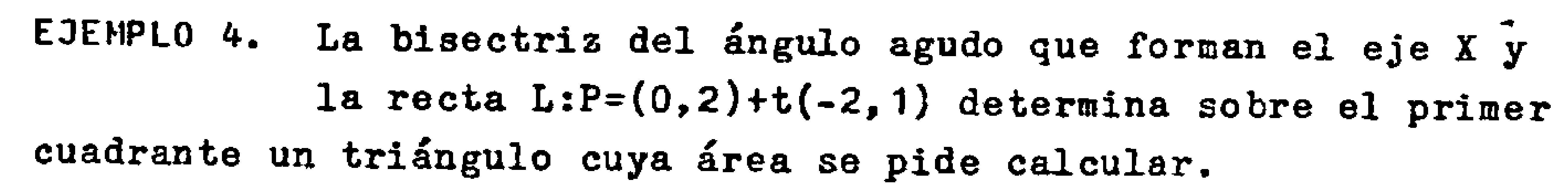
$$\vec{a}_1 = \vec{u}+\vec{v} \quad y \quad \vec{a}_2 = \vec{u}-\vec{v}$$

Como $L_1 \perp L_2$ y $L \perp L_1 \rightarrow L \| L_2$

Por tanto, la ecuación de la recta L que pasa por Q es:

$$L:P=(10,6)+r\vec{a}_2 = (10,6)+r\left[\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$\therefore\ L:P=(10,6)+t(8,1), t\varepsilon R$$



EJEMPLO 4. La bisectriz del ángulo agudo que forman el eje X y la recta $L:P=(0,2)+t(-2,1)$ determina sobre el primer cuadrante un triángulo cuya área se pide calcular.

Solución. Interceptando $L:P=(-2t,2+t)$ con el eje X se tiene:

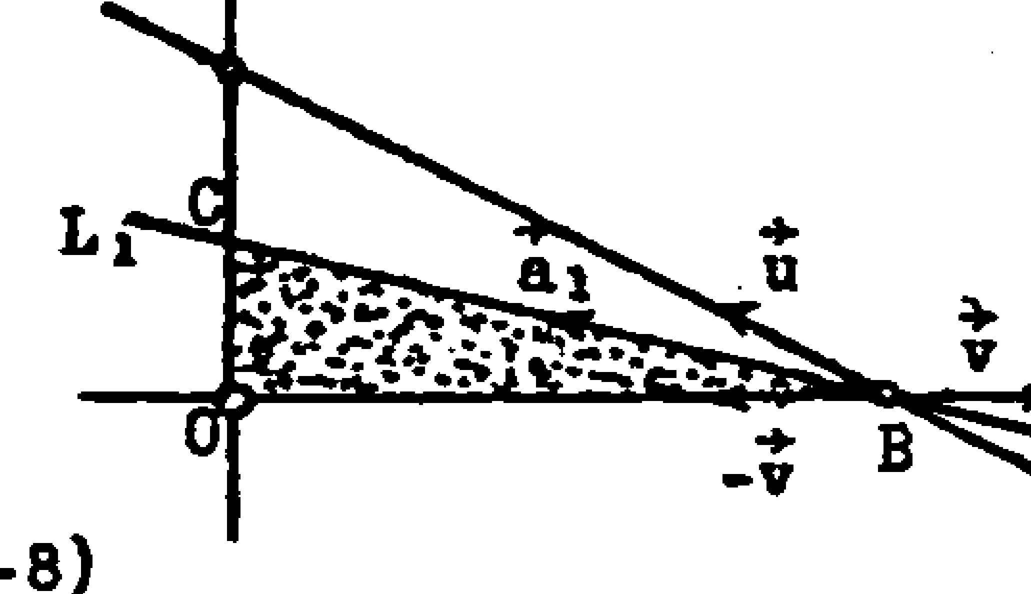
Si $y=0 \rightarrow 2+t=0 \leftrightarrow t=-2$. Luego: $B=(4,0)$

Un vector unitario en la dirección del eje X es $\vec{v}=(1,0)$, y en la dirección de la recta L es $\vec{u}=(-2,1)/\sqrt{5}$.

Luego, un vector en la dirección de la bisectriz L_1 es:

$\vec{a}_1 = \vec{u}-\vec{v} = \dfrac{(-2,1)}{\sqrt{5}} - (1,0)$

$\rightarrow\ \vec{a}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2-\sqrt{5},1)$



Entonces: $L_1: P=(4,0)+r(-2-\sqrt{5},1), r\in R$

Interceptando con el eje Y se tiene:

Si $x=0 \rightarrow 0=4+r(-2-\sqrt{5}) \rightarrow r=4(\sqrt{5}-2)$

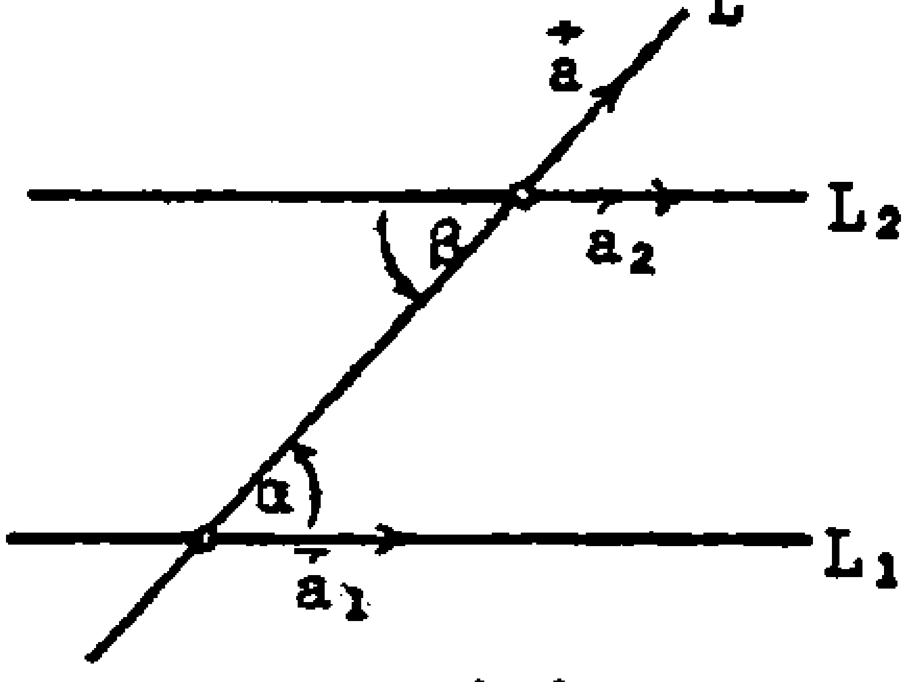
$\rightarrow\ y=0+4(\sqrt{5}-2)(1)=4\sqrt{5}-8 \longrightarrow C(0,4\sqrt{5}-8)$

$\therefore\ a(\Delta COB) = \frac{1}{2}(OB)(OC) = \frac{1}{2}(4)(4\sqrt{5}-8) = 8(\sqrt{5}-2)u^2$

EJEMPLO 5. Demostrar que si las rectas paralelas L_1 y L_2 son interceptadas por una secante L, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Demostración. Debemos probar que $\alpha=\beta$

En efecto:



Supongamos que los vectores de dirección de L, L_1 y L_2, son respectivamente: $\vec{a},\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$. Si $L_1 || L_2 \rightarrow \vec{a}_1 = r\vec{a}_2 \quad (r>0)$

Como α es el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{a}_1$,

entonces: $\text{Cos}\alpha = \dfrac{\vec{a}.\vec{a}_1}{||\vec{a}||\ ||\vec{a}_1||} = \dfrac{\vec{a}.(r\vec{a}_2)}{||\vec{a}||\ r||\vec{a}_2||} = \dfrac{\vec{a}.\vec{a}_2}{||\vec{a}||\ ||\vec{a}_2||}$

Sea β el ángulo formado por los vectores $-\vec{a}$ y $-\vec{a}_2$.

$$\text{Cos}\beta = \frac{(-\vec{a}).(-\vec{a}_2)}{||\vec{a}||\ ||\vec{a}_2||} = \frac{\vec{a}.\vec{a}_2}{||\vec{a}||\ ||\vec{a}_2||} = \text{Cos}\alpha$$

$$\therefore\ \alpha=\beta$$

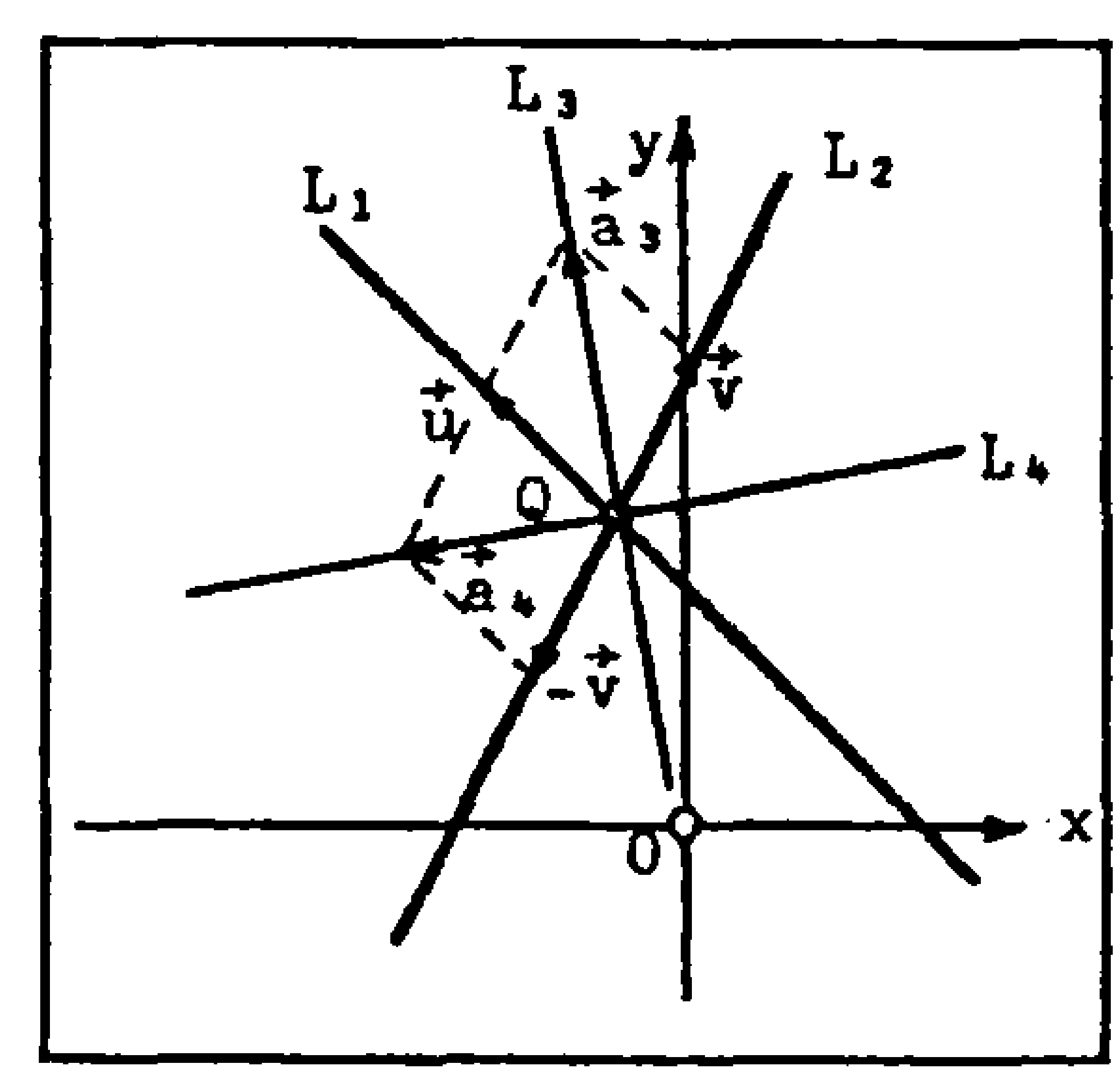
EJEMPLO 6. Los vértices de un triángulo son los puntos A, B y C, tales que $||\vec{A}-\vec{B}||=a$, $||\vec{A}-\vec{C}||=2a$. Hallar la ecuación de la recta que contiene a la bisectriz interior del triángulo correspondiente al ángulo A.

Solución. Sean: $\vec{u} = \dfrac{\overline{AB}}{||\overline{AB}||} = \dfrac{\vec{B}-\vec{A}}{||\vec{B}-\vec{A}||} = \dfrac{\vec{B}-\vec{A}}{a}$

$\vec{v} = \dfrac{\overline{AC}}{||\overline{AC}||} = \dfrac{\vec{C}-\vec{A}}{||\vec{C}-\vec{A}||} = \dfrac{\vec{C}-\vec{A}}{2a}$

$\rightarrow\ \vec{a}=\vec{u}+\vec{v} = \dfrac{1}{2a}(\vec{C}+2\vec{B}-3\vec{A}) \rightarrow L: P=\vec{A}+t(\vec{C}+2\vec{B}-3\vec{A})$

EJEMPLO 7. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $L_1: x+y-3=0$ y $L_2: 2x-y+6=0$ y demostrar que son perpendiculares.



Solución. Sea $L_1 \cap L_2 = Q(-1,4)$

Si $\vec{n}_1=(1,1) \rightarrow \vec{a}_1=(-1,1)$

$\vec{n}_2=(2,-1) \rightarrow \vec{a}_2=(1,2)$

Entonces, los vectores unitarios en las direcciones de L_1 y L_2 son respectivamente:

$$\vec{u} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \vec{v} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$$

Luego, los vectores que siguen las direcciones de las bisectrices son:

$$\vec{a}_3 = \vec{u}+\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{2}-\sqrt{5}, \sqrt{5}+2\sqrt{2}) \quad ; \quad \vec{a}_4 = \vec{u}-\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-\sqrt{2}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-2\sqrt{2})$$

Por tanto, si $L_3: P=Q+t\vec{a}_3 \rightarrow L_3: P=(-1,4)+t(\sqrt{2}-\sqrt{5}, \sqrt{5}+2\sqrt{2}), t\in R$

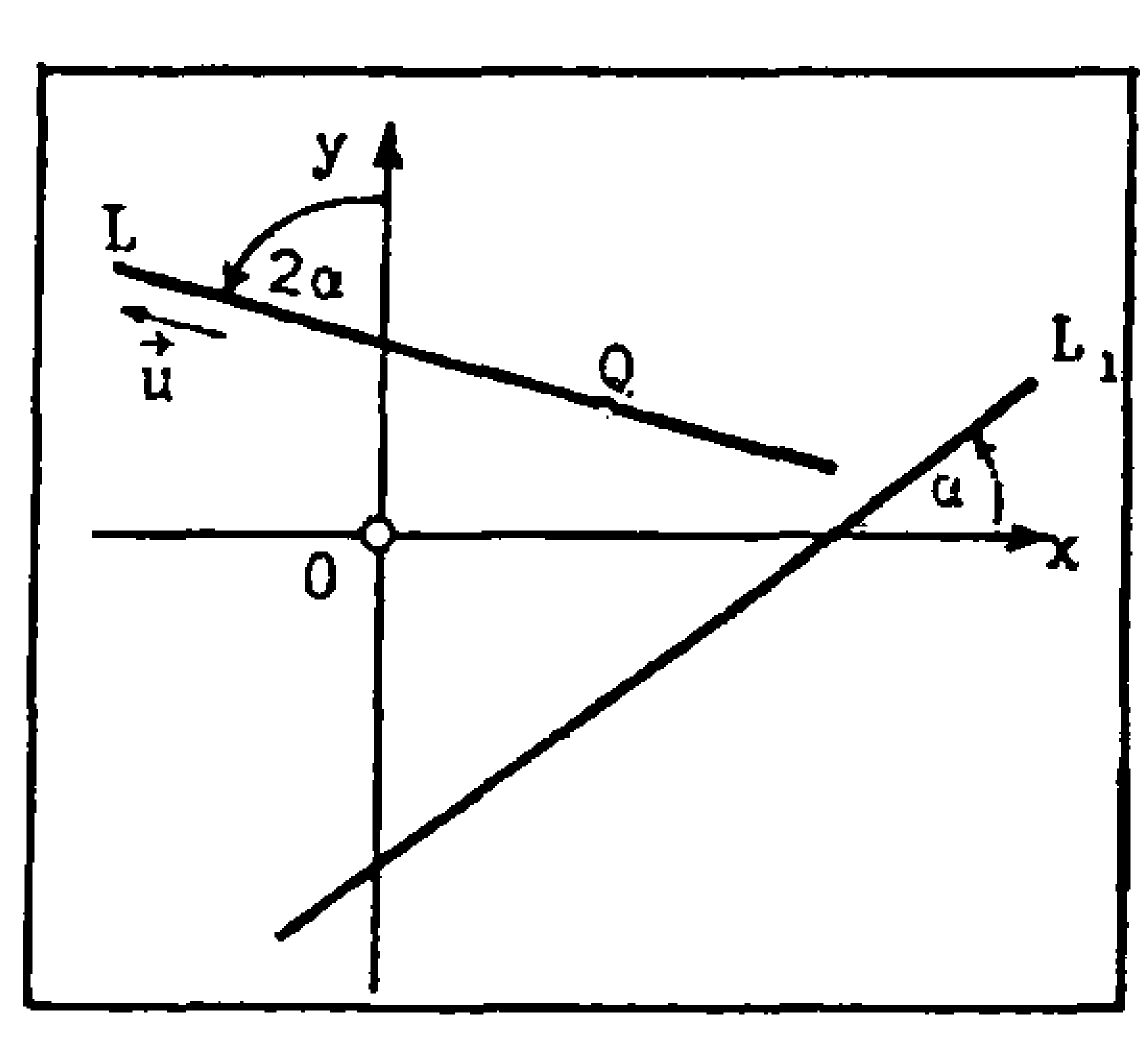
$L_4: P=Q+s\vec{a}_4 \rightarrow L_4: P=(-1,4)+s(-\sqrt{2}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-2\sqrt{2}), s\in R$

Son las ecuaciones vectoriales de las dos bisectrices. Para demostrar que son perpendiculares, bastará probar que: $\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_4=0$

En efecto: $\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_4 = (\sqrt{2}-\sqrt{5}, \sqrt{5}+2\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-2\sqrt{2})$

$= -(2-5)+(5-8) = 3-3 = 0 \rightarrow L_3 \perp L_4$

EJEMPLO 8. Hallar la ecuación de la recta de pendiente negativa que pase por Q(2,1) y forma con el eje Y un ángulo que sea el doble del ángulo formado por la recta $L_1: 3x-4y-12=0$ y el eje X.



Solución. Si $m_1=Tg\alpha=3/4 \rightarrow Cos\alpha=4/5$

Como $Cos2\alpha = 2Cos^2\alpha-1$

$\rightarrow Cos2\alpha = 2(\frac{16}{25})-1 = \frac{7}{25}$

Sea $\vec{u}=(u_1,u_2)$ un vector unitario en la dirección de la recta L.

Si $||\vec{u}||=1 \rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 1$ (1)

Un vector unitario en la dirección del eje Y es (0,1)

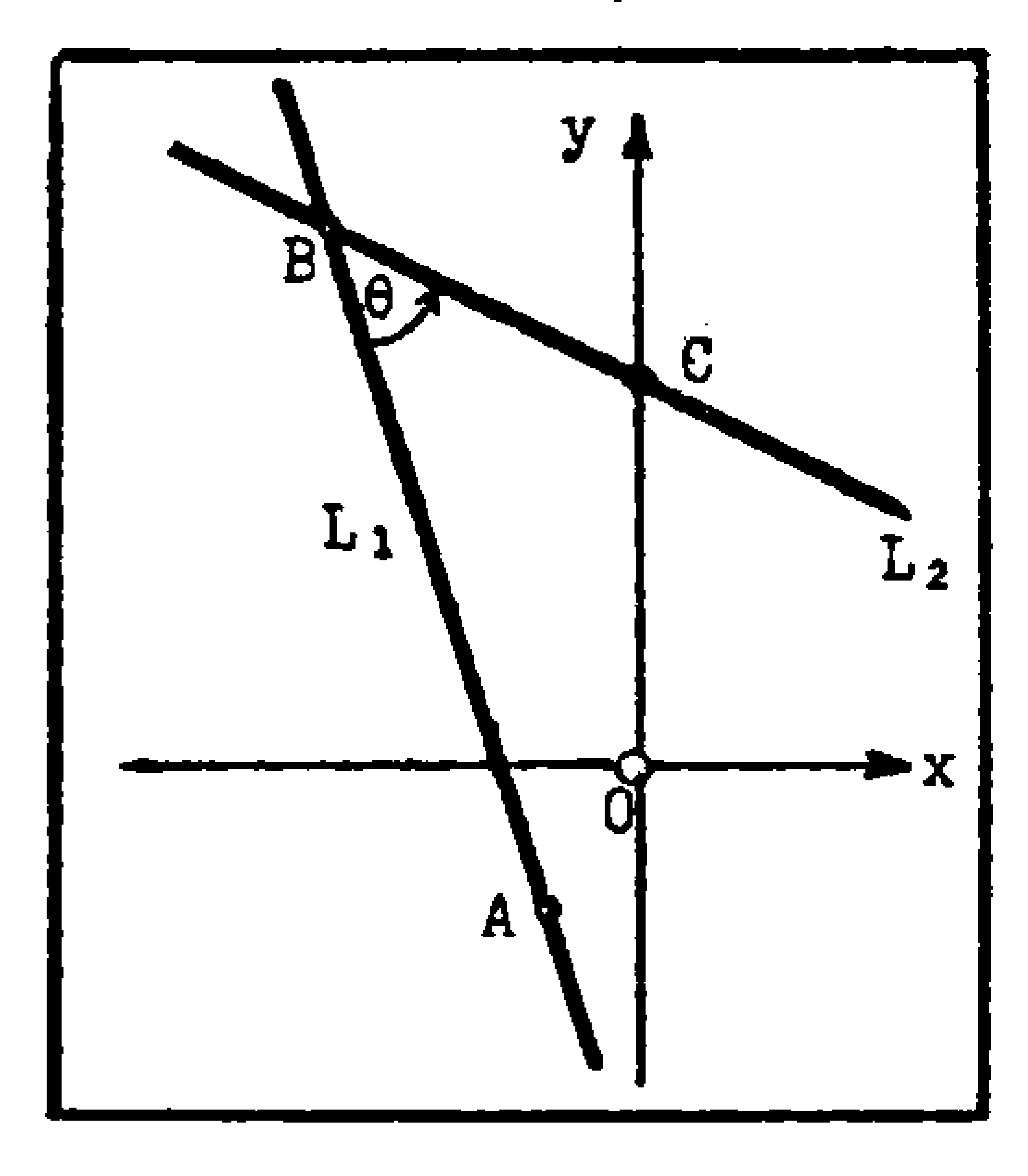
Entonces: $Cos2\alpha = \frac{\vec{u}\cdot(0,1)}{||\vec{u}|| \; ||(0,1)||} \leftrightarrow \frac{7}{25} = (u_1,u_2)\cdot(0,1)$

de donde: $u_1=7/25$

Sustituyendo en (1): $(\frac{7}{25})^2 + u_2^2 = 1 \leftrightarrow u_2 = \pm 24/25$

Como la pendiente de la recta L es negativa elegimos: $u_2=-24/25$
Si $\vec{e}$ es el vector de dirección de L, paralelo a $\vec{u}=(7/25,-24/25)$, entonces: $L:P=(2,1)+t(7,-24), t\in R$

EJEMPLO 9. El ángulo θ entre las rectas $L_1:P=A+t\vec{a}$, $t\in R$ y $L_2: P=C+s\vec{b}$, $s\in R$, mide 45°. Si $\{B\}\in L_1\cap L_2$ estando B en el segundo cuadrante, $C=(0,5)$, $\overline{AB}+\overline{BC}=(1,7)$, y la pendiente de L_1 es -3; hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo θ.



Solución. Siendo $A\in L_1 \rightarrow \overline{AB}||m_1$
o sea: $\overline{AB}=r(1,-3)$

Si $\overline{AB}+\overline{BC}=(1,7) \rightarrow \overline{AB}+(\vec{C}-\vec{B})=(1,7)$
$\rightarrow \overline{AB}-\vec{B}=(1,7)-(0,5)=(1,2)$

Multiplicando escalarmente por $(1,-3)^\perp$ se tiene:

$\overline{AB}.(3,1)-(b_1,b_2).(3,1) = (1,2).(3,1)$

$0 - 3b_1-b_2 = 3+2 \rightarrow 3b_1+b_2=-5 \quad (1)$

$Tg45^\circ = \frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2} \rightarrow 1 = \frac{m_2+3}{1-3m_2} \leftrightarrow m_2=-1/2$

$\rightarrow \frac{b_2-5}{b_1-0} = \frac{1}{2}$, de donde: $b_1+2b_2=10 \quad (2)$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos: $b_1=-4$ y $b_2=7 \rightarrow B(-4,7)$
Si $\overline{AB}=(-3,9)=3(-1,3)$ y $\overline{BC}=(4,-2)=2(2,-1)$, entonces, los vectores unitarios en las direcciones de L_1 y L_2 son respectivamente:

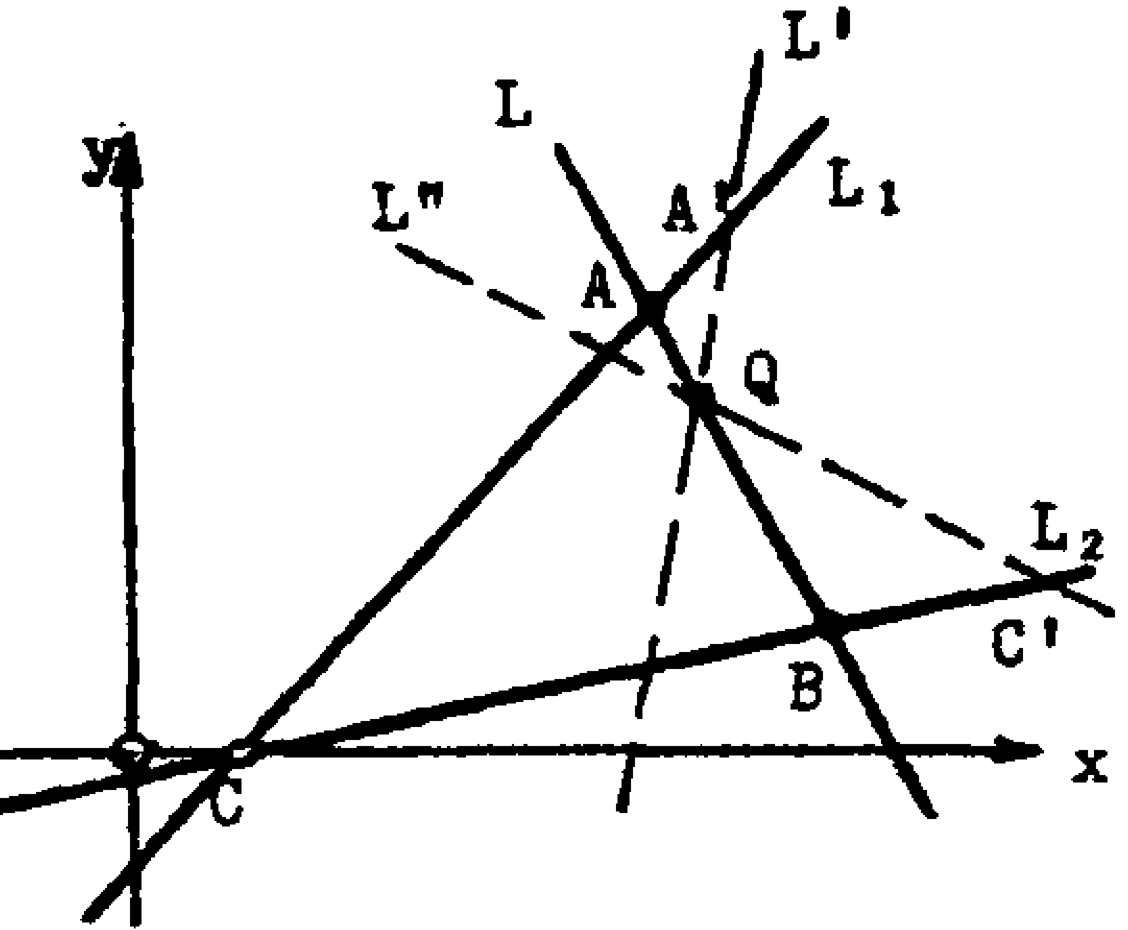
$$\vec{u} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} \ , \ \vec{v} = \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}} \rightarrow \vec{u}+\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1+2\sqrt{2},3-\sqrt{2})$$

es el vector que sigue la dirección de la bisectriz; por tanto, su ecuación es: $L:P=(-4,7)+t(-1+2\sqrt{2},3-\sqrt{2}), t\in R$

EJEMPLO 10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por Q(5,3) y forma un triángulo isósceles con las rectas $L_1: x-y-1=0$ y $L_2:x-7y-1=0$.

Solución. Seam m , $m_1=1$ y $m_2=1/7$ las pendientes de las rectas L, L_1 y L_2 respectivamente.

Caso 1. Los lados iguales se encuentran en L_1 y L_2



$\rightarrow$ $TgA = TgB \leftrightarrow \frac{m-m_1}{1+m.m_1} = \frac{m_2-m}{1+m.m_2}$

$\leftrightarrow \frac{m-1}{1+m} = \frac{1/7 - m}{1 + \frac{1}{7}m}$

de donde: $2m^2+3m-2=0 \leftrightarrow m=-2$ ó $m=1/2$

Hay dos soluciones:

$L:P=(5,3)+t(1,-2)$, $t\epsilon R$

ó $L:P=(5,3)+s(2,1)$, $s\epsilon R$

Caso 2. Los lados iguales se encuentran en L' y L_2

$\rightarrow$ $TgA' = TgC \leftrightarrow \frac{m-m_1}{1+m.m_1} = \frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}$

$\leftrightarrow \frac{m-1}{1+m} = \frac{1-1/7}{1+1/7} \leftrightarrow m=7$

Hay una solución: $L':P=(5,3)+r(1,7)$, $r\epsilon R$

Caso 3. Los lados iguales se encuentran en L" y L_1

$\rightarrow$ $TgC' = TgC \leftrightarrow \frac{m_2-m}{1+m.m_2} = \frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}$

$\leftrightarrow \frac{(1/7)-m}{1+(1/7)m} = \frac{1-(1/7)}{1+(1/7)} \leftrightarrow m=-17/31$

Hay una solución: $L":P=(5,3)+p(31,-17)$, $p\epsilon R$

EJEMPLO 11. Sea $L_1:P=Q+t(7,1), t\epsilon R$, $Q(1,-1)\epsilon(L_1 \cap L_2 \cap L)$, $A(8,0)\epsilon L_1$, $d(A,L)=\sqrt{10}$; L es bisectriz del ángulo formado por L_1 y L_2, siendo su pendiente menor que la de L_1. Hallar las ecuaciones vectoriales de L y L_2.

Solución. $\overline{QA}=\overline{A}-\overline{Q}=(8,0)-(1,-1)=(7,1)$

$\rightarrow ||\overline{QA}||=\sqrt{50}$ y $||\overline{AB}||=\sqrt{10}$

En el ΔQBA, por el teorema de Pitágoras: $||\overline{QB}||^2=(\sqrt{50})^2-(\sqrt{10})^2 = 40$

$\rightarrow ||\overline{QB}||=2\sqrt{10}$

Sea $\vec{u}$ un vector unitario en la dirección de la bisectriz L.

Si $\overline{QA} = \overline{QB} + \overline{BA}$ $\rightarrow$ $(7,1) = ||\overline{QB}||\vec{u} + ||\overline{BA}||\vec{u}^{\perp}$

$\rightarrow$ $(7,1) = 2\sqrt{10}(u_1,u_2)+ \sqrt{10}(-u_2,u_1)$

$\leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2\sqrt{10}u_1 - \sqrt{10}u_2 \\ 1 = 2\sqrt{10}u_2 + \sqrt{10}u_1 \end{cases}$ de donde: $\vec{u} = \frac{(3,-1)}{\sqrt{10}}$

Luego, la pendiente de la bisectriz es: $m=-1/3$

En el ΔQBC: $\quad Tg\alpha = \frac{BC}{QB} \rightarrow \frac{m-m_2}{1+m.m_2} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} \rightarrow \frac{(-1/3)-m_2}{1+(-1/3)m_2} = \frac{1}{2}$

de donde: $m_2=-1$

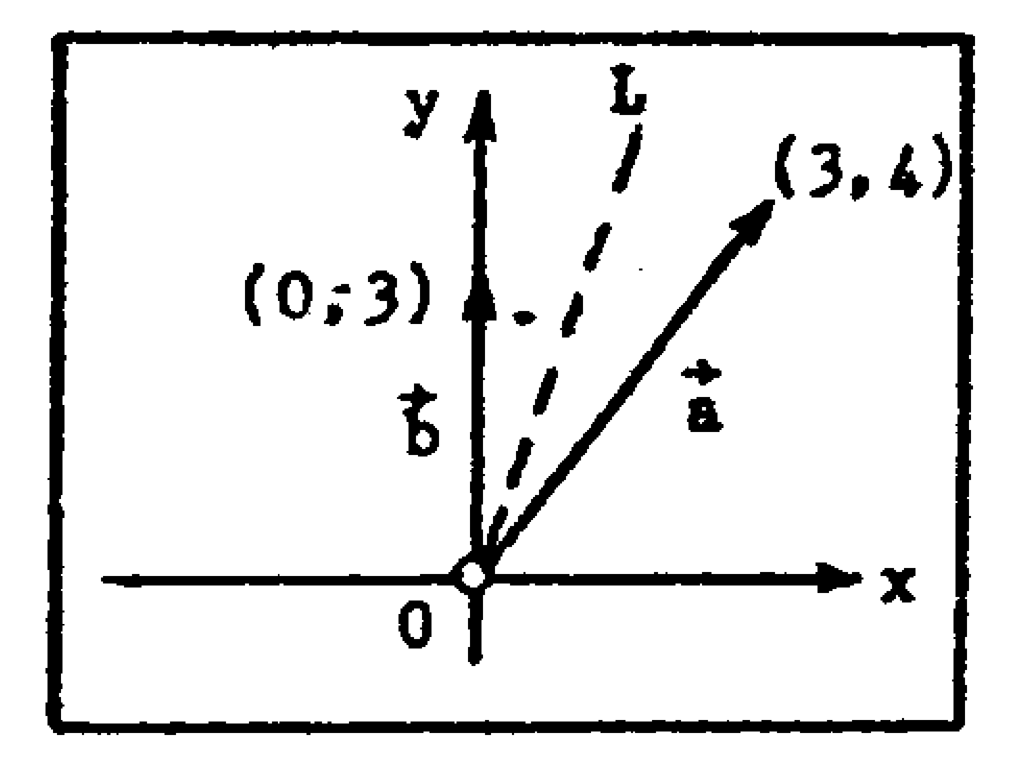
Por tanto, las ecuaciones buscadas son:

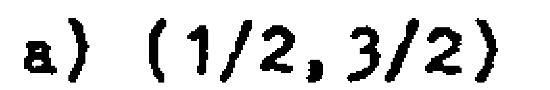
$$L:P=(1,-1)+t(3,-1),t\in R \;;\; L_2:P=(1,-1)+s(1,-1),s\in R$$

EJERCICIOS

1. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la bisectriz del ángulo que forman los vectores $\vec{a}=(3,4)$ y $\vec{b}=(4,-3)$. Rp. $L=\{(-1/5,7/5).P=0\}$

2. Si L es la bisectriz del ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cuántos de los siguientes puntos pertenecen a la recta L?




a) (1/2,3/2) c) (-5/3,-5)
b) (-1,-2) d) (2/3,2)

Rp. 3

3. Las rectas $L_1:P=P_1+t\vec{a}$, $t\in R$, $L_2:\vec{b}.(P-P_2)=0$, se cortan en P_0. Hallar el ángulo entre L_1 y L_2 sabiendo que: $(P_1.P_0)-(P_2.P_0)-(P_1.P_2)=||P_0||^2$, y $P_0\neq P_1\neq P_2$. Rp. 90°

4. Sea el ΔOAB, recto en A. Si O coincide con el origen de coordenadas y OA está sobre el eje X; hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo O, sabiendo que divide al lado opuesto BA en dos segmentos de 10cm y 8cm. Rp. $L:P=t(3,1)$, $t\in R$

5. Los puntos P(2,4), Q(8,6) y R(4,8) son vértices de un triángulo. Hallar la recta que es perpendicular a la bisectriz del ángulo PQR y que pasa por R.
Rp. $L:P=(4,8)+t(1-\sqrt{2},-3-2\sqrt{2})$

6. Sean las rectas $L_1:P=(1,-1)+t(7,1),t\in R$ y $L_2:(1,-1).[P-(2,1)]=0$. Hallar la recta L que tiene pendiente positiva, pasa por Q(0,-2) y forma con L_1 y L_2 un triángulo isósceles cuyos lados congruentes están sobre L_1 y L_2. Rp. $L:P=(0,-2)+t(2,1)$

7. Dadas las rectas $L_1:P=P_1+t\vec{a}$ y $L_2:P=Q_1+s\vec{b}$, no paralelas, demostrar que las rectas bisectrices de los ángulos que forman L_1 y L_2 son ortogonales.

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta bisectriz, de menor pendiente, del ángulo que forman las rectas $L_1:P=(1,1)+t(3,4), t\in R$ y $L_2:P=(2,-1)+s(4,3), s\in R$. Rp. $L:P=t(-1,1), t\in R$

9. Los vértices de un triángulo ABC son A(-6,-2), B(6,1) y C(2,4). Se traza la bisectriz del ángulo exterior correspondiente al ángulo interno ACB; la bisectriz anterior corta a la prolongación del lado $\overline{AB}$ en el punto Q. Hallar las coordenadas del punto Q. Rp. Q(18,4)

10. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto Q(-2,3) y sea perpendicular a la bisectriz interior del Δ de vértices A(0,0), B(4,8), C(6,2), relativa al vértice B.
Rp. $L:P=(-2,3)+t(3+2\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}), t\in R$

11. Un rayo parte del punto A=(-5,-2) en dirección del vector (2,3) y se refleja en un espejo plano sobre el eje X en B y luego sobre el eje Y en C. Cuál es la abscisa del punto S si S=B+C+D? donde D está sobre el último rayo reflejado y tiene ordenada -10. Rp. -35/3

12. Las rectas L_1 y L_2 se interceptan en el punto C formando un ángulo θ, tal que $Tg\theta=1/2$. Si C es un punto en el cuarto cuadrante, B=(0,4), $\overline{AC}+\overline{BC}=(2,-10)$ y la pendiente de L_1 es -1; hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo θ.
Rp. $L:P=(4,-8)+t(1+\sqrt{2}, -\sqrt{2}-\sqrt{5}), t\in R$

13. Dadas las rectas $L_1:7x-y-6=0$ y $L_2:x-y+2=0$, hallar la ecuación de la recta L, de pendiente positiva, que pasa por el punto A(5,-2) y forma con L_1 y L_2 un triángulo isósceles cuyos lados iguales se encuentran en L_1 y L_2, respectivamente.
Rp. $L:P=(5,-2)+t(1,2), t\in R$

EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

En la sección 1.2 definimos el producto cartesiano A×B de los conjuntos A y B de la siguiente manera:

$$A\times B = \{(x,y)/x\in R\ ,\ y\in R\}$$

Si aplicamos una definición similar al producto cartesiano A×B×C de los conjuntos A, B y C, entonces:

$$A\times B\times C = \{(x,y,z)/x\in R,\ y\in R,\ z\in R\}$$

Donde el símbolo (x,y,z) representa una terna ordenada.
Como las ternas ordenadas de números reales son elementos del producto cartesiano R×R×R, a este conjunto se le denota por R^3, es decir:

$$R^3 = \{(x,y,z)/x\in R,\ y\in R,\ z\in R\}$$

que determina lo que llamaremos *espacio tridimensional*.
Esto es, queda establecido un sistema cartesiano de tres dimensiones, cuyos ejes son las rectas orientadas XX' (Eje de abscisas), YY' (Eje de ordenadas) y ZZ' (Cota), que se cortan perpendicularmente en el punto O (Origen de coordenadas)
Todo punto en el espacio queda determinado por la terna (x,y,z) , donde:
x: es la distancia dirigida del punto P al plano YOZ.
y: es la distancia dirigida del punto P al plano XOZ
z: es la distancia dirigida del punto P al plano XOY. (Figura 37)

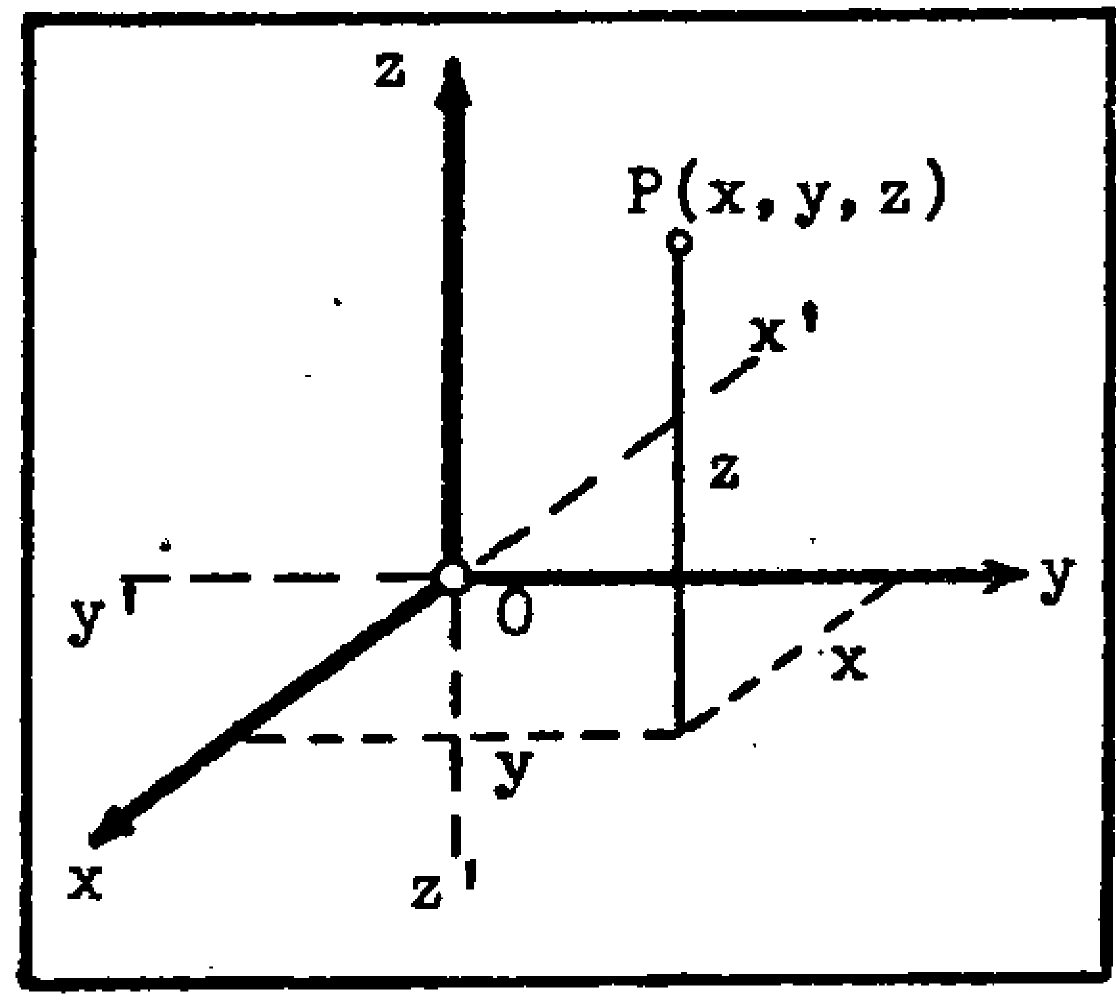


Figura 37

El conjuto R^3 de ternas ordenadas de números reales, junto con las operaciones de suma y producto definidas en la Proposición 1.1, recibe el nombre de *espacio vectorial tridimensional* sobre el conjunto de números reales R y se denota por V_3. A los elementos de V_3 se les llama vectores, luego, la terna (x,y,z) es un vector.

1.39 VECTORES EN EL ESPACIO

Cada terna de números reales (x,y,z) se puede asociar a una traslación en el espacio. Por esta razón se define una terna ordenada de números reales como un vector tridimensional.

En la Figura 38 se observa un segmento dirigido AB o *vector geométrico* que representa al vector $\vec{v}=(x,y,z)$. Este vector geométrico representa a la traslación del punto $A(x_1,y_1,z_1)$ al punto $B(x_2,y_2,z_2)$. Por tanto una representación geométrica del vector es:

$$\vec{v} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

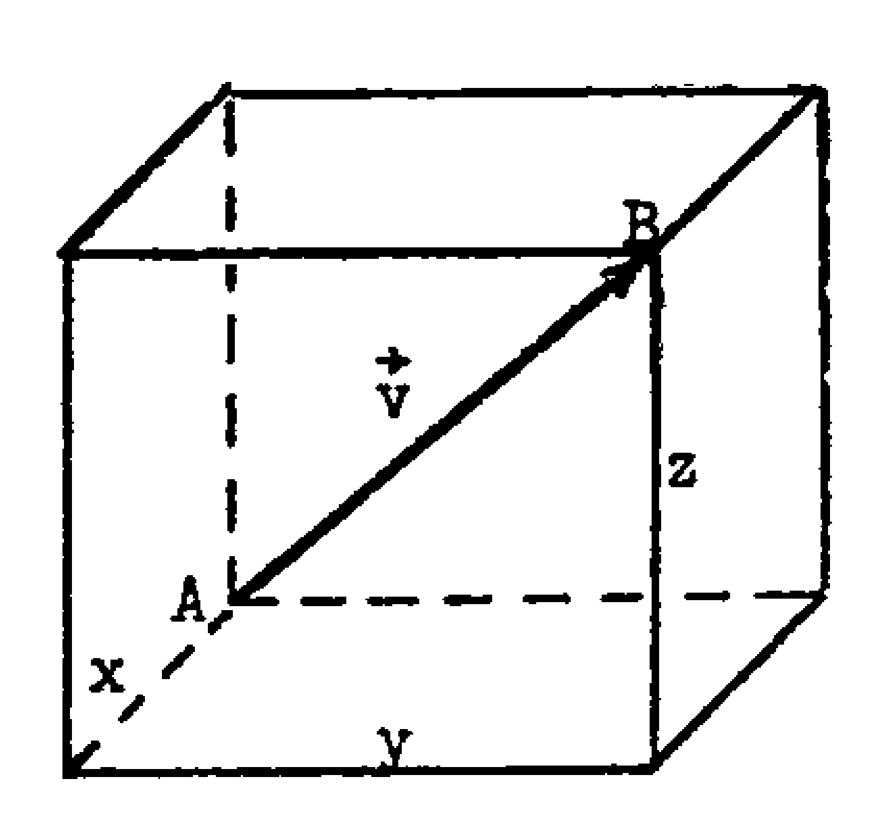


Figura 38

Se dice que el punto A es el *punto inicial o punto de partida* del vector geométrico, y que B es su *punto final o punto de llegada*. Si el punto inicial de un vector geométrico es el origen de coordenadas, entonces se dice que el vector está en su *posición ordinaria*, y que es la representación ordinaria del vector correspondiente.

La norma $||\vec{v}||$ de un vector $\vec{v}=(x,y,z)$ en R^3 se define como:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

La norma de un vector en R^3 se puede interpretar como la longitud de cualquiera de sus representaciones geométricas. Por tanto la norma del vector $\vec{v}=(x,y,z)$, que se muestra en la Figura 38, es igual a la longitud de AB, es decir:

$$||\vec{v}|| = d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Otras definiciones que se aplican a los vectores de dos dimensiones se puede extender directamente a los vectores en tres dimensiones. En particular, si $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ son vectores en R^3 y $r\epsilon R$, entonces:

(1) $\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

(2) $\vec{a} + \vec{b} = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

(3) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$

(4) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = (0,0,0) = \theta$

(5) $r\vec{a} = r(x_1,y_1,z_1) = (rx_1, ry_1, rz_1)$

(6) $\vec{u}$ es un vector unitario $\rightarrow$ $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{||\vec{a}||}$, $||\vec{u}||=1$

(7) Producto escalar: $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Tal como en el caso de R^2, un vector en R^3 se puede expresar como la suma de componentes vectoriales paralelos a los ejes coordenados. En R^3, $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ representan vectores unitarios en las direcciones de las partes positivas de los ejes X,Y,Z repectivamente. Entonces:

$$\vec{i}=(1,0,0) \ , \ \vec{j}=(0,1,0) \ , \ \vec{k}=(0,0,1)$$

Todo vector de R^3 se puede escribir en una y sólo una forma como una combinación lineal de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$. Por ejemplo, para el vector $\vec{v}=(3,2,-4)$ se tiene:

$$\vec{v} = 3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$$

EJEMPLO 1. Un vector que va de S(x,y,z) a T(5,-4,2) es dos veces el vector que va de R(2,-1,5) a S(x,y,z). Calcular el valor de x+y+z.

Solución. Sean: $\vec{a} = ST = \vec{T}-\vec{S} = (5,-4,2)-(x,y,z)=(5-x,-4-y,2-z)$

$\vec{b} = RS = \vec{S}-\vec{R} = (x,y,z)-(2,-1,5)=(x-2,y+1,z-5)$

$$\text{Si } \vec{a} = 2\vec{b} \leftrightarrow \begin{cases} 5-x = 2(x-2) \rightarrow x=3 \\ -4-y = 2(y+1) \rightarrow y=-2 \\ 2-z = 2(z-5) \rightarrow z=4 \end{cases} \qquad \therefore x+y+z = 5$$

EJEMPLO 2. Sean A(2,3,-2) y B(6,-3,2). Hallar el punto P que está en el segmento de recta que une A con B y a 3/4 de distancia de A a B.

Solución. Si $P(x,y,z)\in\overline{AB} \rightarrow \overline{AP} = (\frac{3}{4})\overline{AB} \leftrightarrow 4\overline{AP} = 3\overline{AB}$

$$\rightarrow 4(x-2,y-3,z+2) = 3(4,-6,4) \leftrightarrow \begin{cases} 4x-8=12 \rightarrow x=5 \\ 4y-12=-18 \rightarrow y=-3/2 \\ 4z+8=12 \rightarrow z=1 \end{cases}$$

Por tanto, el punto buscado es: $P(5,-3/2,1)$

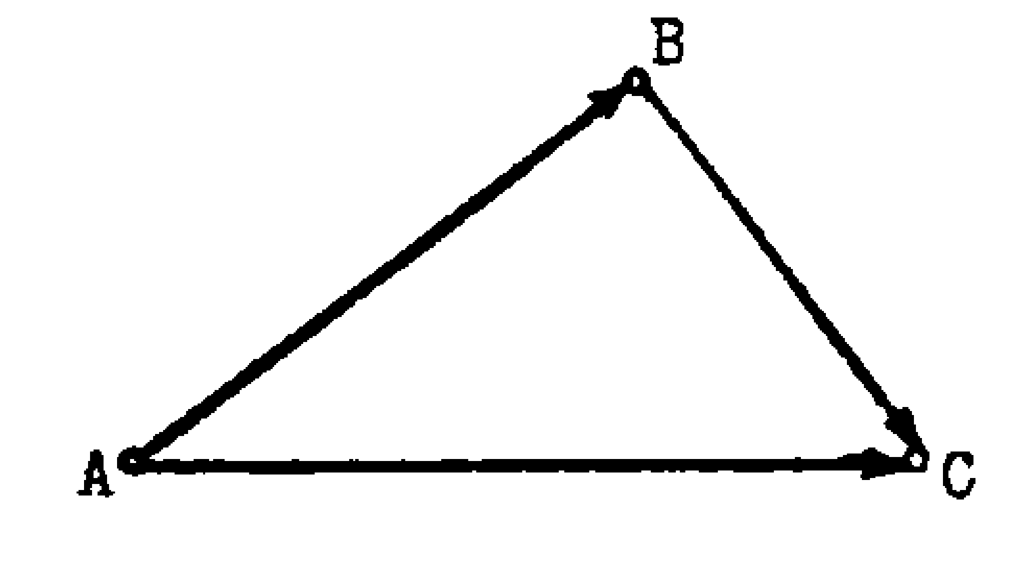
EJEMPLO 3. Demostrar que los puntos $A(3,5,2)$, $B(2,3,-1)$ y $C(6,1,-1)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

Demostración. En efecto:

$\overline{AB} = (2,3,-1)-(3,5,2) = (-1,-2,-3)$

$\overline{AC} = (6,1,-1)-(3,5,2) = (3,-4,-3)$

$\overline{BC} = (6,1,-1)-(2,3,-1) = (4,-2,0)$



Entonces: $||\overline{AB}|| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$||\overline{AC}|| = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$

$||\overline{BC}|| = \sqrt{16+4+0} = \sqrt{20}$

Como: $(\sqrt{34})^2 = (\sqrt{14})^2+(\sqrt{20})^2 \rightarrow ||\overline{AC}||^2 = ||\overline{AB}||^2 + ||\overline{BC}||^2$

Se cumple el Teorema de Pitágoras, por tanto, el ΔABC es recto en B.

EJEMPLO 4. Demostrar que los puntos $A(-2,-7,7)$, $B(2,-1,3)$ y $C(4,2,1)$ son colineales.

Demostración. Bastará probar que: $||\overline{AC}||=||\overline{AB}||+||\overline{BC}||$

En efecto:

$\overline{AC} = (4,2,1)-(-2,-7,7) = (6,9,-6)$

$\overline{AB} = (2,-1,3)-(-2,-7,7) = (4,6,-4)$

$\overline{BC} = (4,2,1)-(2,-1,3) = (2,3,-2)$

A B C

Entonces: $||\overline{AC}|| = \sqrt{36+81+36} = 3\sqrt{17}$

$||\overline{AB}|| = \sqrt{16+36+16} = 2\sqrt{17}$ y $||\overline{BC}|| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

Como: $3\sqrt{17} = 2\sqrt{17} + \sqrt{17} \rightarrow ||\overline{AC}||=||\overline{AB}||+||\overline{BC}||$

Por tanto, los puntos A, B y C son colineales.

EJEMPLO 5. Dados los vectores $\vec{a}=(3,-1,-2)$, $\vec{b}=(2,1,4)$ y $\vec{c}=7\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$, hallar la suma de las componentes del vector $\vec{x}$ tal que: $\vec{a}.\vec{x}=4$, $\vec{b}.\vec{x}=2$ y $\vec{c}.\vec{x}=4$

Solución. Sea el vector $\vec{x}=(x,y,z)$

Si $\vec{a}.\vec{x} = 4 \rightarrow (3,-1,-2).(x,y,z)=4 \rightarrow 3x-y-2z = 4$

$\vec{b}.\vec{x} = 2 \rightarrow (2,1,4).(x,y,z) = 2 \rightarrow 2x+y+4z = 2$

$\vec{c}.\vec{x} = 4 \rightarrow (7,-2,-1).(x,y,z)=4 \rightarrow 7x-2y-z = 4$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos: $x=2$, $y=6$, $z=-2$

$$\therefore\ x+y+z = 6$$

EJEMPLO 6. Si $\vec{a}=(2,1,-1)$ y $\vec{b}=(1,-1,2)$, hallar un vector no nulo $\vec{c}\in R^3$, tal que: $\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}.\vec{c}=0$.

Solución. Sea el vector $\vec{c}=(x,y,z)$

Si $\vec{a}.\vec{c} = 0 \rightarrow (2,1,-1).(x,y,z)=0 \rightarrow 2x+y-z=0$ (1)

$\vec{b}.\vec{c} = 0 \rightarrow (1,-1,2).(x,y,z)=0 \rightarrow x-y+2z=0$ (2)

Sumando (1) y (2) se tiene: $z=-3x$

Multiplicando (1) por 2 y sumándole (2) obtenemos: $y=-5x$

Luego, $\vec{c} = (x,y,z) = (x,-5x,-3x) = x(1,-5,-3)$

Hay infinitas soluciones. Un ejemplo, para $x=1$ se tiene:

$$\vec{c} = (1,-5,-3)$$

EJEMPLO 7. Sea el triángulo de vértices $A(-1,2,2)$, $B(4,2,-3)$ y $C(9,-3,7)$. Por el punto $D(2,2,-1)$ del lado $\overline{AB}$ se traza una paralela al lado $\overline{AC}$ y que corta al lado $\overline{BC}$ en E. Hallar la longitud del segmento $\overline{DE}$.

Solución. Veamos en que razón divide el punto D al lado $\overline{AB}$.

Sea: $\frac{AD}{DB} = r \rightarrow \overline{AD} = r\overline{DB}$

$\rightarrow \vec{D}-\vec{A} = r(\vec{B}-\vec{D})$

$\rightarrow 3(1,0,-1) = 2r(1,0,-1) \rightarrow r=3/2$

Siendo $\overline{DE}||\overline{AC} \rightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{3}{2}$

$\rightarrow 2(\vec{E}-\vec{C}) = 3(\vec{B}-\vec{E}) \leftrightarrow 5\vec{E} = 3(4,2,-3)+2(9,-3,7) = (30,0,5)$

$\rightarrow E=(6,0,1)$

Luego: $\overline{DE} = (6,0,1)-(2,2,-1) = 2(2,-1,1) \rightarrow ||\overline{DE}||=2\sqrt{6}$

EJEMPLO 8. En el trapecio ABCD la razón entre la longitud de la base $\overline{AD}$ y de la base $\overline{BC}$ equivale a λ. Suponiendo que $\overline{AC}=\vec{a}$ y $\overline{BD}=\vec{b}$, exprésense los vectores $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ por medio de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Solución. Si $\frac{AD}{BC} = \lambda \rightarrow \overline{AD} = \lambda\overline{BC}$ (1)

$\rightarrow \overline{AB} + \overline{BD} = \lambda\overline{BC}$

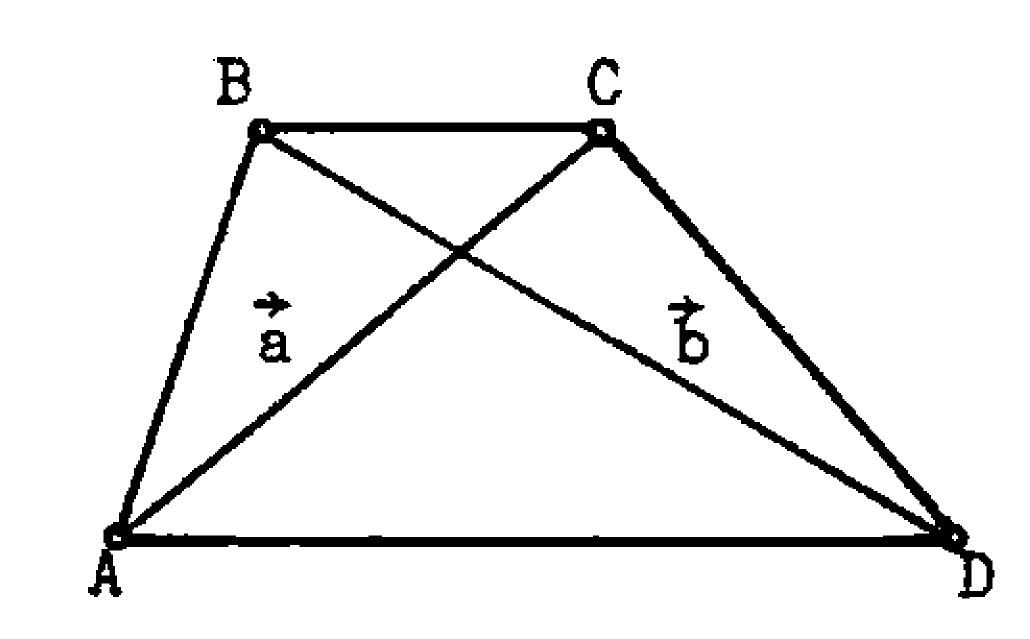
En el ΔABC: $\overline{AB} = \overline{AC}-\overline{BC}$ (2)

$\rightarrow \quad \overline{AB} = \overline{AC} - \dfrac{\overline{AB} + \overline{BD}}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = \dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{1+\lambda}$

De (2): $\overline{BC} = \overline{AC}-\overline{AB} = \vec{a} - \dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{2+\lambda} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{1+\lambda}$

En el ΔACD: $\overline{CD} = \overline{AD}-\overline{AC} = \lambda\overline{BC} - \vec{a}$

$\rightarrow \quad \overline{CD} = \lambda\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{1+\lambda}\right) - \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \overline{CD} = \dfrac{\lambda\vec{b}-\vec{a}}{1+\lambda}$



Finalmente, de (1): $\overline{DA} = -\lambda\overline{BC} = -\dfrac{\lambda}{1+\lambda}(\vec{a}+\vec{b})$

EJEMPLO 9. Sean dados los vectores $\vec{a}=(1,5,3)$, $\vec{b}=(6,-4,-2)$, $\vec{c}=(0,-5,7)$ y $\vec{d}=(-20,27,-35)$. Se requiere elegir los números α, β y γ de tal modo que los vectores $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ y $\vec{d}$ formen una línea quebrada cerrada, si el origen de cada vector sucesivo se hace coincidir con el extremo del anterior.

Solución. Si los vectores $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ y $\vec{d}$ constituyen una línea quebrada cerrada, entonces:

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vec{d} = \theta \leftrightarrow \alpha(1,5,3)+\beta(6,-4,-2)+\gamma(0,-5,7) = -\vec{d}$

o sea: $(\alpha+6\beta\ ,\ 5\alpha-4\beta-5\gamma\ ,\ 3\alpha-2\beta+7\gamma) = (20,-27,35)$

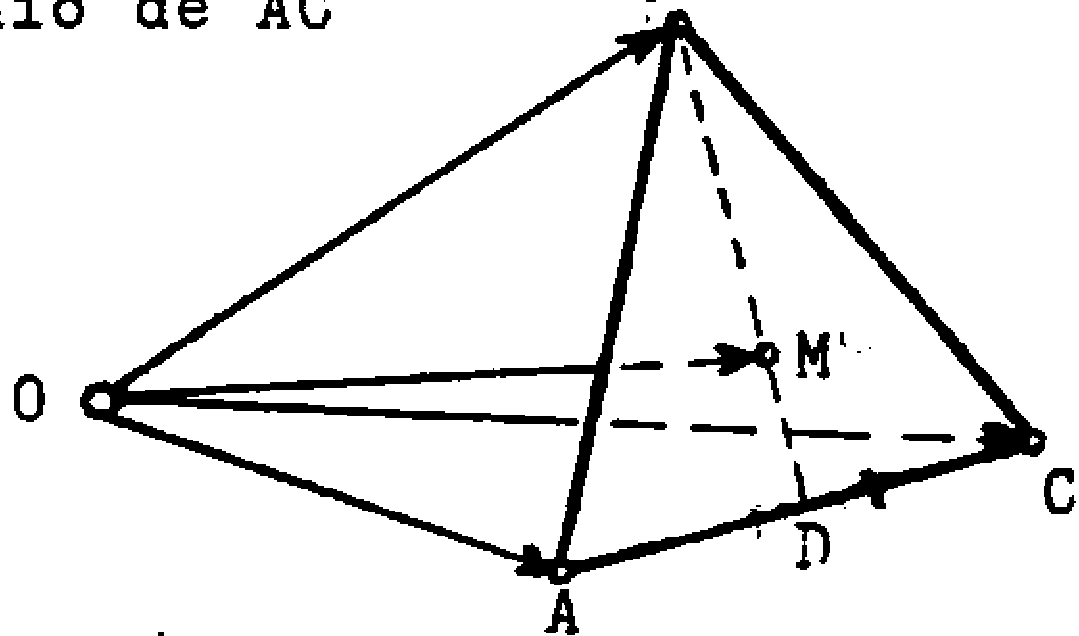
de donde:
$$\alpha + 6\beta = 20$$
$$5\alpha - 4\beta - 5\gamma = -27$$
$$3\alpha - 2\beta + 7\gamma = 35$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$

EJEMPLO 10. M es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, O es un punto arbitrario del espacio. Demuéstrece la igualdad: $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

Demostración. En efecto, sea D el medio de $\overline{AC}$

Entonces: $\vec{D} = \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{C})$



Por la propiedad de las medianas:

$\overline{DM} = \frac{1}{3}\overline{DB} \quad \rightarrow \quad \vec{M}-\vec{D} = \frac{1}{3}(\vec{B}-\vec{D})$

o sea: $\vec{M} - \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{C}) = \frac{1}{3}\vec{B} - \frac{1}{6}(\vec{A}+\vec{C})$

de donde: $\vec{M} = \frac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) \quad \leftrightarrow \quad \vec{M}-\vec{O} = \frac{1}{3}[(\vec{A}-\vec{O})+(\vec{B}-\vec{O})+(\vec{C}-\vec{O})]$

$\leftrightarrow \quad \overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$

EJERCICIOS

1. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores de posición de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$. Si $2\vec{a}=3\vec{b}$ y P(3,-1,2), Q(x,y,z), R(-2,3,-3) y S(2,5,-5); hallar el vector $\vec{a}$. Rp. $\vec{a}=(6,3,-3)$

2. El vector $\vec{v}=(-2,2,6)$ es el vector de posición del segmento $\overline{AB}$, cuyo punto medio es M(-4,3,1). Hallar las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{AB}$. Rp. A(-3,2,-2), B(-5,4,4)

3. Sea $\vec{v}=(3,-6,1)$ el vector de posición del segmento $\overline{AB}$ y sea C(6,-1,2) el punto de trisección, más cercano de A, de dicho segmento, hallar las coordenadas de A y B.
Rp. A(5,1,1) y B(8,-5,2)

4. Sean A(2,-1,3), B(-4,5,0), C(4,-1,3) y D(4,4,-7). El punto P está a 2/3 de distancia de A a B y el punto Q está a 3/5 de distancia de C a D. Calcular las componentes del vector $\vec{v}$ q' va de P a Q. Rp. $\vec{v}=(6,-1,-4)$

5. Demostrar que los puntos A(6,3,4), B(2,1,-2) y C(4,-1,10) son vértices de un triángulo isósceles.

6. Demostrar que los puntos A(2,0,-1), B(3,2,-2) y C(5,6,-4) son colineales.

7. Demostrar que los puntos A(2,0,-1), B(1,2,1) y C(6,-1,2) son vértices de un triángulo rectángulo.

8. Si $\vec{a}=(3,5,-1)$, $\vec{b}=(6,-2,3)$ y $\vec{c}=(-3,2,0)$, hallar el vector $\vec{x}$ que satisfaga la ecuación: $3\vec{x}+6\vec{a}-5\vec{c}=8\vec{b}$. Rp. $\vec{x}=(5,-12,10)$

9. Sean $\vec{a}=(2,-1,5)$, $\vec{b}=(-1,-2,3)$ y $\vec{c}=(1,-1,1)$ tres vectores en R^3, hallar un vector unitario en la dirección del vector: $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. Rp. $\vec{u}=\frac{(4,0,3)}{5}$

10. Dados los vectores $\vec{a}=(5,-2,1)$, $\vec{b}=(6,1,-4)$ y $\vec{c}=(1,2,1)$, calcular el producto de las componentes de un vector $\vec{x}$, tal que: $\vec{a}.\vec{x}=3$, $\vec{b}.\vec{x}=62$, $\vec{c}.\vec{x}=15$ Rp. -240

11. Si $\vec{a}=(3,3,-1)$ y $\vec{b}=(-1,-2,4)$, hallar un vector no nulo $\vec{c}\in R^3$, tal que: $\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}.\vec{c}=0$. (Hay infinitas soluciones)
Rp. Un ejemplo: $\vec{c}=(10,-11,-3)$

12. Hállese en el eje de ordenadas el punto M equidistante de los puntos A(1,-4,7) y B(5,6,-5). Rp. M(0,1,0)

13. Sean dados los vértices del triángulo A(3,-1,5), B(4,2,-5) y C(-4,0,3). Hállese la longitud de la mediana trazada desde el vértice A. Rp. 7

15. Determínense las coordenadas de los extremos de un segmento que está dividido en partes iguales mediante los puntos: C(2,0,2) y D(5,-2,0). Rp. (-1,2,4) y (8,-4,-2)

16. Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\theta$, $||\vec{a}||=3$, $||\vec{b}||=4$ y $||\vec{c}||=6$, hallar el valor de: $\vec{a}.(2\vec{b}-\vec{a})$. Rp. 2

17. Sabiendo que: $||\vec{a}||=3$, $||\vec{b}||=1$, $||\vec{c}||=4$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\theta$, calcular la suma $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}$ Rp. -13

18. Dado: $||\vec{a}||=11$, $||\vec{b}||=23$ y $||\vec{a}-\vec{b}||=30$, hallar $||\vec{a}+\vec{b}||$.
Rp. 20

19. Dadas tres fuerzas: $\vec{f}_1=(3,-4,2)$, $\vec{f}_2=(2,3,-5)$ y $\vec{f}_3=(-3,-2,4)$, aplicadas a un punto, calcular el trabajo realizado por la resultante de estas fuerzas si el punto de aplicación se desplaza en su movimiento rectilíneo de la posición A(5,3,-7) a la posición B(4,-1,-4). (Sug. Trabajo: $W=\vec{f}.\vec{e}$, $\vec{e}=\overline{AB}$)
Rp. W=13

20. En un espacio están dados los triángulos ABC y A'B'C'. M y M' son los puntos de intersección de las medianas. Expresar el vector MM' mediante los vectores $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.
Rp. $\frac{1}{3}(\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'})$

21. En el paralelogramo ABCD se designan: $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AD}=\vec{b}$. Expresar en términos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ y $\overline{MD}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo. Rp. $\overline{MA}=-\overline{MC}=\frac{-1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; $\overline{MB}=-\overline{MD}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$

1.41 DIRECCION DE UN VECTOR EN EL ESPACIO

A cada vector no nulo $\vec{v}=(x,y,z)\in R^3$, le corresponde una dirección dada por tres *ángulos de dirección* α, β y γ, cada uno de los cuales es el ángulo determinado por los ejes positivos del sistema tridimensional con el vector $\vec{v}$ en posición ordinaria. (Figura 39). Los ángulos de dirección se elige de manera que sus medidas esten comprendidas en el intervalo $|0,\pi|$.

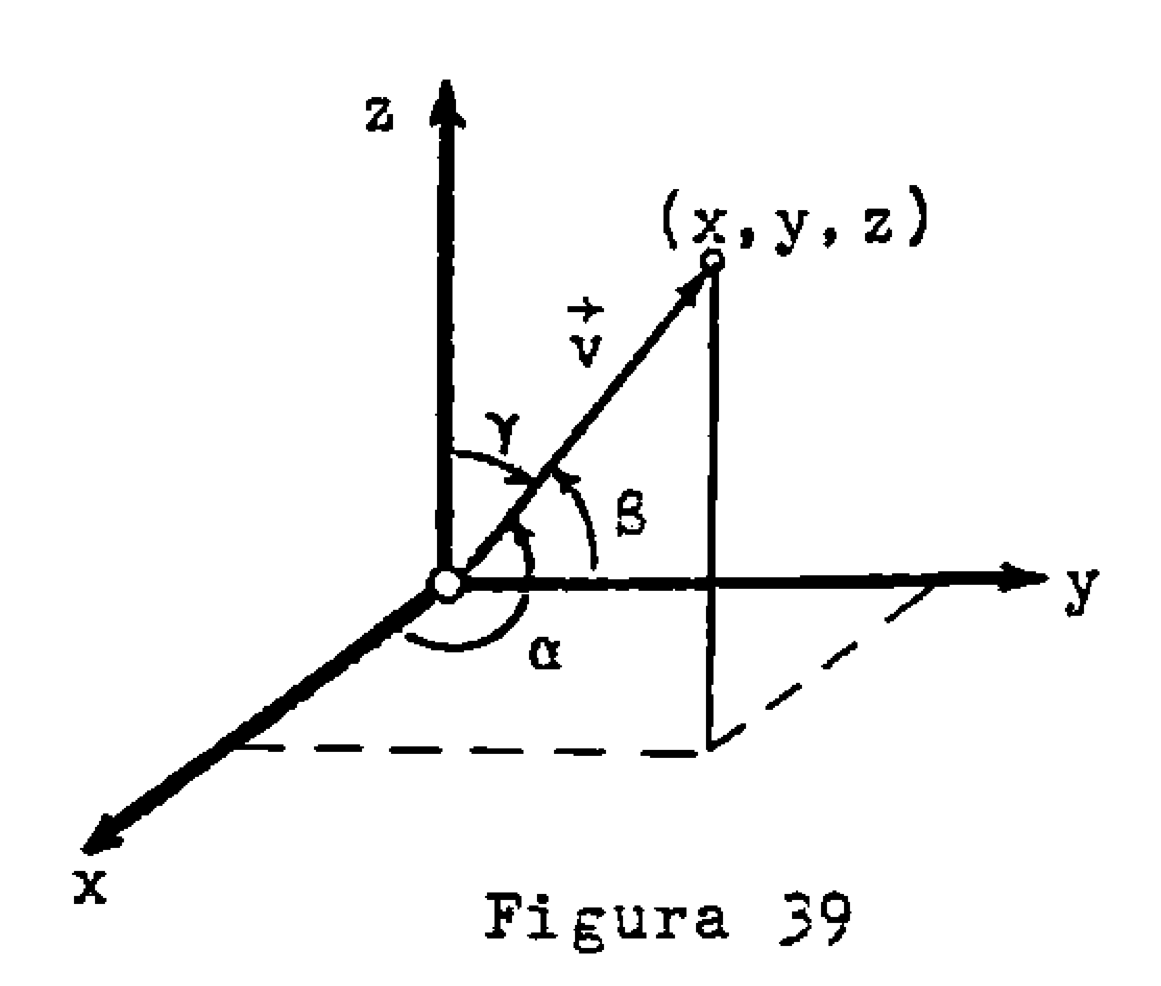


Figura 39

A los cosenos de los ángulos de dirección de un vector en R^3, se les llama *cosenos directores* y vienen dados por

$$\text{Cos}\alpha = \frac{x}{||\vec{v}||}\,, \quad \text{Cos}\beta = \frac{y}{||\vec{v}||}\,, \quad \text{Cos}\gamma = \frac{z}{||\vec{v}||} \qquad (54)$$

en donde: $||\vec{v}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (54), se tiene:

$$\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1 \qquad (55)$$

La ecuación (55) nos permite afirmar que los cosenos directores de un vector están intimamente relacionados, por lo que, si se conocen dos de ellos se puede calcular el valor absoluto del tercero. Si Cosα, Cosβ y Cosγ son los cosenos directores de un vector no nulo $\vec{v}=(x,y,z)$, por las ecuaciones (54) resulta que:

$$\vec{u} = (\text{Cos}\alpha,\text{Cos}\beta,\text{Cos}\gamma) = \left(\frac{x}{||\vec{v}||}, \frac{y}{||\vec{v}||}, \frac{z}{||\vec{v}||}\right) \qquad (56)$$

es el vector unitario que tiene la misma dirección que $\vec{v}$.

EJEMPLO 1. Obtener los cosenos directores del vector $\vec{v}$ que va de A(2,-2,-1) a B(-4,-5,1). Probar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores del vector es igual a 1 y obtener también un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$.

Solución. Si $\vec{v}=\vec{AB} \rightarrow \vec{v} = (-4,-5,1)-(2,-2,-1) = (-6,-3,2)$

$\rightarrow ||\vec{v}|| = \sqrt{36+9+4} = 7$

Según las ecuaciones (54), los cosenos directores del vector $\vec{v}$

son: $\quad \text{Cos}\alpha = -\frac{6}{7} \quad , \quad \text{Cos}\beta = -\frac{3}{7} \quad , \quad \text{Cos}\gamma = \frac{2}{7}$

Entonces: $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = \frac{36}{49} + \frac{9}{49} + \frac{4}{49} = 1$

El vector unitario en la dirección de $\vec{v}$, según (56), es:

$$\vec{u} = (-\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$$

EJEMPLO 2. Averiguar si el vector $\vec{v}\epsilon R^3$ puede tener como ángulos de dirección: $\alpha=60^\circ$, $\beta=45^\circ$ y $\gamma=150^\circ$.

Solución. Veamos si la ecuación (55) se satisface para estos ángulos.

$$\text{Cos}^2 60^\circ + \text{Cos}^2 45^\circ + \text{Cos}^2 150^\circ = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \neq 1$$

Por tanto, no existe el vector $\vec{v}$ con tales ángulos directores.

EJEMPLO 3. Obtener un vector $\vec{v}$ si $||\vec{v}||=14$ y tiene sentido contrario al vector cuya representación geométrica va de S(3,-5,2) a T(5,-8,-4).

Solución. Sea $\vec{a}=ST = (5,-8,-4)-(3,-5,2) = (2,-3,-6)$

$$\rightarrow ||\vec{a}|| = \sqrt{(2)^2+(-3)^2+(-6)^2} = 7$$

Luego, un vector unitario con sentido opuesto al de $\vec{a}$ es:

$$\vec{u} = -\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = \frac{(1,-3,-6)}{7}$$

Dado que: $\vec{v} = ||\vec{v}||\vec{u} \rightarrow \vec{v} = (-4,6,12)$

EJEMPLO 4. Hállese el vector $\vec{a}$ que forma con todos los tres versores básicos ángulos agudos iguales, si $||\vec{a}||=2\sqrt{3}$.

(Nota. A los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ se les denominan también versores básicos)

Solución. Como $\alpha=\beta=\gamma$, entonces según la ecuación (55) se tiene:

$$3\text{Cos}^2\alpha = 1 \leftrightarrow \text{Cos}\alpha = \pm\sqrt{3}/3$$

Dado que α, β y γ son agudos $\rightarrow \text{Cos}\alpha = \sqrt{3}/3$

Si $x = ||\vec{a}||\text{Cos}\alpha \rightarrow x = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}/3) = 2$

$$\therefore \vec{a} = (2,2,2)$$

EJERCICIOS

1. En los siguientes ejercicios obtener un vector unitario en la dirección del vector cuya representación geométrica va de S a T.

   a) S(1,-2,5) , T(4,0,11) Rp. $\vec{u} = \frac{1}{7}(3,2,6)$

   b) S(2,-2,-1) , T(-4,-5,1) Rp. $\vec{u} = \frac{1}{7}(6,3,2)$

   c) S(9,2,-1) , T(-3,5,-5) Rp. $\vec{u} = \frac{1}{13}(-12,3,-4)$

2. Si para un vector $\vec{a}\in R^3$, Cosα=2/11 y Cosβ=-5/11; calcular Cosγ. (Dos soluciones). Rp. ±9/11

3. Si para un vector $\vec{a}\in R^3$, Cosβ=3/10 y Cosγ=2/5; calcular el valor del ángulo α. Rp. $\alpha=30^\circ$ ó $\alpha=150^\circ$

4. Hallar un vector $\vec{v}$ cuya norma es 1/2 y tiene el mismo sentido que el vector $\vec{a}$=(6,12,4). Rp. $\vec{v}$=(3/14,3/7,1/7)

5. Hallar el vector $\vec{v}$ cuya norma es $7\sqrt{2}$ y que tiene el sentido opuesto al vector $\vec{a}$=(-2,5,-4). Rp. $\vec{v}$=(21/5,-7,28/5)

6. Hállese el vector $\vec{x}$ que forma con el versor $\vec{j}$ un ángulo de 60° y con el versor $\vec{k}$, un ángulo de 120°, si $||\vec{x}||=5\sqrt{2}$.
   Rp. $\vec{x}=(\pm 5, 5/\sqrt{2}, -5/\sqrt{2})$

7. Hállese el vector $\vec{x}$, colineal al vector $\vec{a}$=(1,-2,-2), que forma con el versor $\vec{j}$ un ángulo agudo y cuya magnitud es 15.
   Rp. $\vec{x}$=(-5,10,10)

8. Hállese el vector $\vec{x}$, colineal con el vector $\vec{a}=-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$, que forma con el versor $\vec{k}$ un ángulo obtuso, y cuya norma es 21.
   Rp. $\vec{x}$=(9,18,-6)

9. Un veotor $\vec{v}$ forma con los ejes X e Y los ángulos de 60° y 120° respectivamente. Hllar sus coordenadas sabiendo que su magnitud es 2 unidades. Rp. $\vec{v}=(1,-1,\sqrt{2})$ ó $\vec{v}=(1,-1,-\sqrt{2})$

1.41 VECTORES PARALELOS Y PERPENDICULARES

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos de R^3, entonces el ángulo que forman se puede especificar de la misma manera que el ángulo q' forman dos vectores en R^2.
En la Figura 40 se observa que si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos entonces los tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ tienen representaciones geométricas que forman un triángulo. Empleando la ley de los cosenos se puede demostrar que:

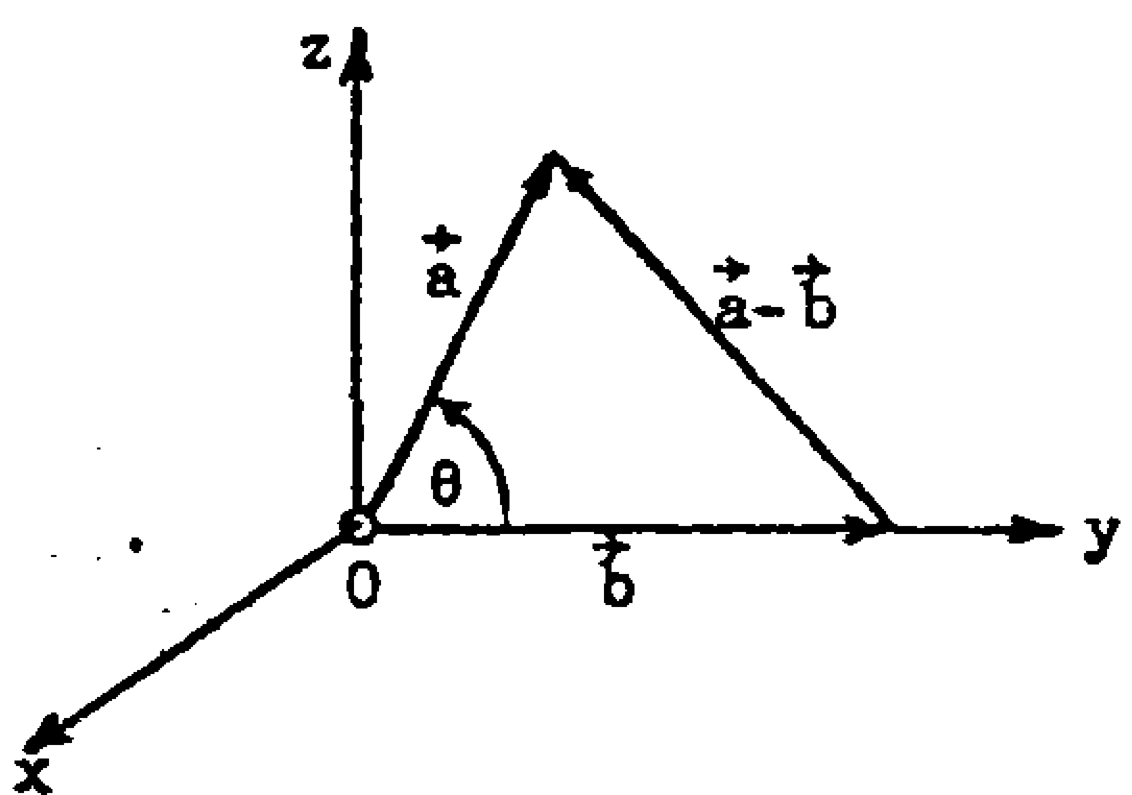


Figura 40

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{a}||\ ||\vec{b}||} \qquad (56)$$

EJEMPLO 1. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a}=(1,2,1)$ y $\vec{b}=(2,1,-1)$.

Solución. Según la ecuación (56) se tiene:

$$\cos\theta = \frac{(1,2,1).(2,1,-1)}{(\sqrt{1+4+1})(\sqrt{4+1+1})} = \frac{2+2-1}{(\sqrt{6})(\sqrt{6})} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta=60^\circ$

Observación 1. La ecuación (56) es también válida si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos, puesto que con $\vec{a}=r\vec{b}$ se tiene:

$$\cos\theta = \frac{r\vec{b}.\vec{b}}{||r\vec{b}||\ ||\vec{b}||} = \frac{r||\vec{b}||^2}{|r|\ ||\vec{b}||^2} = \frac{r}{|r|}$$

Si $r>0 \rightarrow \cos\theta=1$ y si $r<0 \rightarrow \cos\theta=-1$. Entonces los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si y sólo si $\theta=0^\circ$ ó $\theta=180^\circ$, es decir, si y sólo si $\cos\theta=\pm1$. Luego, la fórmula (56) se puede aplicar para decidir si dos vectores no nulos son paralelos o no.

EJEMPLO 2. Determinar si los vectores $\vec{a}=(6,-3,-9)$ y $\vec{b}=(-2,1,3)$ son paralelos.

Solución. Método 1. Aplicando la fórmula (56) se tiene:

$$\cos\theta = \frac{(6,-3,-9).(-2,1,3)}{(\sqrt{36+9+81})(\sqrt{4+1+9})} = \frac{-12-3-27}{3\sqrt{14}\sqrt{14}} = -1$$

Por tanto, $\vec{a}||\vec{b}$

Método 2. Escribiendo el vector a de la forma:

$\vec{a} = -3(-2,1,3)$

Vemos que: $\vec{a} = -3\vec{b}$, o sea: $\vec{a}=r\vec{b} \rightarrow \vec{a}||\vec{b}$

EJEMPLO 3. Para que valores de α y β los vectores $\vec{a}=(-2,3,\alpha)$ y $\vec{b}=(\beta,-6,2)$ son colineales?

Solución. Usando el método 2 del ejemplo anterior se tiene:

Si $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow \vec{a} = r\vec{b}$

$$\rightarrow (-2,3,\alpha) = r(\beta,-6,2) \leftrightarrow \begin{cases} -2 = r\beta \\ 3 = -6r \rightarrow r=-2 \\ \alpha = 2r \end{cases}$$

de donde: $\alpha=-4$ y $\beta=1$

Observación 2. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son *ortogonales* o *perpendiculares*, si y sólo si la medida del ángulo comprendido entre ellos es 90°, esto es, si y sólo si $\cos\theta=0$.
De la fórmula (56) se obtiene inmediatamente que los vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^3 son perpendiculares si y sólo si $\vec{a}.\vec{b}=0$.

EJEMPLO 4. Demostrar que el vector $\vec{v}=(2,-1,3)$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}=(3,0,-2)$, $\vec{b}=(1,8,2)$ y $\vec{c}=(1,-4,-2)$.

Demostración. En efecto, veamos el producto escalar de $\vec{v}$ con a, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

$\vec{a}.\vec{v} = (3,0,-2).(2,-1,3) = 6+0-6 = 0$

$\vec{b}.\vec{v} = (1,8,2).(2,-1,3) = 2-8+6 = 0$

$\vec{c}.\vec{v} = (1,-4,-2).(2,-1,3) = 2+4-6 = 0$

Por tanto, $\vec{v}$ es perpendicular a los tres vectores dados.

En este ejemplo se puede observar que ningún par de los tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos. En realidad, en R^3, es posible obtener un número infinito de vectores paralelos, cada uno de los cuales es perpendicular a $\vec{v}$. (Figura 41)

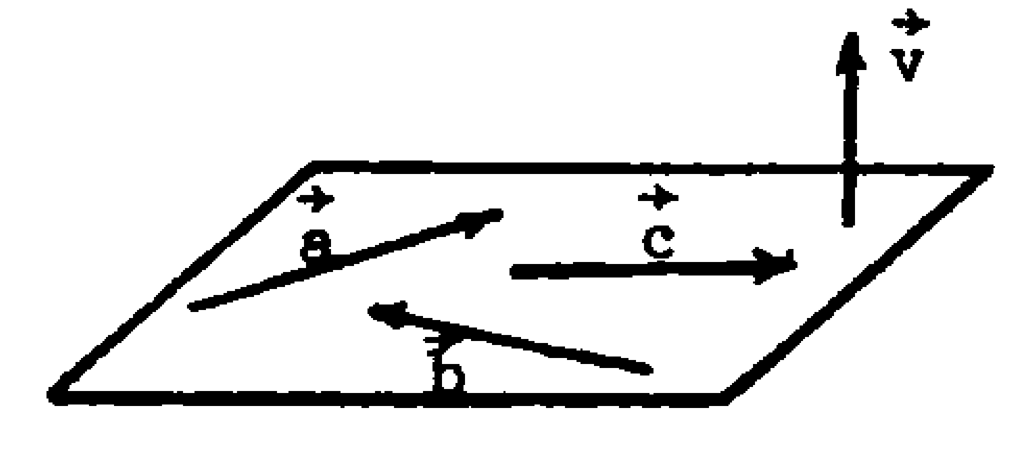


Figura 41

Esto sugiere que el conjunto de representaciones geométricas de todos los vectores perpendiculares a $\vec{v}$ cubre el plno completamente.

EJEMPLO 5. Hallar todos los vectores que son perpendiculares al plano formado por los vectores $\vec{a}=(5,-1,-2)$ y $\vec{b}=(2,3,4)$.

Solución. Sea $\vec{v}=(x,y,z)$ uno de los vectores buscados.

Si $\vec{v}\perp\vec{a} \rightarrow (x,y,z).(5,-1,-2)=0 \rightarrow 5x-y-2z=0$ (1)

$\vec{v}\perp\vec{b} \rightarrow (x,y,z).(2,3,4)=0 \rightarrow 2x+3y+4z=0$ (2)

Multiplicando (1) por 2 y sumándole (2) se tiene: $y=-12x$

Multiplicando (1) por 3 y sumándole (2) resulta: $z=(17/2)x$

Entonces: $\vec{v} = (x,-12x,17/2x) = \frac{x}{2}(2,-24,17)$

Por tanto, $\vec{v}=n(2,-24,17)$, $n\in R-\{0\}$, representa al conjunto de vectores que son perpendiculares a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

EJEMPLO 6. Si $\vec{a}=(2,-1,2)$, $\vec{b}=(1,2,-2)$, hallar dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ en R^3, que satisfacen las condiciones siguientes: $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}.\vec{d}=0$, $\vec{c}||\vec{b}$.

Solución. Sean: $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ y $\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$

Si $\vec{a} = \vec{c}+\vec{d} \rightarrow (2,-1,2) = (c_1+d_1,c_2+d_2,c_3+d_3)$

$\leftrightarrow 2=c_1+d_1 \;,\; -1=c_2+d_2 \;,\; 2=c_3+d_3$ (1)

$\vec{b}.\vec{d} = 0 \rightarrow (1,2,-2).(d_1,d_2,d_3)=0 \leftrightarrow d_1+2d_2-2d_3=0$ (2)

$\vec{c}||\vec{b} \rightarrow \vec{c} = r\vec{b} \rightarrow (c_1,c_2,c_3) = r(1,2,-2)$

$\leftrightarrow c_1=r \;,\; c_2=2r \;,\; c_3=-2r$ (3)

Sustituyendo (3) en (1) se tiene: $d_1=2-r$, $d_2=-1-2r$, $d_3=2+2r$

Finalmente, sustituyendo en (2) obtenemos: $r=-4/9$

$$\therefore \vec{c} = \frac{4}{9}(-1,-2,2) \quad y \quad \vec{d} = \frac{1}{9}(22,-1,10)$$

EJEMPLO 7. Determinar un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{a}=(2,-6,-3)$ y $\vec{b}=(4,3,-1)$.

Solución. Sea $\vec{c}=(x,y,z)$ el vector perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Si $\vec{a}\perp\vec{c} \rightarrow \vec{a}.\vec{c} = 0 \rightarrow (2,-6,-3).(x,y,z)=0 \leftrightarrow 2x-6y-3z=0$

Si $\vec{b}\perp\vec{c} \rightarrow \vec{b}.\vec{c} = 0 \rightarrow (4,3,-1).(x,y,z)=0 \leftrightarrow 4x-3y-z=0$

Resolviendo el sistema para x e y resulta: $x = \frac{1}{2}z$, $y = -\frac{1}{3}z$

Luego: $\vec{c} = \frac{z}{6}(3,-2,6) = n(3,-2,6)$, $n\in R-\{0\}$

Por consiguiente: $\vec{u} = \dfrac{\vec{c}}{||\vec{c}||} = \dfrac{n(3,-2,6)}{\pm n\sqrt{3+4+36}} = \pm\frac{1}{7}(3,-2,6)$

EJEMPLO 8. El vector $\vec{v}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}=(1,1,1)$ $\vec{b}=(2,1,-1)$ y forman con el eje OZ un ángulo obtuso , hallar el vector $\vec{v}$ sabiendo que $||\vec{v}||=\sqrt{56}$.

Solución. Sea el vector: $\vec{v}=(x,y,z)$

Si $\vec{a}\perp\vec{v} \rightarrow (1,1,1).(x,y,z)=0 \leftrightarrow x+y+z=0$

$\vec{b}\perp\vec{v} \rightarrow (2,1,-1).(x,y,z)=0 \leftrightarrow 2x+y-z=0$

Del sistema de ecuaciones obtenemos: $y=(-3/2)x$, $z=(1/2)x$

Luego: $\vec{v} = (x,-\frac{3}{2}x,\frac{1}{2}x) = \frac{x}{2}(2,-3,1)$

Si $||\vec{v}||=\sqrt{56} \rightarrow |\frac{x}{2}|\sqrt{4+9+1} = \sqrt{56}$, de donde: $|x|=4 \leftrightarrow x=4$ ó $x=-4$

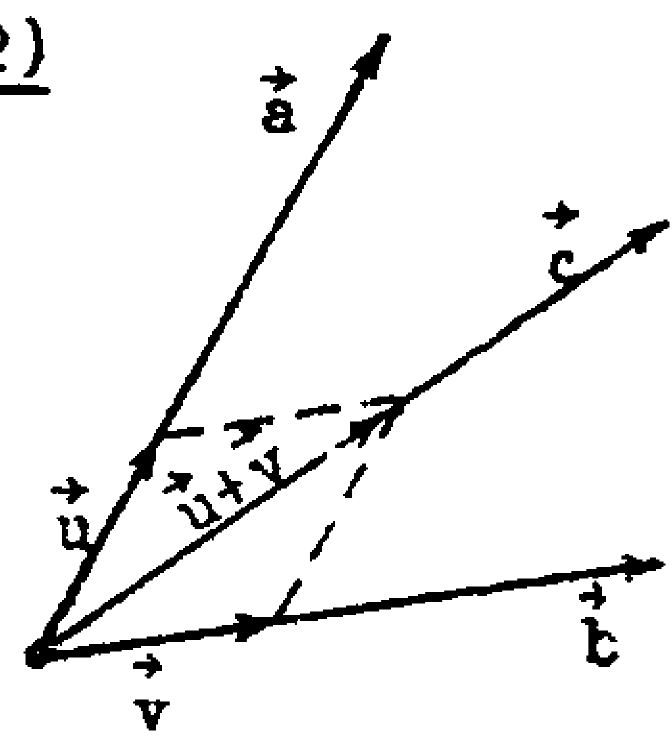
Como el ángulo γ es obtuso $\rightarrow$ $\cos\gamma<0$, o sea: $z<0$

Entonces, en (1), para que $z<0$, debemos elegir $x=-4$

$$\therefore \vec{v} = (-4,6,-2)$$

EJEMPLO 9. Dos vectores $\vec{a}=(2,-3,6)$ y $\vec{b}=(-1,2,-2)$ están aplicados a un mismo punto. Hallar las coordenadas del vector $\vec{c}$, que tiene la misma dirección de la bisectriz del ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si $||\vec{c}||=3\sqrt{42}$.

Solución. Sean: $\vec{u} = \dfrac{(2,-3,6)}{7}$ y $\vec{v} = \dfrac{(-1,2,-2)}{3}$



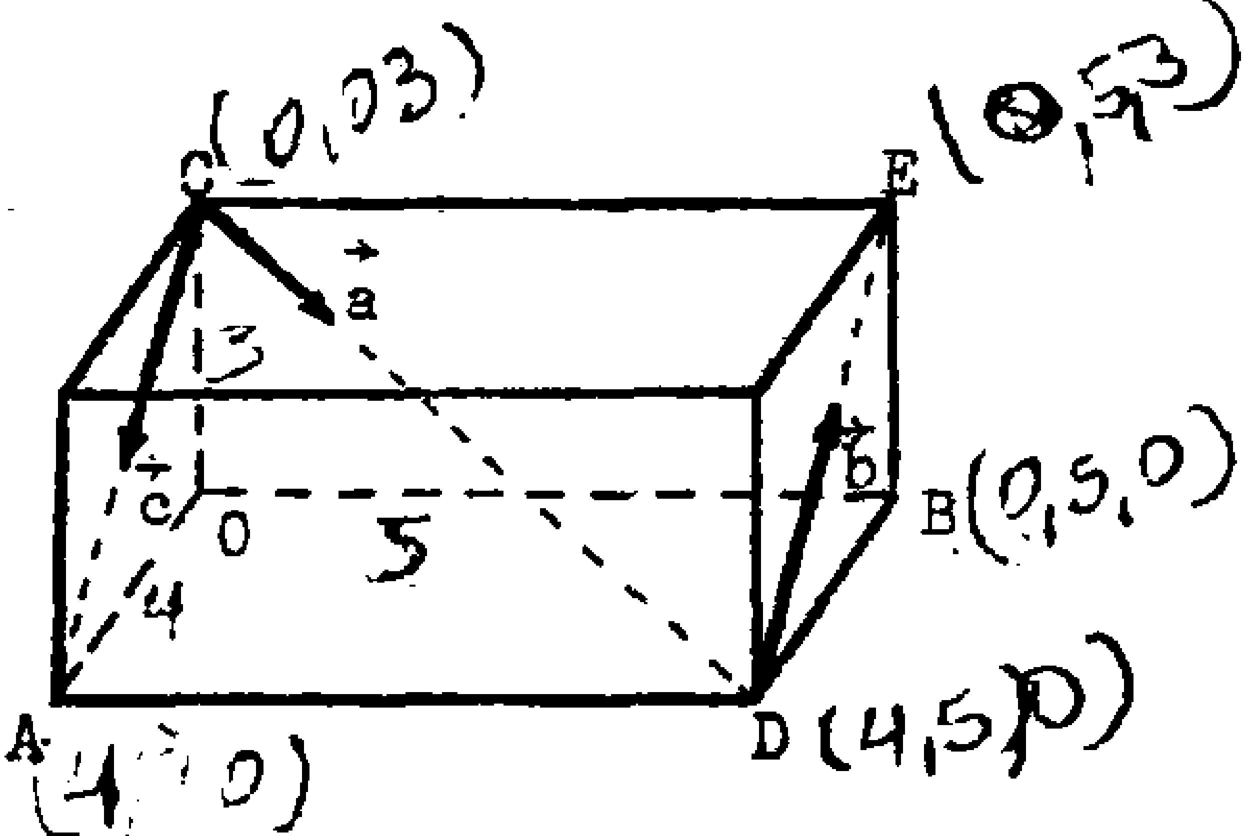
dos vectores unitarios en las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente. Entonces el vector $\vec{c}$ tiene la misma orientación del vector $\vec{u}+\vec{v}$, es decir:

$\vec{c} = r(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{r}{21}(-1,5,4) = t(-1,5,4)$, $t>0$

$\rightarrow ||\vec{c}|| = t\sqrt{1+25+16} \leftrightarrow 3\sqrt{42} = t\sqrt{42} \rightarrow t=3$

$$\therefore \vec{c}=(-3,15,12)$$

EJEMPLO 10 Dado el paralelepípedo de dimensiones: $\overline{OA}=4$, $\overline{OB}=5$ y $\overline{OC}=3$. Hallar el coseno del ángulo formado por el vector $\vec{v}=5\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ y el vector $\vec{w}=(-1,2,0)$, si $||\vec{a}||=\sqrt{2}$, $||\vec{b}||=5$, $||\vec{c}||=10$.



Solución. Haciendo coincidir las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ con los ejes X, Y, Z, respectivamente, de un sistema cartesiano tridimensional, se tiene:

$$A(4,0,0)\ ,\ B(0,5,0)\ ,\ C(0,0,3)\ ,\ D(4,5,0)\ ,\ E(0,5,3)$$

Entonces: $\overline{CA} = (4,0,0)-(0,0,3) = (4,0,-3)$

$\overline{CD} = (4,5,0)-(0,0,3) = (4,5,-3)$

$\overline{DE} = (0,5,3)-(4,5,0) = (-4,0,3)$

Un vector unitario en la dirección y sentido de $\overline{CD}$ es:

$$\vec{u} = \frac{\overline{CD}}{||\overline{CD}||} \rightarrow \vec{a} = ||\vec{a}||\vec{u} = (\sqrt{2})\frac{(4,5,-3)}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5}(4,5,-3)$$

Análogamente: $$\vec{b} = ||\vec{b}||\left(\frac{\overline{DE}}{||\overline{DE}||}\right) = (5)\frac{(-4,0,-3)}{5} = (-4,0,3)$$

$$\vec{c} = ||\vec{c}||\left(\frac{\overline{CA}}{||\overline{CA}||}\right) = (10)\frac{(4,0,-3)}{5} = (8,0,-6)$$

Luego: $\vec{w} = 5\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} = (4,5,-3)+(-4,0,3)-(8,0,-6) = (-8,5,6)$

$$\therefore \ \text{Cos}\theta = \frac{\vec{v}.\vec{w}}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||} = \frac{(-8,5,6).(-1,2,0)}{(\sqrt{64+25+36})(\sqrt{1+4})} = \frac{18}{25}$$

EJEMPLO 11. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\psi=30^\circ$, sabiendo que $||\vec{a}||=\sqrt{3}$ y $||\vec{b}||=1$, hallar el ángulo α formado por los vectores $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{w}=\vec{a}-\vec{b}$.

Solución. $\text{Cos}\psi = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{a}||\ ||\vec{b}||} \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{(\sqrt{3})(1)} \leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 3/2$

Si $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b} \rightarrow ||\vec{v}||^2 = ||\vec{a}||^2+2\vec{a}.\vec{b}+||\vec{b}||^2 = 3 + 2(\frac{3}{2}) + 1 = 7$

$\rightarrow ||\vec{v}|| = \sqrt{7}$

Análogamente, si $\vec{w}=\vec{a}-\vec{b}$, obtenemos: $||\vec{w}||=1$

$\vec{v}.\vec{w} = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = ||\vec{a}||^2-||\vec{b}||^2 = 3-1 = 2$

Luego: $\text{Cos}\alpha = \dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||} = \dfrac{2}{\sqrt{7}} \rightarrow \alpha = \text{arcCos}(2/\sqrt{7})$

EJERCICIOS

1. Hallar todos los vectores que son perpendiculares a cada uno de los vectores $\vec{a}=(1,3,-2)$ y $\vec{b}=(2,-4,1)$. Rp. $\vec{v}=(1,1,2)n$

2. Hallar los vectores unitarios que son perpendiculares al plano determinado por los puntos A(3,-6,4), B(2,1,1) y C(5,0,-2). Rp. $\vec{u}=\pm(1/\sqrt{70})(6,3,5)$

3. Si $\vec{a}=(3,-1,2)$ y $\vec{b}=(1,1,-4)$, hallar dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}\in R^3$ que satisface las condiciones siguientes: $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}.\vec{d}=0$, $\vec{c}\,||\,\vec{b}$.
Rp. $\vec{c} = \frac{1}{3}(-1,-1,4)$, $\vec{d} = \frac{2}{3}(5,-1,1)$

4. El vector $\vec{a}$ es perpendicular a los vectores $\vec{b}=(3,2,-1)$ y $\vec{c}=(-1,2,2)$, y forma con el eje OY un ángulo obtuso. Hallar el vector $\vec{a}$ sabiendo que $||\vec{a}||=10\sqrt{5}$. Rp, $\vec{a}=(12,-10,15)$

5. Dados los puntos A(3,-2,5), B(2,1,7), C(1,8,-3) y D(4,6,-2), hallar el ángulo formado por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Rp. 120°

6. Hállese el coseno del ángulo ψ entre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de un paralelogramo si están dados tres vértices de él: A(2,1,3), B(5,2,-1) y C(-3,3,-3). Rp. $15/7\sqrt{85}$

7. Hállese las coordenadas del vector $\vec{x}$, que es colineal con el vector $\vec{a}=(2,1,-1)$ y satisface la condición $\vec{a}.\vec{x}=3$
Rp. $\vec{x}=(1,1/2,-1/2)$

8. El vector $\vec{x}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}=(2,3,-1)$ y $\vec{b}=(1,-2,3)$ y satisface la condición $\vec{x}.(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$. Hállese las coordenadas de $\vec{x}$. Rp. $\vec{x}=(-3,3,3)$

9. Hallar el ángulo que forman el vector $\vec{a}$ que va de P(4,-9,3) a Q(3,-5,2) con el vector $\vec{b}$ que va de R(2,4,-7) a S(4,-1,-2)
Rp. 150°

10. Para que valores de m los vectores $\vec{a}=(m,-2,1)$ y $\vec{b}=2m\vec{i}+m\vec{j}-4\vec{k}$ son perpendiculares? Rp. m=-1 ó m=2

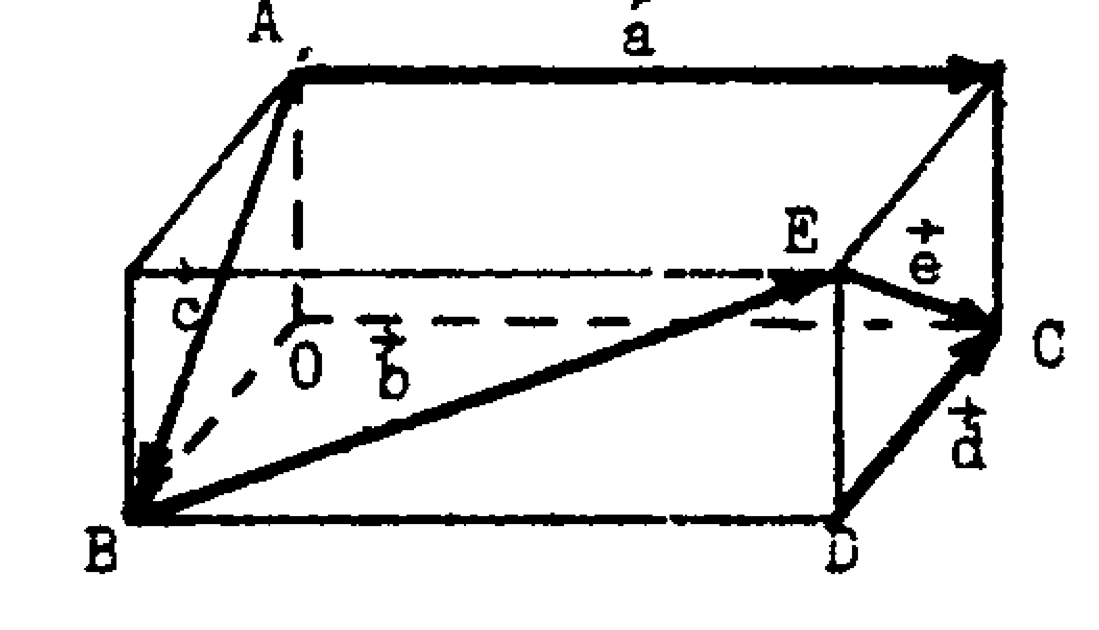
11. Hallar un vector unitario paralelo al plano XY y perpendicular al vector $\vec{a}=(4,-3,1)$. Rp. $\vec{u}=\pm(\frac{1}{5})(3,4,0)$

12. Los vértices de un triángulo son A(-2,3,-1), B(1,1,5) y C(-1,5,-3). Hallar el vector en la dirección de la bisectriz del ángulo BAC, si la norma del vector es $2\sqrt{21}$.
Rp. $\vec{v}=(8,4,2)$

13. El vector $\vec{x}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}=(3,2,2)$ y $\vec{b}=(18,-22,-5)$ y forma con el eje OY un ángulo obtuso. Hallar sus componentes sabiendo que $||\vec{x}||=14$. Rp. $\vec{x}=(-4,-6,-12)$

14. Dado el paralelepípedo de dimensiones: OA=3, OB=4 y OC=5. Hallar el ángulo que forman los vectores: $\vec{v} = \vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$ y $\vec{w}=2\vec{j}+\vec{k}$.

Rp. $\theta=135^{o}$



15. Dados los vectores $\vec{a}=(3,5,2)$ y $\vec{b}=(-4,0,3)$, tales que $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$, siendo $\vec{c}$ paralelo a $\vec{b}$ y ortogonal a $\vec{d}$, hallar $\vec{c}$ y $\vec{d}$.
Rp. $\vec{c} = \frac{1}{25}(24,0,-18)$, $\vec{d} = \frac{1}{25}(51,5,68)$

16. Sean dados los vértices de un triángulo A(1,0,2), B(1,2,2) y C(5,4,6). El punto D divide al segmento $\overline{AC}$ en la razón r=1/3. $\overline{CE}$ es la mediana trazada desde el vértice C. Hállense las coordenadas del punto M, donde se cortan las rectas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$.
Rp. M(11/7,10/7,18/7)

17. Se dan los vértices de un triángulo: A(-1,-2,4), B(-4,-2,0) y C(3,-2,1). Calcular el ángulo interno del vértice B.
Rp. 45^{o}

18. Se dan los vértices de un triángulo: A(3,2,-3), B(5,1,-1) y C(1,-2,1). Determinar el ángulo externo del vértice A.
Rp. $\alpha=\arccos(-4/9)$

1.43 PROYECCION ORTOGONAL Y COMPONENTES

La definición de proyección ortogonal de un vector sobre otro vector, es análoga a aquella que se hace para dos vectores en R^2. Esto es, si $\vec{a}$ y $\vec{b} \in R^3$, entonces:

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\right)\vec{b} \tag{57}$$

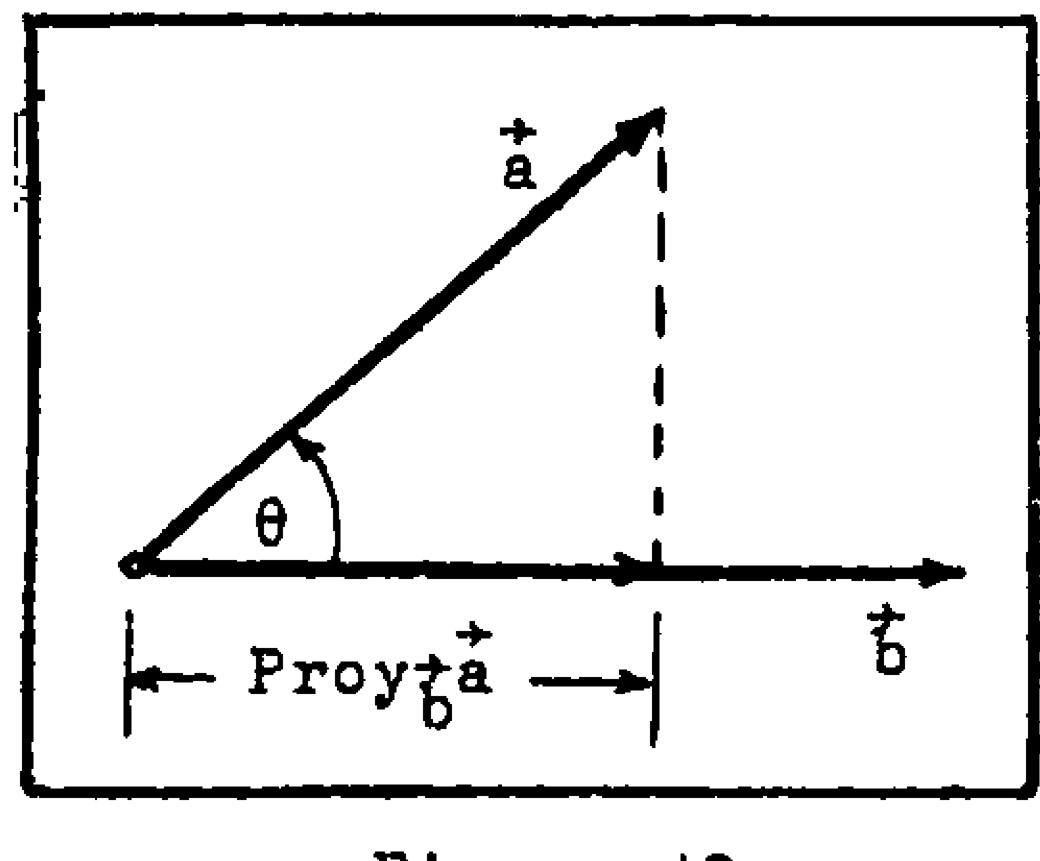


Figura 42

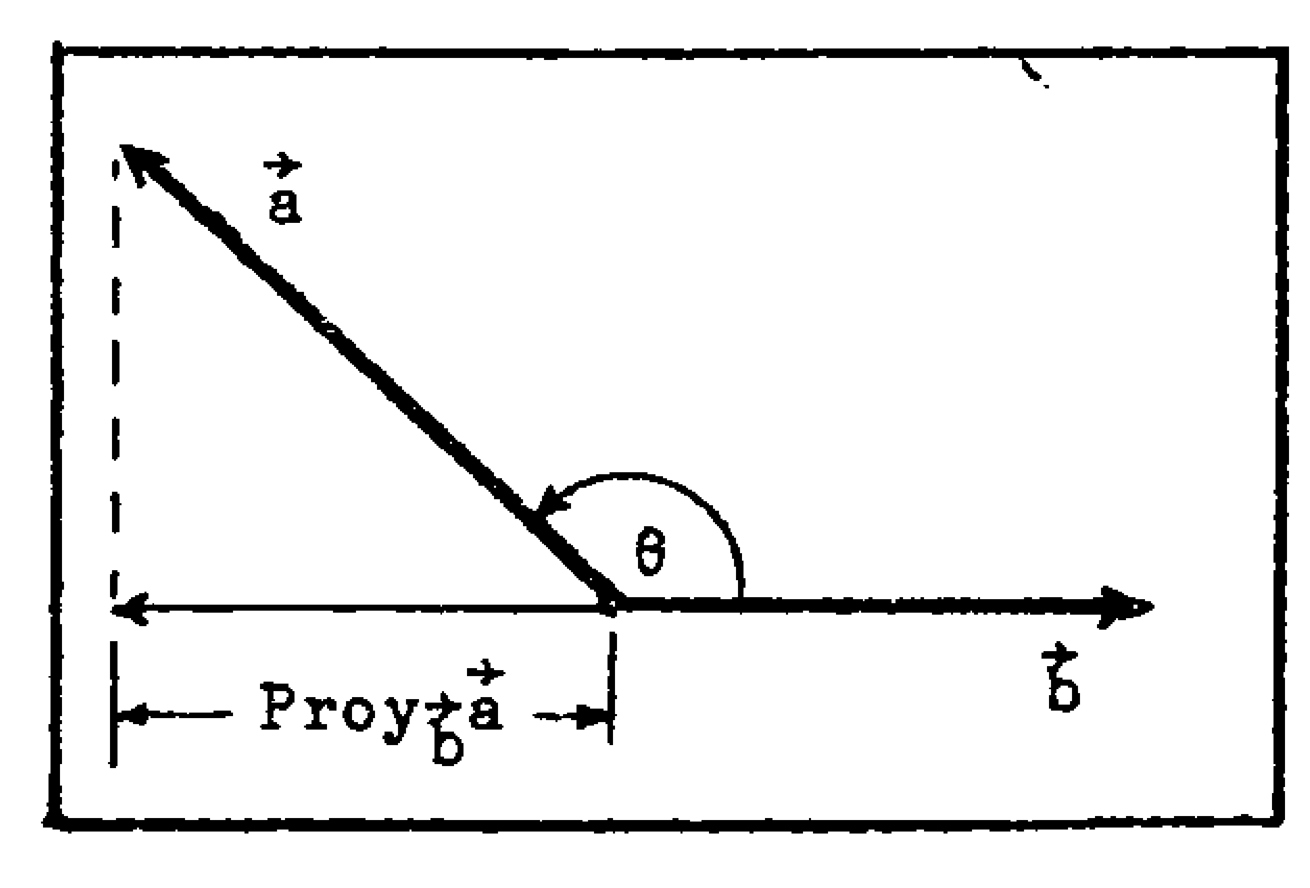


Figura 43

En particular consideremos las Figuras 42 y 43, en las que aparecen las representaciones geométricas de los vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y la $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$. Podemos observar lo siguiente:

(1) El vector $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ son paralelos (colineales).

(2) Cuando el ángulo θ es agudo, $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen el mismo sentido.

(3) Cuando el ángulo θ es obtuso, $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen sentidos opuestos.

(4) Si $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ son ortogonales, entonces $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = 0$, o sea: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

PROPIEDADES.

1. $\text{Proy}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{Proy}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{c}}\vec{b}$
2. $\text{Proy}_{\vec{b}}(r\vec{a}) = r\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$
3. $\text{Proy}_{r\vec{b}}\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$

DEFINICION 13. La componente de un vector $\vec{a}$ sobre otro vector $\vec{b}$, denotado por $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}$, se expresa mediante su módu

lo y el ángulo θ que forma con el vector $\vec{b}$, por la fórmula:

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = ||\vec{a}||\text{Cos}\theta$$

Si aplicamos la ecuación (56) a esta fórmula obtenemos el número real:

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||} \qquad (58)$$

Ahora bien, si escribimos la ecuación (57) de la forma:

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{||\vec{b}||}\right)\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$$

entonces la proyección ortogonal y la componente están relacionadas por:

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = (\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a})\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} \qquad (59)$$

En donde podemos observar lo siguiente:

(1) Si $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} > 0$, entonces los vectores $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen el mismo sentido.

(2) Si $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} < 0$, entonces $\vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen sentidos opuestos.

(3) Si $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = 0$, entonces: $\vec{b}\perp\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$, o bien, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

(4) Si en la ecuación (59) tomamos módulos a ambos extremos obtenemos:

$$||\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}|| = |\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}| \leftrightarrow \text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \pm||\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}||$$

Por esta razón a la componente se le define también como la magnitud dirigida de la proyección.

EJEMPLO 1. Se dan los vectores $\vec{a}=(-2,1,1)$, $\vec{b}=(1,5,0)$ y $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Calcular $\text{Comp}_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b})$.

Solución. $3\vec{a}-2\vec{b} = (-6,3,3)-(2,10,0) = (-8,-7,3)$

Luego, aplicando (58) se tiene:

$$\text{Comp}_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b}) = \frac{(-8,-7,3).(4,4,-2)}{\sqrt{16+16+4}} = \frac{-32-28-6}{6} = -11$$

EJEMPLO 2. Sean los vectores $\vec{a}=(5,4,1)$, $\vec{b}=(-2,6,3)$. Hallar el ortogonal al vector $\vec{v}=(2,1,0)$ que satisface las condiciones: $\vec{a}.\vec{c}=1$ y $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{c} = -2/7$.

Solución. Sea $\vec{c}=(x,y,z)$

Si $\vec{c}\perp\vec{v} \rightarrow (x,y,z).(2,1,0)=0 \leftrightarrow 2x+y=0$ (1)

$\vec{a}.\vec{c} = 1 \rightarrow (5,4,1).(x,y,z) = 1 \leftrightarrow 5x+4y+z=1$ (2)

$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{c} = -2/7 \rightarrow \dfrac{(-2,6,3).(x,y,z)}{\sqrt{4+36+9}} = -\dfrac{2}{7} \leftrightarrow -2x+6y+3z=-2$ (3)

Resolviendo (1), (2) y (3) obtenemos: $x=1$, $y=-2$, $z=4$

$$\therefore\ \vec{c}=(1,-2,4)$$

EJEMPLO 3. Se dan los vértices de un triángulo: $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-1,2)$ y $C(-5,6,-4)$; $\overline{BD}$ es la altura del triángulo trazado por el vértice B. Hállese las coordenadas del punto D.

Solución. En el ΔADB: $\overline{DB} = \overline{AB}-\overline{AD}$

$\rightarrow \overline{DB} = \overline{AB} - \text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB}$ (1)

$\overline{AB} = (-4,-1,2)-(-1,-2,4) = (-3,1,-2)$

$\overline{AC} = (-5,6,-4)-(-1,-2,4) = 4(-1,2,-2)$

$\text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \dfrac{(-3,1,-2).(-1,2,-2)}{(\sqrt{1+4+4})^2}(-1,2,-2)$

$= (-1,2,-2)$

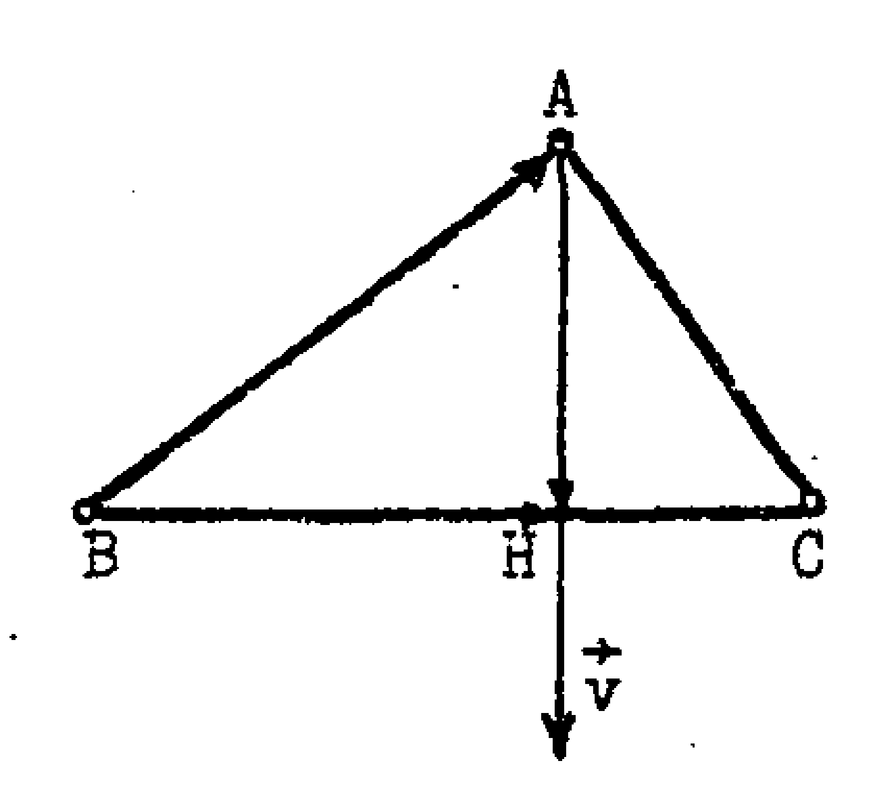
Luego, en (1): $B-D = (-3,1,-2)-(-1,2,-2) = (-2,-1,0)$

$$\therefore\ D = (-4,-1,2)-(-2,-1,0) = (-2,0,2)$$

EJEMPLO 4. Los vértices de un triángulo son $A(2,-1,-3)$, $B(1,2,-4)$ y $C(3,-1,-2)$. Hallar el vector $\vec{v}$ que es colineal a la altura bajada del vértice A al lado opuesto si se sabe, además, que $||\vec{v}||=2\sqrt{17}$.

Solución. En el ΔBHA: $\overline{AH} = \overline{BH}-\overline{BA}$

$\rightarrow \overline{AH} = \text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{BA} - \overline{BA}$ (1)



$\overline{BA} = (2,-1,-3)-(1,2,-4) = (1,-3,1)$

$\overline{BC} = (3,-1,-2)-(1,2,-4) = (2,-3,2)$

$\text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{BA} = \dfrac{(1,-3,1).(2,-3,2)}{(\sqrt{4+9+4})^2}(2,-3,2)$

$= \frac{13}{17}(2,-3,2)$

Luego, en (1): $\overline{AH} = \frac{13}{17}(2,-3,2)-(1,-3,1) = \frac{3}{17}(3,4,3)$

Un vector unitario en la dirección de $\overline{AH}$ es: $\vec{u} = \dfrac{(3,4,3)}{\sqrt{34}}$

Dado que $\vec{v}$ es colineal con AH → $\vec{v} = ||\vec{v}||\vec{u}$

$$\therefore \vec{v} = (2\sqrt{17})\frac{(3,4,3)}{\sqrt{34}} = \sqrt{2}(3,4,3)$$

EJERCICIOS

1. Dados los puntos A(2,3,1), B(5,-9,4) y C(6,-7,2). Si P divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$, hallar la norma de la proyección $\overline{AP}$ sobre el vector $\overline{BC}$. Rp. 3

2. Si $\vec{a}=(4,-2,1)$ y $\vec{b}=(2,-1,4)$, hallar la componente del vector $\vec{v}=3\vec{a}-2\vec{b}$ sobre el vector $\vec{w}=2\vec{a}+3\vec{b}$. Rp. 10/3

3. Si $\vec{a}=(2,3,1)$ y $\vec{b}=(2,1,-3)$, calcular la proyección del vector $\vec{v}=3\vec{a}-2\vec{b}$ sobre el vector $\vec{w}=\vec{b}-3\vec{a}$. Rp. (16/5)(1,2,0)

4. Hallar la componente del vector $\vec{v}=(4,-3,2)$ sobre el eje que forma con los ejes coordenados ángulos agudos iguales. Rp. $\sqrt{3}$

5. Hallar la componente del vector $\vec{v}=(\sqrt{2},-3,-5)$ sobre el eje q' forma con los ejes coordenados OX y OZ los ángulos $\alpha=45^o$, $\gamma=60^o$ y con el eje OY un ángulo agudo β. Rp. -3

6. Se dan los puntos A(3,-4,-2), B(2,5,-2). Hallar la componente del vector AB sobre el eje que forma con los ejes coordenados OX y OY los ángulos $\alpha=60^o$, $\beta=120^o$ y con el eje OZ un ángulo obtuso γ. Rp. -5

7. Los vértices de un triángulo son los puntos A(2,3,-1), B(5,1,1) y C(6,4,-2). Hallar un vector $\vec{v}$ que es colineal a la altura bajada del vértice B al lado opuesto si se sabe, además que $||\vec{v}||=6$. Rp. $\vec{v}=(-2,4,-4)$

8. Se dan los vértices de un triángulo: A(-1,3,4), B(-5,6,-4) y C(1,2,6); $\overline{BD}$ es la altura del triángulo trazada por el vértice B. Hallar las coordenadas del punto D. Rp. D(-7,6,-2)

1.43 COMBINACION LINEAL DE VECTORES EN R^3.

Sean los vectores no paralelos y no nulos, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ dados en un sistema tridimensional.

Si gráficamente un vector $\vec{v}$ del espacio podemos expresarlo como una suma de componentes vectoriales $r\vec{a}$, $s\vec{b}$ y $t\vec{c}$, que son múltiplos escalares de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, entonces se dice que el vector $\vec{v}$ se ha expresado como una combinación lineal de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. (Figura 44). Es decir:

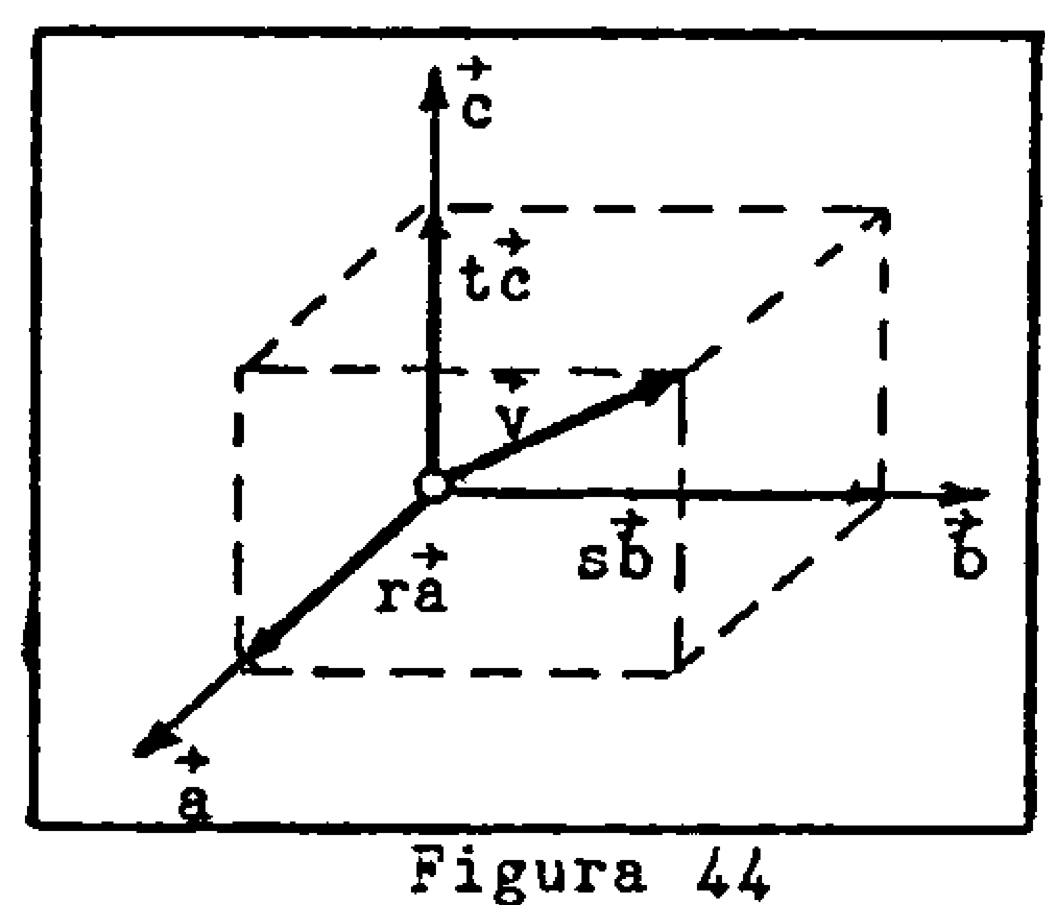


Figura 44

$$\vec{v} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

Ahora bien, todo vector $\vec{v} \in R^3$ se pude expresar como una suma de múltiplos escalares de versores básicos: $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ y $\vec{k}=(0,0,1)$.

En efecto:

$$\begin{aligned}\vec{v} = (x,y,z) &= (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)\\ &= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\end{aligned}$$

1.44 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES EN R^3

Un sistema de vectores $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ se llama *linealmente dependiente*, cuando, y sólo cuando, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son *coplanares*, es decir, son paralelos o coincidentes a cierto plano. (Figura 45)

Se dice que tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c} \in R^3$, son *linealmente independientes*, si y sólo si, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son linealmente dependientes, esto es, cuando dichos vectores no son coplanares (Figura 46).

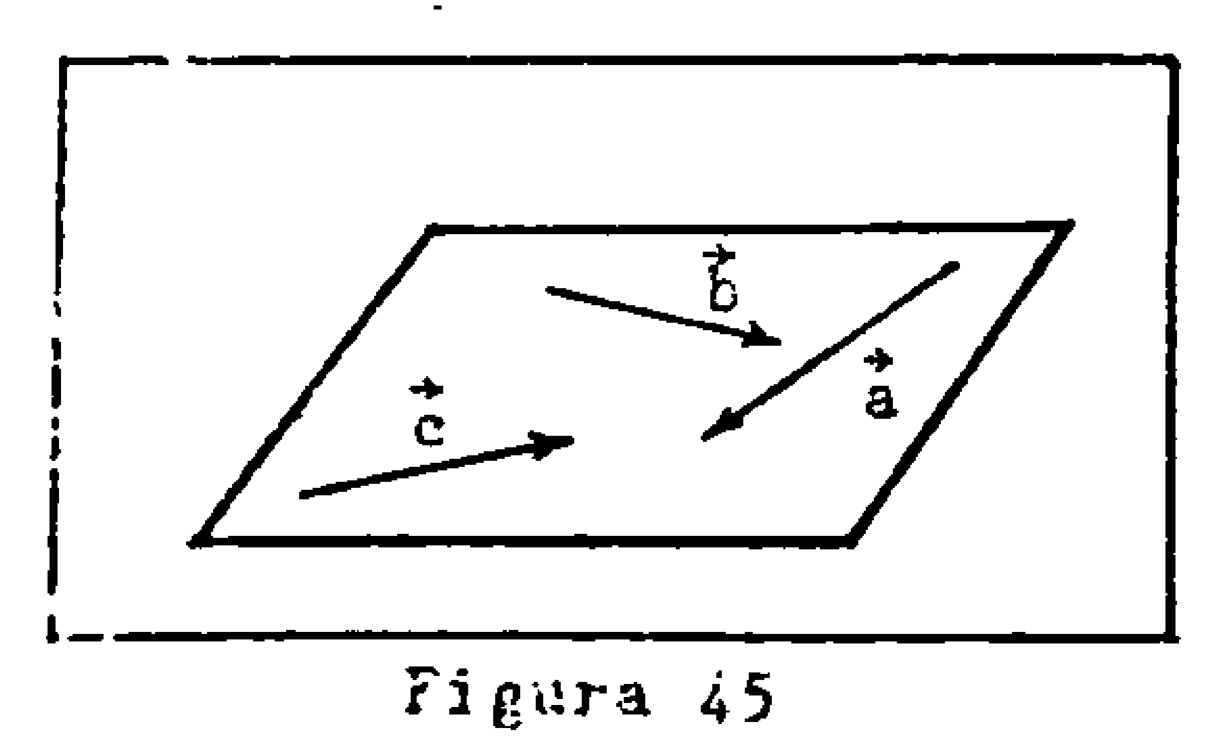


Figura 45

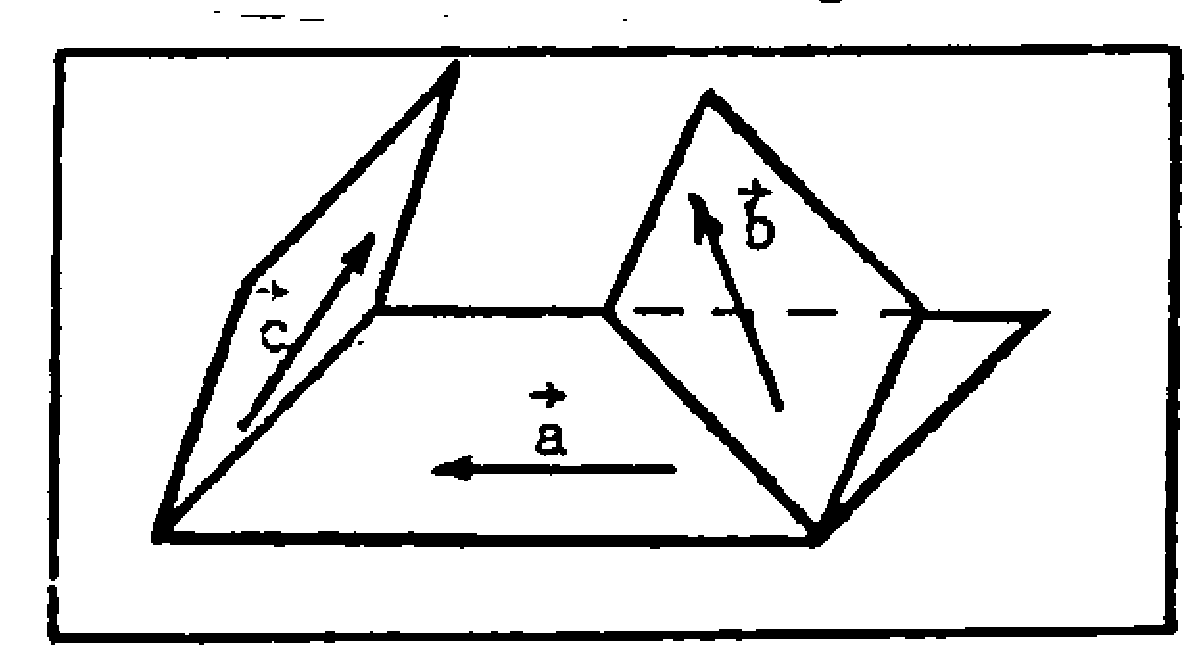


Figura 46

Criterio de independencia lineal. Tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c} \in R^3$, son linealmente independientes si se verifican las condiciones siguientes:

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \theta \rightarrow r=0 \ , \ s=0 \ , \ t=0$$

1.45 BASE Y COORDENADAS DE UN VECTOR EN R^3

Un terna ordenada de vectores no coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ lleva el nombre de *base* en el conjunto de todos los vectores geométricos. Sabemos que todo vector geométrico $\vec{v}$ puede ser representado unívocamente en la forma:

$$\vec{v} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad (1)$$

los números r, s y t se denominan *coordenadas* del vector $\vec{v}$ en la base $B=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Motivo por el cual a la notación (1) se le denomina también, descomposición del vector $\vec{v}$ según la base B.

EJEMPLO 1. Sea dado la terna de vectores no coplanares $\vec{a}_1=(1,-2,0)$, $\vec{a}_2=(1,2,-2)$ y $\vec{a}_3=(3,7,-5)$. Calcúlese las coordenadas del vector $\vec{a}=2i-3j+k$ en la base $B=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ y escribir la descomposición correspondiente según la base.

Solución. Si $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$ son vectores no coplanares, entonces, existe r, s y t tal que:

$$\vec{a} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 + t\vec{a}_3$$

$$\rightarrow \ (2,-3,1) = r(1,-2,0) + s(1,2,-2) + t(3,7,-5)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2 = r + s + 3t \\ -3 = -2r + 2s + 7t \\ 1 = -2s - 5t \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: r=2, s=-3 y t=1

Luego, el vector $\vec{a}$ en la nueva base se escribe como (2,-3,1) o equivalentemente: $\vec{a} = 2\vec{a}_1-3\vec{a}_2+\vec{a}_3$

EJEMPLO 2. En el tetraedro OABC la mediana $\overline{AM}$ de la arista ABC se divide por el punto P en la razón $\overline{AP}:\overline{PM}=3:7$. Hallar las coordenadas del vector $\overline{OP}$ en la base de las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

Solución. Si $\frac{AP}{PM}=\frac{3}{7} \rightarrow \frac{AP}{AM}=\frac{3}{10}$

En el ΔOAP, se tiene:

$\overline{CP}=\overline{OA}+\overline{AP} \rightarrow \overline{OP}=\overline{OA}+\frac{3}{10}\overline{AM}$ (1)

Pero: $\overline{AM}=\overline{CM}-\overline{OA}$, y como M es punto medio de $\overline{BC}$, entonces:

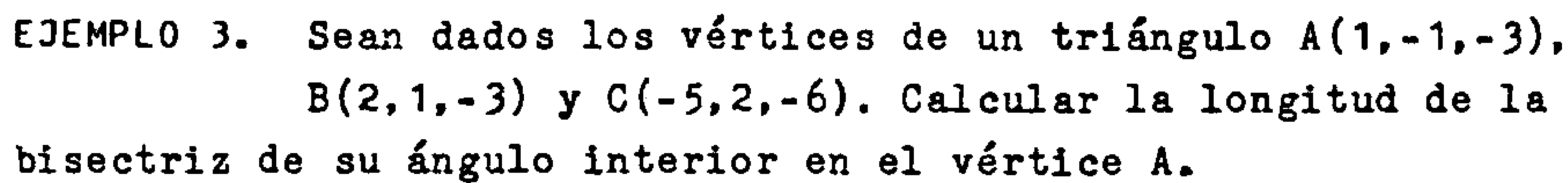
$$\overline{AM}=\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC})-\overline{OA}$$

Al sustituir en (1) obtenemos:

$$\overline{OP}=\overline{OA}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\overline{OB}+\frac{1}{2}\overline{OC}-\overline{OA}\right)=\frac{7}{10}\overline{OA}+\frac{3}{20}\overline{OB}+\frac{3}{20}\overline{OC}$$

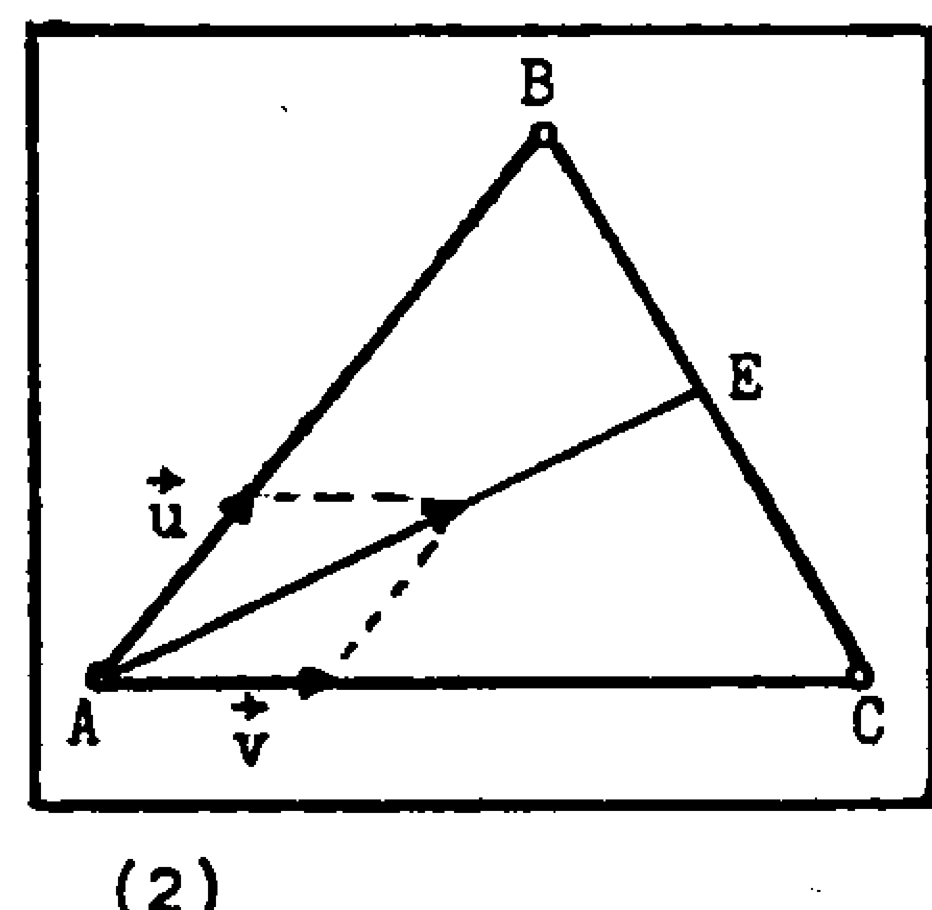
Por tanto, las coordenadas de $\overline{OP}$ en la base $\mathcal{B}=(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC})$ son:

$$(7/10,3/20,3/20)$$



EJEMPLO 3. Sean dados los vértices de un triángulo A(1,-1,-3), B(2,1,-3) y C(-5,2,-6). Calcular la longitud de la bisectriz de su ángulo interior en el vértice A.

Solución. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los versores de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.



Como $\overline{AE}\,||\,(\vec{u}+\vec{v})$, entonces: $\exists t>0$, tal que:

$$\overline{AE}=t(\vec{u}+\vec{v})=t\left(\frac{\overline{AB}}{||\overline{AB}||}+\frac{\overline{AC}}{||\overline{AC}||}\right) \quad (1)$$

Por otro lado: $\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AC}+r\overline{CB}$

$=\overline{AC}+r(\overline{AB}-\overline{AC})$

$=r\overline{AB}+(1-r)\overline{AC}$, $r>0$ (2)

Las ecuaciones (1) y (2) representan en sí dos descomposiciones del vector $\overline{AE}$ según la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Siendo única la descomposición de un vector según la base, tenemos:

$$r=\frac{t}{||\overline{AB}||} \quad , \quad 1-r=\frac{t}{||\overline{AC}||}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $t=\frac{||\overline{AB}||.||\overline{AC}||}{||\overline{AB}||+||\overline{AC}||}$

Luego, en (1): $\overline{AE}=\left(\frac{||\overline{AC}||}{||\overline{AB}||+||\overline{AC}||}\right)\overline{AB}+\left(\frac{||\overline{AB}||}{||\overline{AB}||+||\overline{AC}||}\right)\overline{AC}$ (3)

De los datos del problema hallamos: $\overline{AB}=(1,2,1) \rightarrow ||\overline{AB}||=\sqrt{6}$

$\overline{AC}=(-6,3,-3) \rightarrow ||\overline{AC}||=3\sqrt{6}$

y sustituyendo en (3) obtenemos:

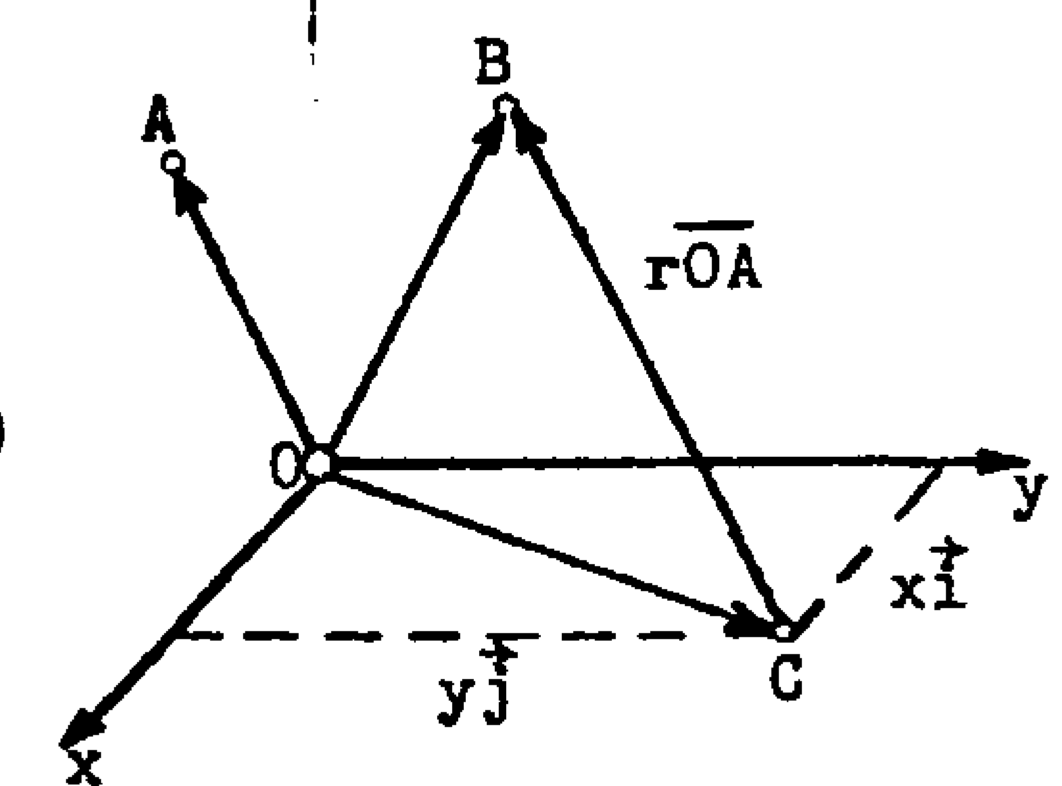
$$\overline{AE} = \frac{3}{4}(1,2,1) + \frac{1}{4}(-6,3,-3) = \frac{3}{4}(-1,3,0)$$

$$\therefore\ ||\overline{AE}|| = \frac{3}{4}\sqrt{10}$$

EJEMPLO 4. Sean dados los puntos A(2,5,2) y B(14,5,4); C es el punto de intersección del plano coordenado OXY con una recta trazada por el punto B paralelamente a la recta $\overline{OA}$. Hallar las coordenadas del punto C.

Solución. Sea el punto C(x,y,0)

En el ΔOCB se tiene:



$\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = x\vec{i} + y\vec{j} + r\overline{OA}$

$\rightarrow$ (14,5,4) = x(1,0,0)+y(0,1,0)+r(2,5,2)

$$\leftrightarrow \begin{cases} 14 = x + 2r \\ 5 = y + 5r \\ 4 = 2r \rightarrow r=2 \end{cases}$$

de donde: x=10 , y=-5 $\therefore$ C(10,-5,0)

EJEMPLO 5. Se dan los vectores $\vec{a}$=(-2,0,1), $\vec{b}$=(1,-2,0) y $\vec{c}$=(1,1,1). Hallar la proyección ortogonal del vector $\vec{a}$ en el plano de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

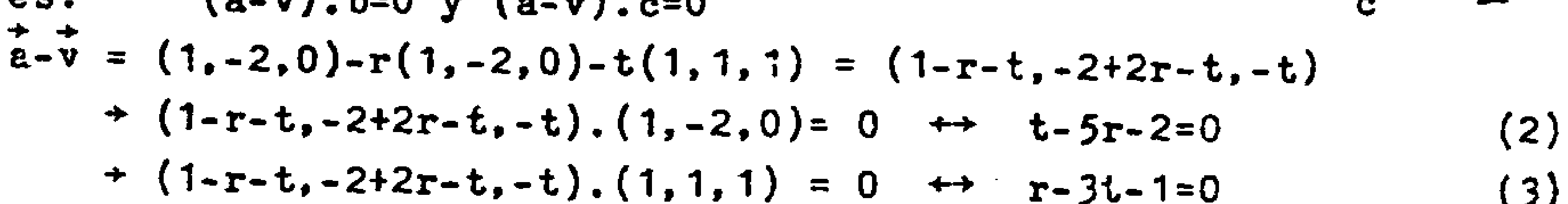
Solución. Trasladamos los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ a un origen común, tal como se indica en la figura adjunta.

Sea: $\vec{v} = \vec{a}_{b,c}$ (Proyección de $\vec{a}$ en el plano de $\vec{b}$ y $\vec{c}$)

$\rightarrow\ \vec{v} = r\vec{b} + t\vec{c}$ (1)

Como $\vec{v}$ está en el plano de $\vec{b}$ y $\vec{c}$, entonces: $\vec{n}=\vec{a}-\vec{v}$ será ortogonal a $\vec{b}$ y $\vec{c}$, esto es: $(\vec{a}-\vec{v}).\vec{b}=0$ y $(\vec{a}-\vec{v}).\vec{c}=0$

$\vec{a}-\vec{v}$ = (1,-2,0)-r(1,-2,0)-t(1,1,1) = (1-r-t,-2+2r-t,-t)



$\rightarrow$ (1-r-t,-2+2r-t,-t).(1,-2,0)= 0 $\leftrightarrow$ t-5r-2=0 (2)

$\rightarrow$ (1-r-t,-2+2r-t,-t).(1,1,1) = 0 $\leftrightarrow$ r-3t-1=0 (3)

Resolviendo el sistema (2) y (3) obtenemos: r=t=-1/2

Luego, en (1): $\vec{v}$ = (-1,1/2,-1/2)

EJEMPLO 6. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tienen longitudes iguales y forman dos a dos ángulos iguales. Hallar las coordenadas del vector $\vec{c}$, si $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$.

Solución. Sea el vector: $\vec{c}=(x,y,z)$

Entonces: $\vec{c}.\vec{a} = (x,y,z).(1,1,0) = x+y$

$\vec{c}.\vec{b} = (x,y,z).(0,1,1) = y+z$

$\vec{a}.\vec{b} = (1,1,0).(0,1,1) = 1$

Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman dos a dos ángulos iguales, entonces:

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{c}.\vec{a} = \vec{c}.\vec{b} \rightarrow \begin{cases} x+y = y+z \rightarrow z = x \\ x+y = 1 \rightarrow y = 1-x \end{cases}$$

Además: $||c||^2 = x^2+y^2+z^2 = ||a||^2 = 2$

$$\rightarrow 2 = x^2+(1-x)^2+x^2 \leftrightarrow 3x^2-2x-1=0 \leftrightarrow x_1=1 \text{ ó } x_2=-1/3$$

$$y_1=0 \text{ ó } y_2=4/3$$

$$\therefore \vec{c}=(1,0,1) \text{ ó } \vec{c}=(-1/3,4/3,-1/3)$$

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que para cualesquiera vectores dados $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, los vectores $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ y $\vec{c}-\vec{a}$ son coplanares.

2. Sean dados tres vectores no coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Demuéstrese que los vectores $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $-\vec{a}+5\vec{b}-3\vec{c}$ son coplanares.

3. Sean dados tres vectores no coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Hallar los valores de λ, para los cuales los vectores $\lambda a+b+c$, $a+\lambda b+c$, $a+b+\lambda c$, son coplanares. Rp. 0,1,2

4. Se dan tres vectores: $\vec{a}=(3,-2,1)$, $\vec{b}=(-1,1,-2)$ y $\vec{c}=(2,1,-3)$. Hallar la descomposición del vector $\vec{d}=(11,-6,5)$ en la base $B=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Rp. $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

5. Se dan cuatro vectores $\vec{a}=(2,1,0)$, $\vec{b}=(1,-1,2)$, $\vec{c}=(2,2,-1)$ y $\vec{d}=(3,7,-7)$. Hallar la descomposición de cada uno de estos vectores tomando por base los otros tres. Rp. $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

$\vec{c}=-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{d}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$

6. Fuera del plano del paralelogramo ABCD se ha elegido un punto O. En la base de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ hállese las coordenadas:
   a) del vector $\overline{OM}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo. Rp. (1/2,0,1/2)
   b) del vector $\overline{OK}$, donde K es el punto medio del lado $\overline{AD}$. Rp. (1,-1/2,1/2)

7. En el trapecio ABCD se conoce la razón entre las longitudes de las bases: $\frac{AB}{CD} = \lambda$. Hallar las coordenadas del vector $\overline{CB}$ en la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Rp. $(1 - \frac{1}{\lambda},-1)$

8. Sean dados los puntos A(1,2,3), B(2,-2,1), C(3,0,3) y D(16,10,18). E es un punto de intersección del plano OAB (O es el origen de coordenadas) con una recta trazada por el punto D paralelamente a la recta $\overline{OC}$. Hallar las coordenadas del punto E. (Sug. Desarróllese el vector $\overline{OD}$ según una base formada de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$). Rp. E(-19,10,-17)

9. Sean dados los vectores $\vec{a}_1=(-1,2,0)$, $\vec{a}_2=(3,1,1)$, $\vec{a}_3=(2,0,1)$ y $\vec{a}=\vec{a}_1-2\vec{a}_2+(1/3)\vec{a}_3$. Calcular:
   a) $||\vec{a}_1||$ y las coordenadas del vector $\vec{a}_{1,0}$ del vector $\vec{a}_1$. Rp. $\sqrt{5}$, $(-1/\sqrt{5},2/\sqrt{5},0)$
   b) $\text{Cos}(\vec{a}_1,\vec{j})$ Rp. $2/\sqrt{5}$
   c) La coordenada x del vector $\vec{a}$. Rp. -19/3

10. Sea dada la terna de vectores no coplanares: $\vec{a}_1=(1,0,0)$, $\vec{a}_2=(1,1,0)$ y $\vec{a}_3=(1,1,1)$. Calcular las coordenadas del vector $\vec{a}=-2\vec{i}-\vec{k}$ en la base $B=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ y escribir la descomposición correspondiente según la base. Rp. $\vec{a}=-2\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3$

11. Se dan los vectores $\vec{a}=(1,-3,0)$, $\vec{b}=(1,-1,2)$ y $\vec{c}=(0,1,-2)$. Hallar la proyección ortogonal del vector $\vec{a}$ en el plano de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Rp. (-2,-3/5,6/5)

1.46 EL PRODUCTO VECTORIAL

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en R^3, tal que, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, entonces el producto vectorial de $\vec{a}\times\vec{b}$ es el vector que se define como:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1) \qquad (60)$$

Por ejemplo, si $\vec{a}=(2,-1,3)$ $\rightarrow$ $a_1=2$, $a_2=-1$, $a_3=3$
y $\vec{b}=(3,1,-1)$ $\rightarrow$ $b_1=3$, $b_2=1$, $b_3=-1$

Luego, por la ecuación (60) se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= [(-1)(-1)-(3)(1),(3)(3)-(2)(-1),(2)(1)-(-1)(3)]\\ &(1-3,9+2,2+3)\\ &= (-3,11,5)\end{aligned}$$

Observaciones.

(1) A diferencia del producto escalar, el producto vectorial de dos vectores es un vector.

(2) Como resulta complicado memorizar la fórmula (60), recomendamos el uso de determinantes de 2do orden y matrice de 2×3; temas que serán estudiadas en capítulos posteriores. Pero dada la utilidad de su empleo para el cálculo del producto vectorial, es conveniente introducir las siguientes ideas:

a)
$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3-a_3b_1)= a_3b_1 - a_1b_3$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

b) Formar la matriz de 2×3: $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.

donde los elementos de la primera fila son las componentes del vector $\vec{a}$ y los elementos de la segunda fila son las componentes del vector $\vec{b}$.

Entonces, el producto $\vec{a}\times\vec{b}$ queda definido por:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \qquad (61)$$

En la que cada componente es el valor de un determinante de 2do orden, que resulta de eliminar en la matriz M la primera, segunda y tercera columnas respectivamente.
Por ejemplo, para los vectores: $\vec{a}=(2,-1,3)$ y $\vec{b}=(3,1,-1)$

Formamos la matriz: $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Luego, según (61) se tiene:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right)$$
$$= [1-3, -(-2-9), 2+3]$$
$$= (-2, 11, 5)$$

PROPOSICION 1.6 Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores en R^3, entonces:

i) $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ ($\vec{a}\times\vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$)

ii) $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ ($\vec{a}\times\vec{b}$ es ortogonal a $\vec{b}$)

iii) $||\vec{a}\times\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$ (Igualdad de Lagrange)

Demostración. i) En efecto, si $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b}) = a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Como el determinante tiene dos filas iguales se sigue que:
$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 \rightarrow \vec{a}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$
Análogamente se demuestra que: $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0 \rightarrow \vec{b}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$

iii) En efecto, elevando al cuadrado la norma del vector definido en (60) se tiene:

$$||\vec{a}\times\vec{b}||^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2 \qquad (1)$$

y del producto interno: $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, se tiene:

$$||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2-(\vec{a}.\vec{b})^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \quad (2)$$

Efectuando las operaciones que aparecen en los segundos miembros de (1) y (2) comprobaremos que son idénticas, por tanto:

$$||\vec{a}\times\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$$

EJEMPLO 1. Sean $\vec{a}=(3,1,-2)$ y $\vec{b}=(4,-1,3)$; calcular $\vec{a}\times\vec{b}$ y verificar que es perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$.

Solución. Formemos la matriz: $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= [3-2,-(9+8),-3-4]$$

$$= (1,-17,-7)$$

Luego: $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b}) = (3,1,-2).(1,-17,-7) = 3-17+14 = 0$

$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b}) = (4,-1,3).(1,-17,-7) = 4+17-21 = 0$

Por tanto, se concluye que $\vec{a}\times\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

1.47 PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores en R^3, y $r\in R$ es un escalar, entonces:

P_1: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$ Distributividad por la izquierda

P_2: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$ Distributividad por la derecha

P_3: $r(\vec{a}\times\vec{b}) = (r\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(r\vec{b})$ Asociatividad escalar

P_4: $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ No conmutatividad

P_5: $\vec{a}\times\theta = \theta\times\vec{a} = \theta$

P_6: $\vec{a}\times\vec{a} = \theta$

P_7: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ No asociatividad vectorial

P_8: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

La demostración de cada una de estas propiedades se deja para el lector.

Observaciones.

(1) Una terna ordenada de vectores no coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se llama *derecha*, si para un observador ubicado dentro del ángulo sólido formado por dichos vectores, el giro más corto de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ y de $\vec{b}$ a $\vec{c}$ parece realizarse en el sentido antihorario.(Figura 47). En el caso contrario la terna $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ se denomina *izquierda*.

(2) La orientación del vector $\vec{a}\times\vec{b}$ en relación a las direcciones de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es la misma a la que corresponde al eje Z respecto a los semiejes positivos X e Y de un sistema cartesiano tridimensional. (Se debe destacar que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son necesariamente perpendiculares). Por lo que, si en un sistema derecho se doblan los dedos de la mano derecha de la dirección de $\vec{a}$ hacia la dirección de $\vec{b}$ entonces el pulgar apuntará en la dirección de $\vec{a}\times\vec{b}$ (Figura 48).

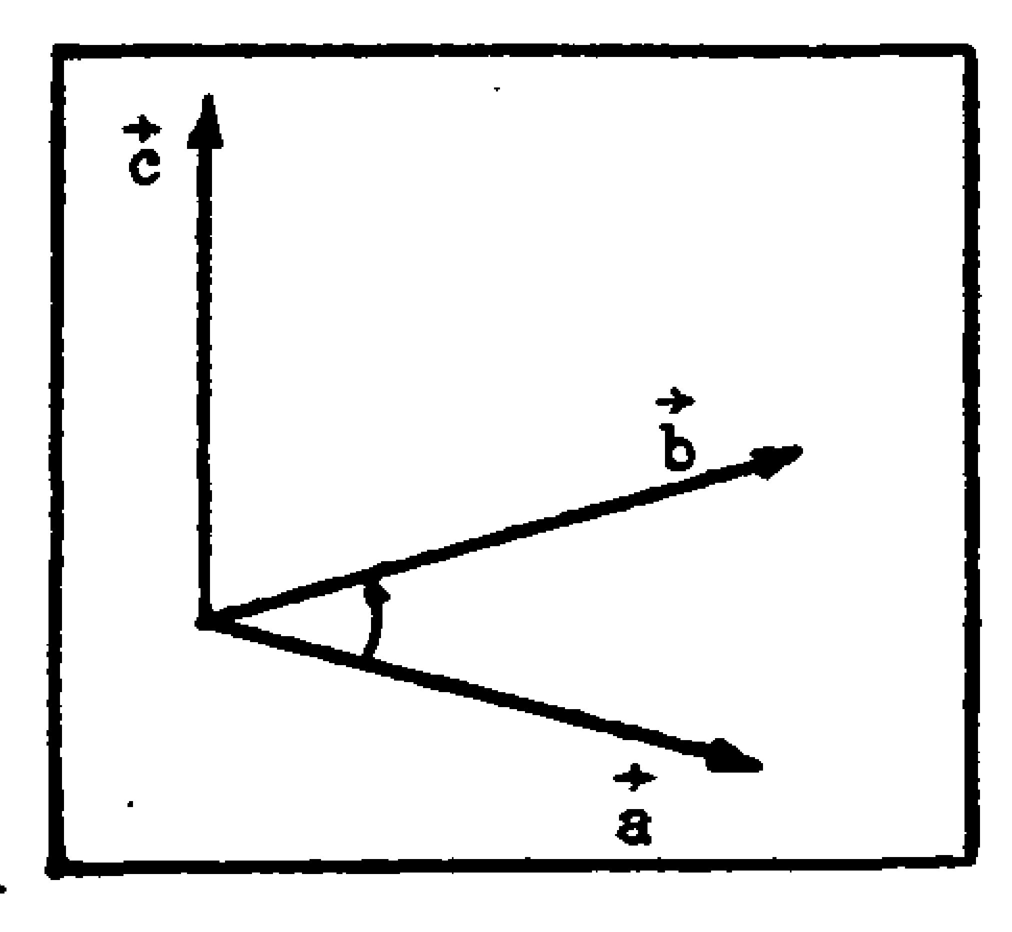


Figura 47

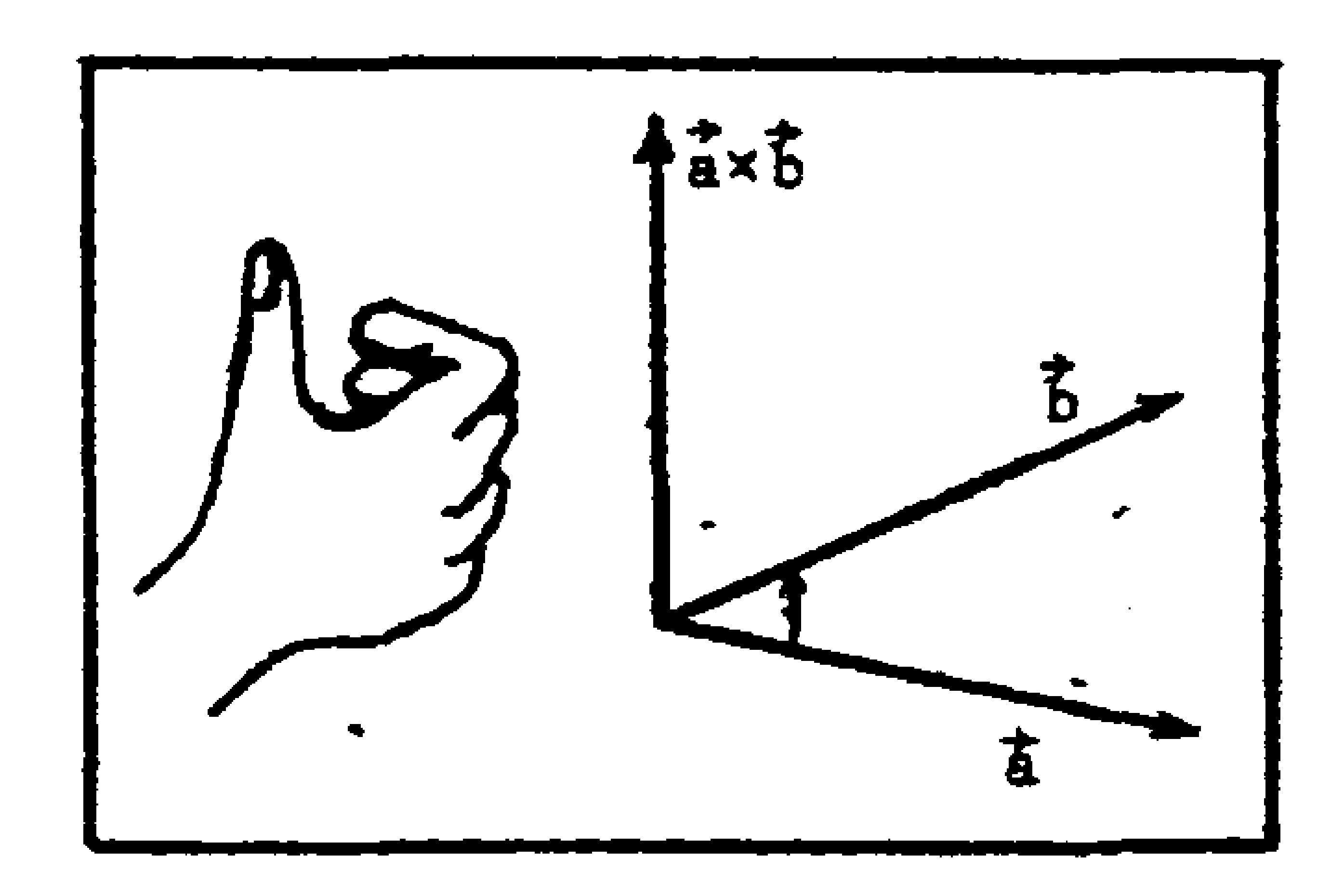


Figura 48

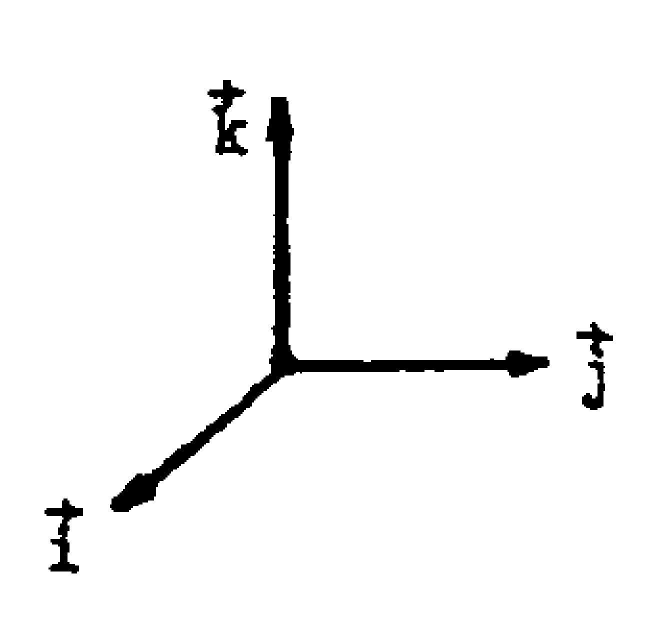
(3) Sabemos que todo vector $\vec{v}\in R^3$ se puede expresar como una suma de múltiplos escalares de vectores unitarios ortogonales, esto es:

$$\vec{v} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Entonces para dos vectores $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, el vector $\vec{a}\times\vec{b}$ definido en la ecuación (61) se puede escribir de la forma:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} \qquad (62)$$

(4) Aplicando la regla de la mano derecha para los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$, se puede ver claramente que:



$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

De otro lado: $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{j} = -(\vec{j}\times\vec{k}) = -\vec{i}$

y según las propiedades P_5 y P_6 del producto vectorial:

$$\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j}) = \vec{i}\times\theta = \theta$$

Por tanto: $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j} \neq \vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j})$

EJEMPLO 2. Simplificar la expresión:
$$\vec{x} = \vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k}) - \vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k}) + \vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

Solución. Según la propiedad P_1 se tiene:
$$\vec{x} = (\vec{i}\times\vec{j})+(\vec{i}\times\vec{k})-(\vec{j}\times\vec{i})-(\vec{j}\times\vec{k})+(\vec{k}\times\vec{i})+(\vec{k}\times\vec{j})+(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$\rightarrow\ \vec{x} = (\vec{k}) + (-\vec{j}) - (-\vec{k}) - (\vec{i}) + (\vec{j}) + (-\vec{i}) + (\theta)$$

de donde: $\vec{x} = 2(\vec{k}-\vec{i})$

EJEMPLO 3. Demostrar que:
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \ \leftrightarrow\ \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \theta$$

Demostración. ($\rightarrow$) Demostraremos que:
$$\text{Si } (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \ \rightarrow\ \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \theta$$

En efecto, haciendo uso de la propiedad 8, se tiene:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

Al igualar los segundos miembros obtenemos:

$$(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} = \theta \ \rightarrow\ (\vec{b}.\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} = \theta$$
$$\rightarrow\ \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \theta$$

($\leftarrow$) Demostraremos ahora que: $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \theta \ \rightarrow\ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

En efecto,

$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \theta \ \rightarrow\ (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} = \theta$$
$$\rightarrow\ -(\vec{b}.\vec{c})\vec{a} = -(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$
$$\rightarrow\ (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$
$$\rightarrow\ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$\therefore\ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \ \leftrightarrow\ \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \theta$$

1.48 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

La identidad de Lagrange establece que:

$$||\vec{a}\times\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2-(\vec{a}.\vec{b})^2$$

Si α es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces:

$$\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Cos}\alpha$$

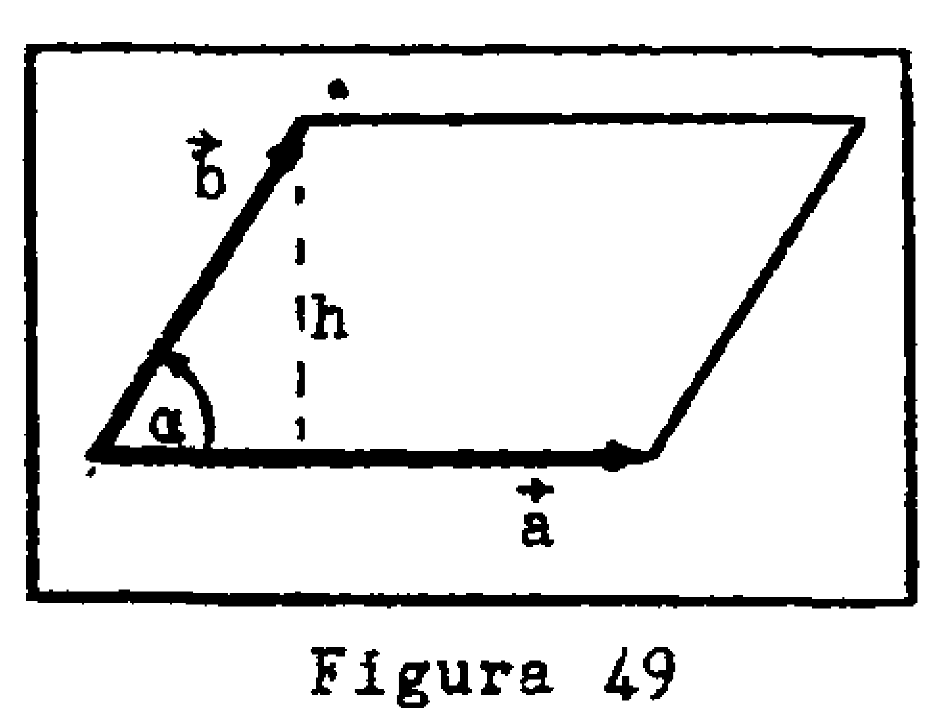


Figura 49

Por tanto:

$$||\vec{a}\times\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2-||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2\text{Cos}^2\alpha$$
$$= ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2(1-\text{Cos}^2\alpha)$$
$$= ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2\text{Sen}^2\alpha$$
$$\therefore\ ||\vec{a}\times\vec{b}|| = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Sen}\alpha \qquad (63)$$

Pero: $h=||\vec{b}||\text{Sen}\alpha$, es la altura del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (Figura 49).
Luego, si S es el área del paralelogramo, entonces:

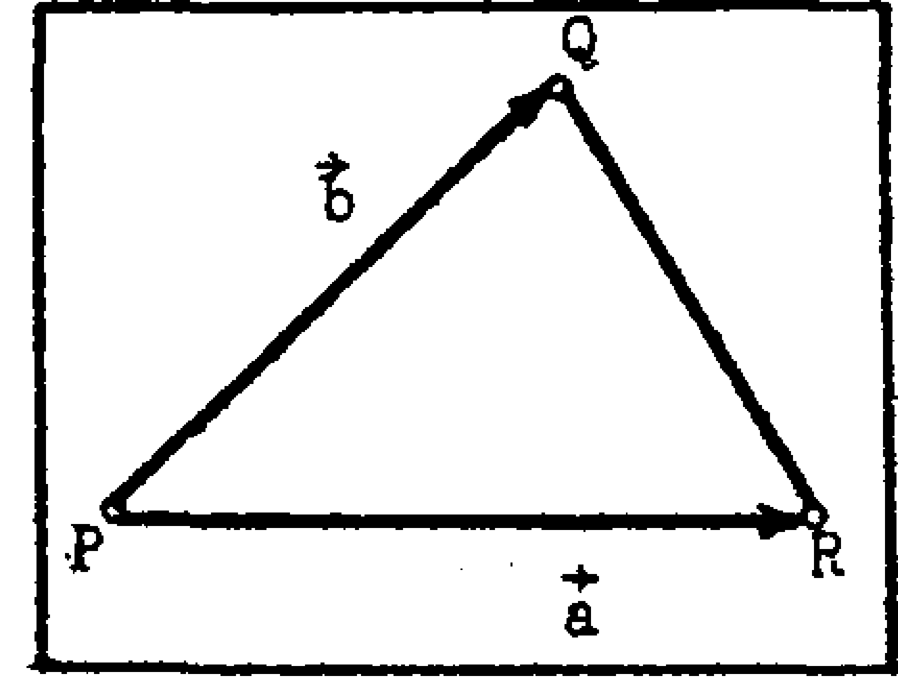
$$S = (\text{base})(\text{altura}) = (||\vec{a}||)(||\vec{b}||\text{Sen}\alpha)$$
$$\therefore\ S = ||\vec{a}\times\vec{b}|| \qquad (64)$$

Es decir, la magnitud del vector $\vec{a}\times\vec{b}$ es equivalente al área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

EJEMPLO 4. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P(2,0,-3), Q(1,4,5) y R(7,2,9).

Solución. Sean: $\vec{a}=PR=(7,2,9)-(2,0,-3)=(5,2,12)$
$\vec{b}=PQ=(1,4,5)-(2,0,-3)=(-1,4,8)$

Haciendo uso de la ecuación (62) se tiene:



$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}2 & 12\\4 & 8\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}5 & 12\\-1 & 8\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}5 & 2\\-1 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (16-48)\vec{i} - (40+12)\vec{j} + (20+2)\vec{k}$$
$$= 2(-16,26,11)$$
$$\rightarrow ||\vec{a}\times\vec{b}|| = 2\sqrt{256+676+121} = 18\sqrt{13}$$

Pero: área del triángulo $= \frac{1}{2}$(área del paralelogramo)

$$\therefore\ a(\Delta PQR) = 9\sqrt{13}\ u^2$$

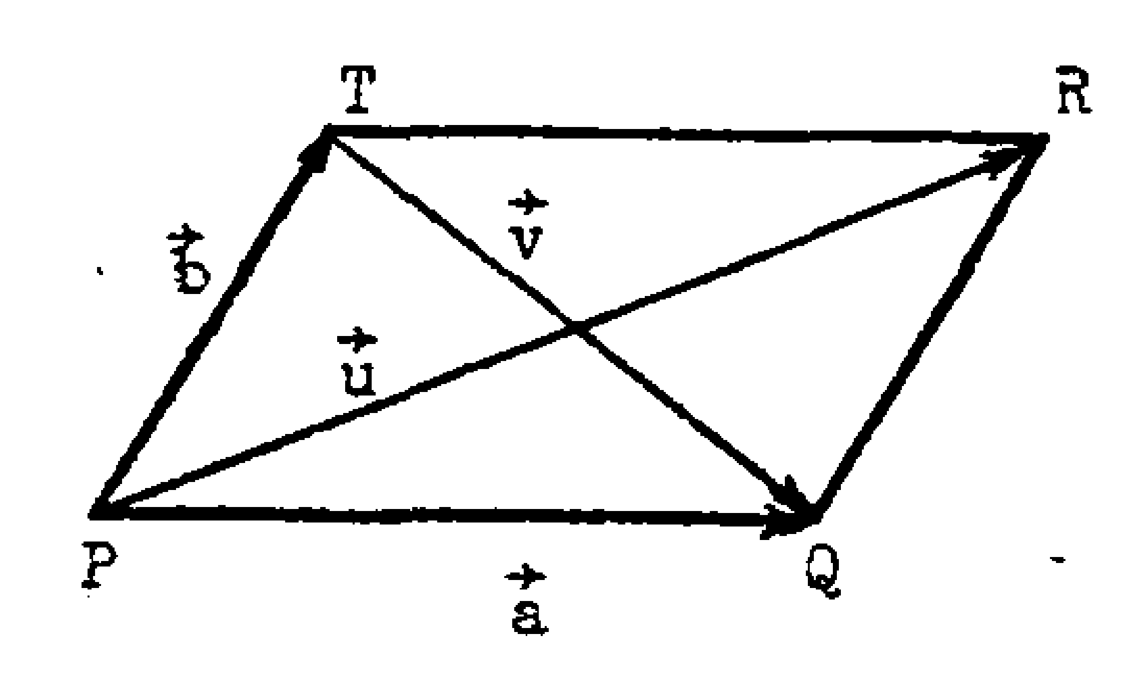
EJEMPLO 5. Hallar el área del paralelogramo que tiene como diagonales los vectores $\vec{u}=(5,-7,4)$ y $\vec{v}=(-3,3,0)$.

Solución. En el ΔPTQ: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{v}$ (1)

En el ΔPQR: $\vec{u} = \vec{a} + QR = \vec{a} + \vec{b}$ (2)

Del sistema (1) y (2) obtenemos:

$$\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \quad y \quad \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})$$



Entonces: $\vec{a}=(1,-2,2)$ y $\vec{b}=(4,-5,2)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-4+10)\vec{i} - (2-8)\vec{j} + (-5+8)\vec{k}$$

$$= 3(2,2,1)$$

$$\therefore S = ||\vec{a}\times\vec{b}|| = 3\sqrt{4+4+1} = 9u^2$$

EJEMPLO 6. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo cuyo coseno es $2/\sqrt{5}$, si $||\vec{a}||=2\sqrt{5}$ y $||\vec{b}||=4$, hallar la magnitud del vector $(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$.

Solución. $(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}) = 2\vec{a}\times(\vec{a}+2\vec{b}) - \vec{b}\times(\vec{a}+2\vec{b})$ (P_1)

$= 2\vec{a}\times\vec{a} + 4\vec{a}\times\vec{b} - \vec{b}\times\vec{a} - 2\vec{b}\times\vec{b}$ (P_1)

$= 2\theta + 4\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b} - 2\theta$ $(P_4$ y $P_6)$

$= 5\vec{a}\times\vec{b}$

$\rightarrow ||(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})|| = 5||\vec{a}\times\vec{b}|| = 5||\vec{a}||\,||\vec{b}||\text{Sen}\alpha$

$= 5(2\sqrt{5})(4)(1/\sqrt{5})$

$= 40$

EJEMPLO 7. El vector $\vec{c}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}=(2,-3,1)$ y $\vec{b}=(3,1,-2)$. Hallar sus componentes si la norma de $\vec{c}$ es $10\sqrt{6}$.

Solución. Un vector perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es

$$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (3-1)\vec{i} - (-2-3)\vec{j} + (2+9)\vec{k} = (2,5,11)$$

Luego, si $\vec{c} = r\vec{n} \rightarrow ||\vec{c}|| = |r|.||\vec{n}||$

$\rightarrow 10\sqrt{6} = |r|\sqrt{4+25+121} \rightarrow |r| = 2$

$$\therefore \vec{c} = \pm 2(2,5,11)$$

EJEMPLO 8. El vector $\vec{a}$ es perpendicular al eje Y y al vector $\vec{b}=(-3,8,4)$, y forma un ángulo obtuso con el eje Z. Hallar las componentes de $\vec{a}$ sabiendo que su norma es 15 unidades.

Solución. Si $\vec{j}=(0,1,0)$ es el vector unitario en la dirección del eje Y, entonces un vector perpendicular a $\vec{j}$ y al vector $\vec{b}$ es:

$$\vec{n} = \vec{j}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}\vec{k} = (4,0,3)$$

Luego, si $\vec{a} = r\vec{n} \rightarrow ||\vec{a}|| = |r|.||\vec{n}|| \rightarrow 15 = |r|\sqrt{16+9}$

$$\rightarrow |r| = 3 \leftrightarrow r = \pm 3$$

Como γ es obtuso, entonces: $\text{Cos}\gamma = \dfrac{z}{||\vec{a}||} < 0 \rightarrow z<0$

Por lo que elegimos: $r=-3$

$$\therefore \vec{a} = -3(4,0,3) = (-12,0,-9)$$

EJEMPLO 9. Demostrar que dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^3 son paralelos o colineales, si y sólo si, $\vec{a}\times\vec{b}=\theta$.

Demostración. $(\rightarrow)$ Probaremos que: $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \theta$

En efecto:

Si $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow \vec{a} = r\vec{b}$

$\rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = (r\vec{b})\times\vec{b} = r(\vec{b}\times\vec{b})$ (Pero según P_6: $\vec{b}\times\vec{b}=\theta$)

$\rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \theta$

$(\leftarrow)$ Probaremos ahora que: $\vec{a}\times\vec{b} = \theta \rightarrow \vec{a}||\vec{b}$

En efecto:

Si $\vec{a}\times\vec{b} = \theta \rightarrow ||\vec{a}\times\vec{b}|| = 0$

$\rightarrow ||\vec{a}||.||\vec{b}||\text{Sen}\alpha = 0$

Como $\vec{a} \neq \theta$ y $\vec{b} \neq \theta \rightarrow \text{Sen}\alpha = 0 \leftrightarrow \alpha=0$ ó $\alpha=\pi$

Sabemos que si $\vec{a}||\vec{b} \rightarrow m(\sphericalangle\vec{a},\vec{b}) = 0$ ó π

$$\therefore \vec{a}\times\vec{b} = \theta \rightarrow \vec{a}||\vec{b}$$

EJEMPLO 9. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ satisfacen la condición:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \theta$$

Demostrar que: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$, e interpretar geométricamente el resultado.

Demostración. En efecto, multiplicando vectorialmente la condición dada por $\vec{a}$ y luego por $\vec{b}$, se tiene:

$$\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} = \vec{a}\times\theta$$
$$\rightarrow\ \theta + \vec{a}\times\vec{b} - \vec{c}\times\vec{a} = \theta\ \rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a} \qquad (1)$$
$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{b} + \vec{c}\times\vec{b} = \theta\times\vec{b}$$
$$\rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b} + \theta - \vec{b}\times\vec{c} = \theta\ \rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} \qquad (2)$$

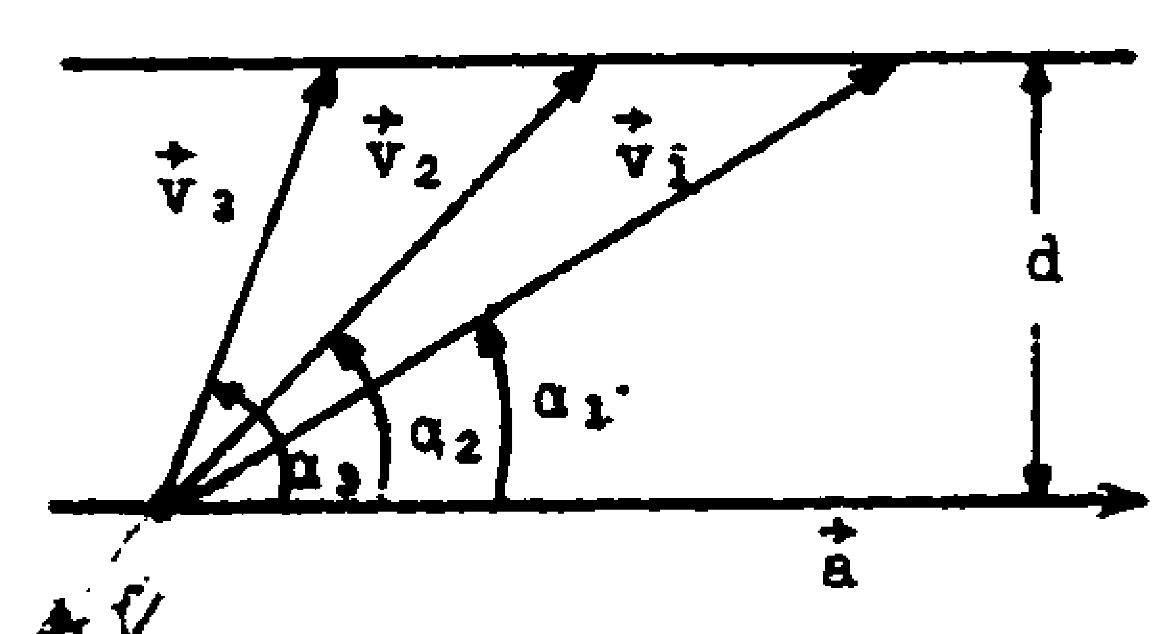
Luego, de (1) y (2) se deduce que:
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a} = \vec{k}$$

Las últimas igualdades indican que el vector $\vec{k}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$; por tanto, éstos son coplanares.

EJEMPLO 10. Qué podemos establecer para los vectores $\vec{v}_i$, si:
$$\vec{a}\times\vec{v}_1 = \vec{a}\times\vec{v}_2 = \vec{a}\times\vec{v}_3 = \ldots = \vec{a}\times\vec{v}_n$$

Solución. Sea: $\vec{a}\times\vec{v}_1 = \vec{a}\times\vec{v}_2 = \vec{a}\times\vec{v}_3 = \ldots = \vec{k}$

donde $\vec{k}$ es un vector constante que, por definición de producto vectorial, es perpendicular a los vectores: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, ..., $\vec{v}_i$. Esto es, los vectores $\vec{v}_i$ son coplanares.



Por otro lado, se debe verificar la igualdad de los módulos, es decir:

$$||\vec{a}||\,||\vec{v}_1||\,\text{Sen}\alpha_1 = ||\vec{a}||\,||\vec{v}_2||\,\text{Sen}\alpha_2 = \ldots\ldots = ||\vec{k}||$$

de donde: $||\vec{v}_1||\,\text{Sen}\alpha_1 = ||\vec{v}_2||\,\text{Sen}\alpha_2 = \ldots\ldots\ldots = d$

Por tanto, podemos afirmar que los extremos finales de los vectores $\vec{v}_i$ están sobre una recta paralela al vector $\vec{a}$.

EJEMPLO 11. Se da el siguiente sistema de fuerzas: $\vec{F}_1$ de 30 kg que actúa de A(5,-1,-6) a B(4,1,-4) y $\vec{F}_2$ de 56kg q' actúa de C(6,3,2) a D(8,0,-4). Hallar:

a) La resultante R del sistema.

b) El momento resultante respecto al punto E(6,-1,-4).

Solución. $\overline{AB} = (4,1,-4)-(5,-1,-6) = (-1,2,2)$

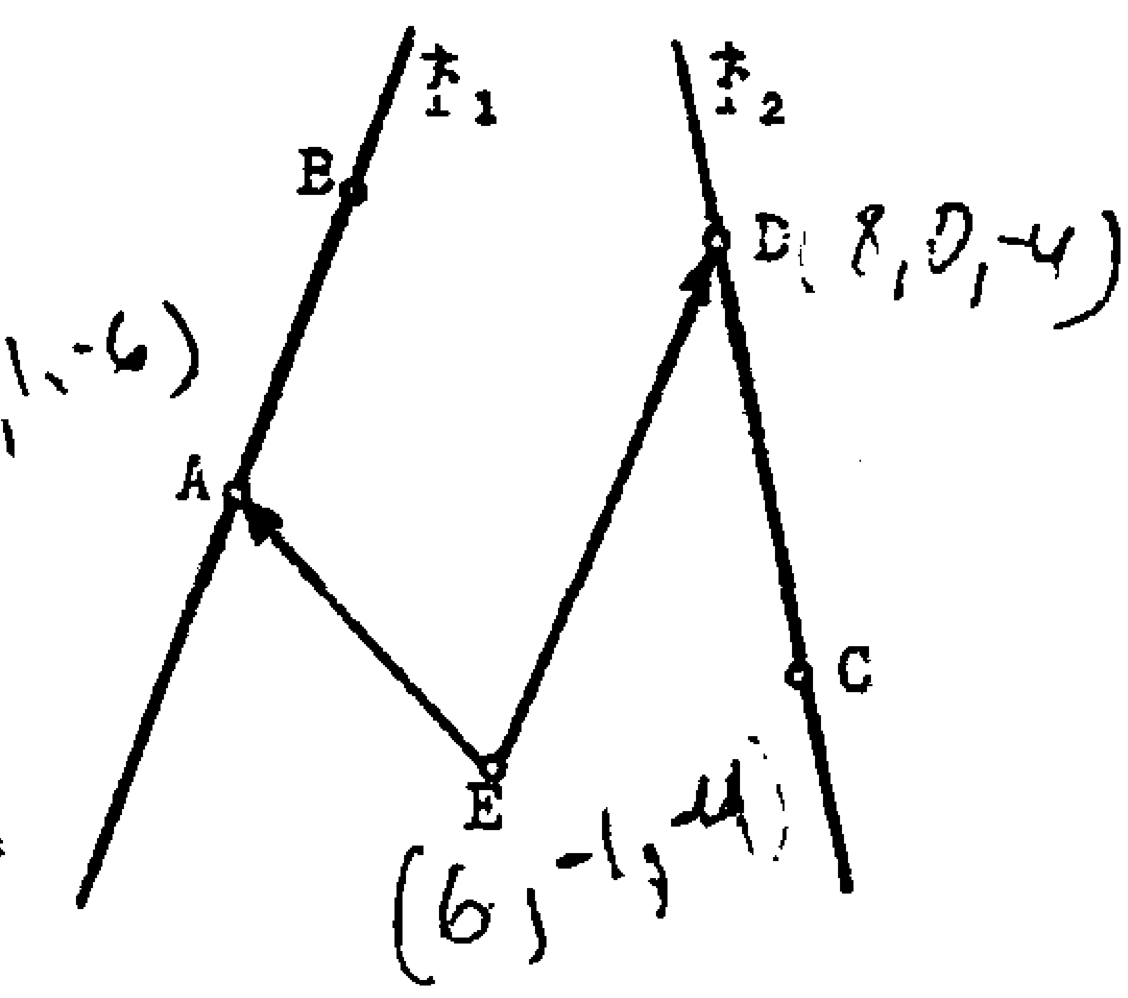
$\overline{CD} = (8,0,-4)-(6,3,2) = (2,-3,-6)$

Luego, si $\vec{F}_1 = r\overline{AB}\ \rightarrow\ r = \dfrac{||\vec{F}_1||}{||AB||} = \dfrac{30}{3} = 10$

$\rightarrow\ \vec{F}_1 = 10(-1,2,2)$

$\vec{F}_2 = t\overline{CD} \rightarrow t = \dfrac{||\vec{F}_2||}{||\overline{CD}||} = \dfrac{56}{7} = 8$

$\rightarrow \vec{F}_2 = 8(2,-3,-6)$



a) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2(3,-2,-14)$

b) El momento resultante de un vector $\vec{v}$ con respecto a un punto E, es otro vector definido por: $\vec{M}=\vec{k}\times\vec{v}$, en donde $\vec{k}$ es un vector dirigido de E a un punto cualquiera de la línea de acción de $\vec{v}$.

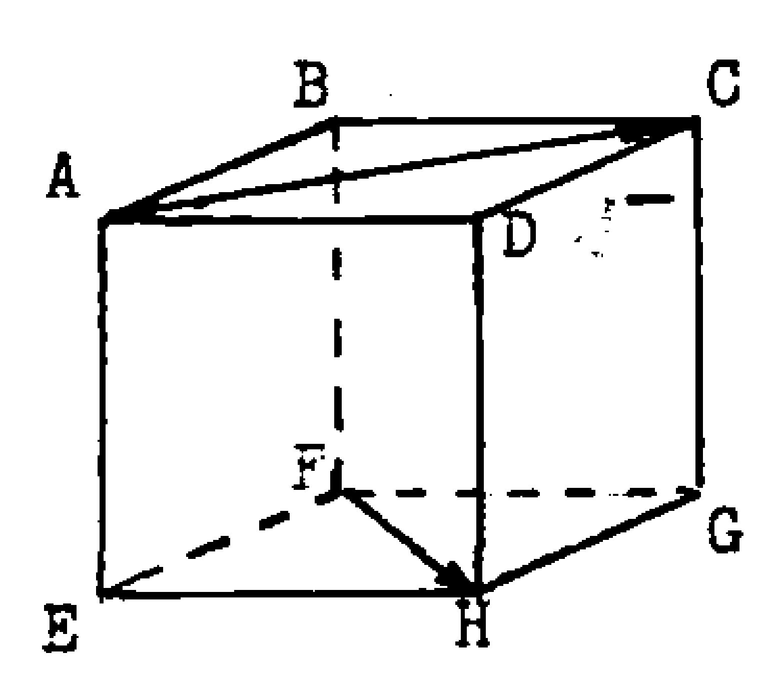
Luego, desde que $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ no son concurrentes, $\vec{M}$ será la suma de dos momentos, esto es: $\vec{M} = \overline{EA}\times\vec{F}_1 + \overline{ED}\times\vec{F}_2$

$\overline{EA}\times\vec{F}_1 = (-1,0,-2)\times 10(-1,2,2) = 10(4,4,-2)$

$\overline{ED}\times\vec{F}_2 = (2,1,0)\times 8(2,-3,-6) = 8(-6,12,-8)$

$\therefore \vec{M} = 4(-2,34,-21)$

EJEMPLO 12. La figura adjunta es un cubo. Si A(3,-1,2), C(4,-1,-5), F(-3,2,1,) y H(4,2,2); hallar las coordenadas de los demás vértices.



Solución. $\overline{AC}=(4,-1,-5)-(3,-1,2)=(1,0,-7)$

$\overline{FH}=(4,2,2)-(-3,2,1)=(7,0,1)$

Entonces: $||\overline{AC}||=||\overline{FH}|| = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$

Luego, cada arista del cubo mide: $\ell = 5\sqrt{2}/\sqrt{2} = 5$

La dirección de las aristas laterales está dada por el vector:

$$\vec{v} = \overline{FH}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = 50(0,1,0)$$

Entonces, un vector unitario, normal a las bases del cubo, es:

$\vec{u} = (0,1,0)$

Por tanto:

$\overline{FB}=5\vec{u} \rightarrow B = F+5\vec{u} = (-3,2,1)+5(0,1,0) = (-3,7,1)$

$\overline{HD}=5\vec{u} \rightarrow D = H+5\vec{u} = (4,2,2) + (0,5,0) = (4,7,2)$

$\overline{EA}=5\vec{u} \rightarrow E = A-5\vec{u} = (3,-1,1)-(0,5,0) = (3,-6,2)$

$\overline{GC}=5\vec{u} \rightarrow G = C-5\vec{u} = (4,-1,-5)-(0,5,0) = (4,-6,-5)$

EJEMPLO 13. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ están sujetos a las relaciones: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{d}$, $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{d}$

Demostrar que los vectores $\vec{a}-\vec{d}$ y $\vec{b}-\vec{c}$ son coplanares.

Demostración. Debemos probar que: $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c}) = \theta$

En efecto:

$$(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}) - \vec{d}\times(\vec{b}-\vec{c}) \qquad (P_1)$$

$$= \vec{a}\times\vec{b} - \vec{a}\times\vec{c} - \vec{d}\times\vec{b} + \vec{d}\times\vec{c} \qquad (P_1)$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b} + \vec{d}\times\vec{c}) - (\vec{a}\times\vec{c} + \vec{d}\times\vec{b})$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b} - \vec{c}\times\vec{d}) - (\vec{a}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{d}) \qquad (P_4)$$

De las relaciones dadas: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{d} \rightarrow \vec{a}\times\vec{b} - \vec{c}\times\vec{d} = \theta$

$\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{d} \rightarrow \vec{a}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{d} = \theta$

Entonces: $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c}) = \theta - \theta = \theta$

Por tanto, $\vec{a}-\vec{d}$ y $\vec{b}-\vec{c}$ son coplanares.

EJEMPLO 14. Hallar la distancia del punto $P(4,6,-4)$ a la recta que pasa por $Q(2,2,1)$ y $R(4,3,-1)$.

Solución. Sean: $\vec{a}=\vec{QP} = (4,6,-4)-(2,2,1) = (2,4,-5)$

$\vec{b}=\vec{QR} = (4,3,-1)-(2,2,1) = (2,1,-2)$

Según (63): $||\vec{b}\times\vec{a}|| = ||\vec{b}||\,||\vec{a}||\text{Sen}\alpha$

Pero: $d=||\vec{a}||\text{Sen}\alpha \rightarrow d = \dfrac{||\vec{b}\times\vec{a}||}{||\vec{b}||}$

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 3(1,2,2)$$

$\rightarrow ||\vec{b}\times\vec{a}|| = 3\sqrt{1+4+4} = 9$, y $||\vec{b}|| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$$\therefore\ d = \frac{9}{3} = 3$$

EJEMPLO 15. Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, tales que: $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{a}$, hallar: $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Solución. Haciendo uso de la propiedad 8 tenemos:

$$[(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}]\vec{a} - [(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}]\vec{c} = \vec{a}$$

Como: $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a} \rightarrow [(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}]\vec{a}-[0] = \vec{a} \rightarrow (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = 1$

Análogamente: $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c}) = [(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}]\vec{b} - [(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b}]\vec{c}$

$$= [1]\vec{b} - [0]\vec{c}$$

$$= \vec{b}$$

EJERCICIOS

1. Simplificar las expresiones:

   a) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c} + (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} + (\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$ Rp. $2\vec{a}\times\vec{b}$

   b) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a}) + (\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b})$ Rp. $\vec{a}\times\vec{c}$

   c) $2\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k}) + 3\vec{j}.(\vec{i}\times\vec{k}) + 4\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j})$ Rp. 3

2. Hallar el área del triángulo que tiene por vértices:

   a) A(1,2,3) , B(2,-1,1) y C(-2,1,-1) Rp. $5\sqrt{3}$ u²

   b) A(2,-1,1) , B(3,2,-1) y C(-1,3,2) Rp. $\frac{3}{2}\sqrt{35}$ u²

3. Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales están contenidas en los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dados:

   a) $\vec{u}=(2,-1,3)$, $\vec{v}=(4,-3,-1)$ Rp. $5\sqrt{3}$ u²

   b) $\vec{u}=(3,4,2)$, $\vec{v}=(1,-2,-6)$ Rp. 15 u²

4. Hallar un vector $\vec{v}$ que sea perpendicular al vector $\vec{a}$ y paralelo al plano determinado por los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

   a) $\vec{a}=(-3,2,5)$, $\vec{b}=(4,2,-1)$, $\vec{c}=(5,-1,1)$ Rp. $\vec{v}=(17,-37,25)$

   b) $\vec{a}=(1,-2,5)$, $\vec{b}=(3,0,-2)$, $\vec{c}=(0,2,1)$ Rp. $\vec{v}=(3,14,5)$

5. Si $||\vec{a}||=||\vec{b}||=5$ y $m(\measuredangle\vec{a},\vec{b})=\pi/4$; calcular el área de un triángulo construido sobre los vectores $\vec{a}-2\vec{b}$ y $3\vec{a}+2\vec{b}$. Rp. $50\sqrt{2}$

6. En un triángulo con los vértices: A(1,-1,2), B(5,-6,2) y C(1,3,-1), hállese la altura $h=||\overline{BD}||$. Rp. 5

7. Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son los vectores $2\vec{u}-\vec{v}$ y $4\vec{u}-5\vec{v}$, donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores unitarios y $m(\measuredangle\vec{u},\vec{v})=\pi/4$. Rp. $(3/2)\sqrt{2}$

8. Hállense las coordenadas del vector $\vec{x}$, si es perpendicular a los vectores $\vec{a}=(4,-2,-3)$ y $\vec{b}=(0,1,3)$, forma con el versor $\vec{j}$ un ángulo obtuso y que $||\vec{x}||=26$. Rp. (-6,-24,8)

9. Hallar las coordenadas del vector $\vec{x}$, si éste es perpendicu-

lar a los vectores $\vec{a}=(2,-3,1)$ y $\vec{b}=(1,-2,3)$ y satisface, además, la condición: $\vec{x}.(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$ Rp. $(7,5,1)$

10. Hallar un vector unitario paralelo al plano XY y perpendicular al vector $\vec{v}=(4,-3,1)$. Rp. $\pm\frac{1}{5}(3,4,0)$

11. Si $\vec{a}=(2,1,-3)$ y $\vec{b}=(1,-2,1)$, hallar un vector de módulo 5 perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Rp. $\pm\frac{5\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$

12. Si $\vec{a}=(3,m,-3)$ y $\vec{b}=(5,-4,1)$, hallar el valor de m de modo que $\vec{b}$ sea perpendicular al vector $(\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{a})$. Rp. m=3

13. Obtener los valores de m y n tales que:
$$(1,2,m)\ (1,n,2) = (3,-3,-1)$$ Rp. m=5/3, n=1/3

14. Determinar el valor de m de modo que los puntos A(2,1,1), B(4,2,3) y C(-2,m/2,3m/2) sean colineales. Rp. m=-2

15. Demostrar que si α es el ángulo que forman los vectores no ortogonales $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces: $\text{Tg}\alpha = \dfrac{||\vec{a}\times\vec{b}||}{\vec{a}.\vec{b}}$

16. Demostrar que: $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2$

17. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$, demostrar que:
$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d})-(\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$ (Identidad de Lagrange

18. Sea $\vec{a}=(2,-1,2)$ y $\vec{c}=(3,4,-1)$. Hallar un vector $\vec{b}$ tal que: $\vec{a}\times\vec{b}=c$ y $\vec{a}.\vec{b}=1$. Rp. $\vec{b}=(1,-1,-1)$

19. Sea $\vec{a}=(3,-1,2)$ y $\vec{c}=(-2,4,5)$. Hallar un vector $\vec{b}$ tal que: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ y $\vec{a}.\vec{b}=5$. Rp. $\vec{b}=(2,1,0)$

20. Demostrar que el área del triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores posición $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es:
$$S = \frac{1}{2}||(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})||$$

21. Demostrar que si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores tridimensionales que tienen el mismo punto inicial, entonces:
$$(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{a})$$

22. Dado tres puntos A, B y C, hallar el vector normal al plano determinado por dichos puntos. Rp. $\vec{n}=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{C}+\vec{C}\times\vec{A}$

23. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, si $||\vec{a}||=\sqrt{3}$ y $||\vec{b}||=\sqrt{12}$, hallar el valor de: $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})$ Rp. 66

24. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que: $||\vec{a}||=3$, $||\vec{b}||=26$ y $||\vec{a}\times\vec{b}||=72$. Hallar $\vec{a}.\vec{b}$. (Usar la igualdad de Lagrange). Rp. ±30

25. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que: $||\vec{a}||=\sqrt{3}/4$, $||\vec{b}||=2$ y $m(\measuredangle\vec{a},\vec{b})=2\pi/3$. Hallar $||(2\vec{a}+3\vec{b})\times(2\vec{a}-5\vec{b})||$. Rp. 12

26. El vector $\vec{v}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}=(1,-2,-3)$ y $\vec{b}=(-2,2,5)$ y forma con el eje Y un ángulo obtuso. Si $||\vec{v}||=84$ hallar las componentes del vector $\vec{v}$. Rp. (8,-2,4)

27. Dados los vectores $\vec{a}=(2,-3,4)$, $\vec{b}=(1,1,-1)$ y $\vec{c}=(2,3,-2)$; hallar el vector $\vec{v}$ sabiendo que es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y que $\vec{v}.\vec{c}=12$. Rp. $\vec{v}=(-2,12,10)$

28. El vector $\vec{v}$ es perpendicular al eje X y al vector $\vec{a}=(5,-2,3)$ y forma un ángulo agudo con el eje Z. Hallar las componentes del vector $\vec{v}$ sabiendo que $||\vec{v}||=\sqrt{117}$. Rp. $\vec{v}=(0,9,6)$

29. Sean dadas tres fuerzas: $\vec{f}_1=(2,-1,-3)$, $\vec{f}_2=(3,2,-1)$ y $\vec{f}_3=(-4,1,3)$ aplicadas al punto A(-1,4,2). Determinar la magnitud y los cosenos directores del momento de la resultante de tales fuerzas respecto del punto B(2,3,-1).

Rp. $\sqrt{66}$, $1/\sqrt{66}$, $-4/\sqrt{66}$, $-7/\sqrt{66}$

30. Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B dados.
   a) P(4,6,-4) , A(2,1,2) , B(3,-1,4) Rp. d=3
   b) P(3,-1,5) , A(3,-2,4) , B(0,4,6) Rp. $d=\sqrt{34}/7$

31. Demostrar las identidades:
   a) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \theta$
   b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{a}\times\vec{c})\times(\vec{d}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{d})\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \theta$
   c) $(a\times b)^2\times(a\times c)^2 - [(a\times b)\times(a\times c)]^2 = a^2(a.b.c)^2$

1.49 PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

Se denomina *producto mixto* de una terna ordenada de vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ al número real $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$.
En vista de que se verifica la identidad $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$; para el producto mixto $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ se emplea la notación abreviada (abc).
De este modo:

$$(abc) = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$$

Si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se dan mediante sus coordenadas:

$$\vec{a} = (a_1,a_2,a_3) \quad , \quad \vec{b} = (b_1,b_2,b_3) \quad , \quad \vec{c} = (c_1,c_2,c_3)$$

el producto mixto (abc) se determina por la fórmula:

$$(abc) = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (65)$$

PROPIEDADES.

(1) La permutación cíclica (sentido horario) de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no cambia la magnitud del producto mixto, es decir:

$$(abc) = (bca) = (cab)$$

Demostración. En efecto:

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (cab)$$

$$(cab) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (bca)$$

$$\therefore \ (abc) = (cab) = (bca)$$

(2) $(abc) = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b}$

(3) Si V es el volumen de un paralelepípedo construido sobre los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, entonces:

$$(abc) = \begin{cases} V \ , & \text{si la terna } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ es derecha} \\ -V, & \text{si la terna } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ es izquierda} \end{cases}$$

(4) Para que tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sean coplanares (linealmente dependientes), es necesario y suficiente que se cumpla:

$$(abc) = 0$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO MIXTO

Sea el paralelepípedo de volumen V, cuyas aristas lo constituyen los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ (Figura 50).

Por geometría elemental sabemos que:

Volumen = (área de la base)(altura)

$$\rightarrow \quad V = (||\vec{b}\times\vec{c}||)(||\vec{h}||) \qquad (1)$$

Pero: $\vec{h} = \text{Proy}_{\vec{n}}\vec{a} \quad \rightarrow \quad ||\vec{h}|| = |\text{Comp}_{\vec{n}}\vec{a}|$

$$\rightarrow \quad ||\vec{h}|| = \frac{|\vec{a}.\vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

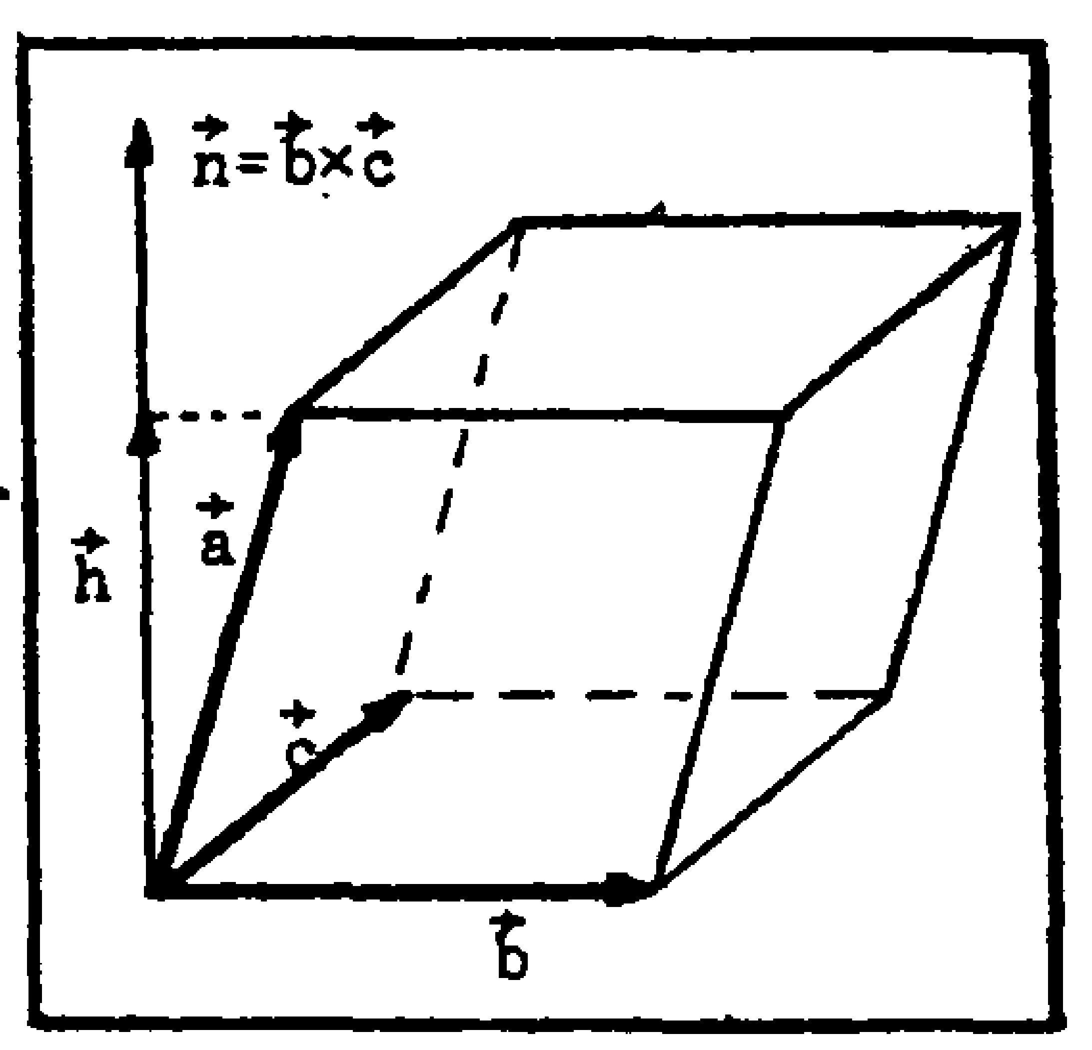


Figura 50

Luego, en (1): $V = (||\vec{b}\times\vec{c}||)\dfrac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{||\vec{b}\times\vec{c}||}$

$$V = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})| = |(abc)|$$

EJEMPLO 1. Se dan los vectores $\vec{a}=(1,-1,3)$, $\vec{b}=(-2,2,1)$ y $\vec{c}=(3,-2,5)$. Calcular (abc) y determinar la orientación de las ternas $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$ y $(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$.

Solución. Según la fórmula (65) tenemos:

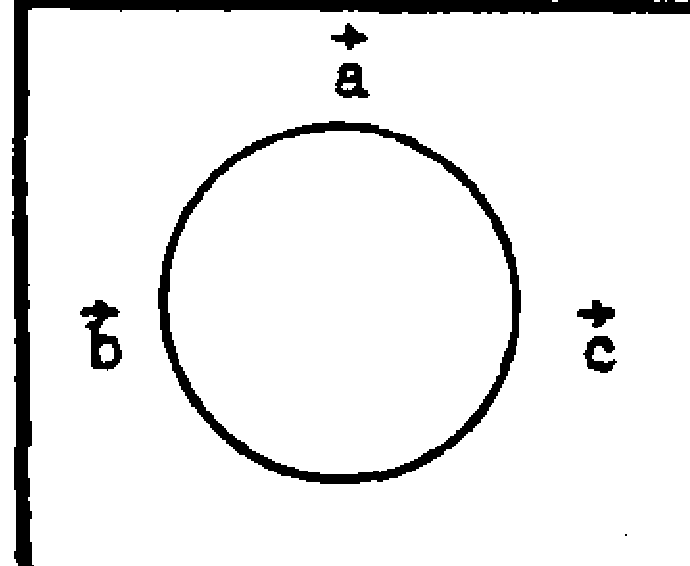
$$(abc) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (10+2) + (-10-3) + 5(4-6)$$

$$= -7$$

Como (abc)<0, la orientación de la terna $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ es izquierda (sentido antihorario).

De la figura deducimos que las orientaciones de las ternas $(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$ y $(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$ son derechas.



Se deja al lector comprobar, mediante la fórmula (65), que:

$$(bac) = (acb) = 7$$

EJEMPLO 2. Establecer si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman una base en el conjunto de todos los vectores, si:

a) $\vec{a}=(2,3,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$, $\vec{c}=(1,9,-11)$

b) $\vec{a}=(3,-2,1)$, $\vec{b}=(2,1,2)$, $\vec{c}=(3,-1,-2)$

Solución. Bastará comprobar si los vectores dados no son coplanares.

$$\text{a)}\quad (abc) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2(11-27) - 3(-11-3) + (-1)(9+1)$$

$$= -32 + 42 - 10 = 0$$

Como (abc)=0, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares, por tanto no pueden formar una base.

$$\text{b)}\quad (abc) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2+2) - (-2)(-4-6) + 1(-2-3)$$

$$= 0 - 20 - 5 = -25$$

Como (abc) $\neq$ 0, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes y, por tanto, susceptibles de formar una base.

EJEMPLO 3. Simplificar la expresión:

$$x = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})$$

Solución. $x = (\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c} + (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}\,]$ $\quad(P_1)$

$= (\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{c}\times\vec{c}) + (\vec{b}\times\vec{a}) + (\vec{c}\times\vec{a})]$ $\quad(P_2)$

$= (\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{b}\times\vec{c}) + \theta + (\vec{b}\times\vec{a}) + (\vec{c}\times\vec{a})]$ $\quad(P_6)$

$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$

Por la Proposición 1.6: $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})=0$

$\rightarrow\ x = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$, pero: (abc) = (bca)

$\therefore\ x = 2\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$

EJEMPLO 4. Demostrar que: $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (abc)^2$

Solución. En efecto, supongamos que:
$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{m}$, $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{n}$, $\vec{c}\times\vec{a} = \vec{r}$

$\rightarrow\ \vec{m}.(\vec{n}\times\vec{r}) = \vec{m}.[\vec{n}\times(\vec{c}\times\vec{a})] = \vec{m}.[(\vec{n}.\vec{a})\vec{c} - (\vec{n}.\vec{c})\vec{a}\,]$ $\quad(P_8)$

$\rightarrow\ \vec{m}.(\vec{n}\times\vec{r}) = \vec{m}.\{[(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}]\ \vec{c} - [(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{c}]\ \vec{a}\}$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{\ [\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{c} - 0\}$ (Prop. 1.6)

$= (\vec{a}\times\vec{b}).[(abc)]\vec{c}$

$= [(abc)][\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})] = (abc)(abc)$

$\therefore\ (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (abc)^2$

EJEMPLO 5. Demostrar que: $|(abc)| \leq ||\vec{a}||.||\vec{b}||.||\vec{c}||$
En qué caso se verificará el signo de igualdad?

Demostración. En efecto: $(abc) = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$
Haciendo uso de la propiedad: $|\vec{a}.\vec{b}| \leq ||\vec{a}||\,||\vec{b}||$
se tiene: $|(abc)| \leq ||\vec{a}||.||\vec{b}\times\vec{c}||$ (1)

Pero, según (63): $||\vec{b}\times\vec{c}|| = ||\vec{b}||.||\vec{c}||\,|\text{Sen}(\sphericalangle\vec{b},\vec{c})|$

Como $|\text{Sen}(\sphericalangle\vec{b},\vec{c})| \leq 1 \rightarrow ||\vec{b}\times\vec{c}|| \leq ||\vec{b}||.||\vec{c}||$

Por tanto, en (1): $|(abc)| \leq ||\vec{a}||.||\vec{b}||.||\vec{c}||$

La igualdad ocurre cuando $\text{Sen}(\sphericalangle\vec{b},\vec{c})=1$, es decir, cuando la medida del ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es de 90°, o sea: $\vec{b}\perp\vec{c}$.

EJEMPLO 6. El vector $\vec{c}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual a 30°. Sabiendo que $||\vec{a}||=6$, $||\vec{b}||=||\vec{c}||=3$, calcular (abc).

Solución. $(abc) = (cab) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) \rightarrow |(abc)| \leq ||\vec{c}||.||\vec{a}\times\vec{b}||$
Dado que: $\vec{c}\perp\vec{b}$ y $\vec{c}\perp\vec{a}$, entonces:

$|(abc)| = ||\vec{c}||.||\vec{a}||.||\vec{b}||\text{Sen}30^\circ$

$= (3)(6)(3)(\frac{1}{2}) = 27$

$\therefore\ (abc) = \pm 27$

EJEMPLO 7. Demostrar que: $\vec{c}.(\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]) = -||\vec{a}||^2(abc)$

Demostración. En efecto: $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}.\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}.\vec{a})\vec{b}$ (P_8)

$\rightarrow\ \vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})] = \vec{a}\times[(\vec{a}.\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}.\vec{a})\vec{b}]$

$= (\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{a}) - ||\vec{a}||^2(\vec{a}\times\vec{b})$ (P_3)

$= 0 - ||\vec{a}||^2(\vec{a}\times\vec{b})$ (P_6)

Por tanto: $\vec{c}.(\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]) = -||\vec{a}||^2\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$

$= -||\vec{a}||^2\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$

$= -||\vec{a}||^2(abc)$

EJEMPLO 8. Dados los vectores no nulos: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{n}\in R^3$; si $\vec{a}.\vec{n}=0$, $\vec{b}.\vec{n}=0$ y $\vec{c}.\vec{n}=0$, demostrar que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes.

Demostración. Bastará probar que $(abc)=0$

En efecto, $(abc) = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ (1)

Dado que: $\vec{b}\perp\vec{n}$ y $\vec{c}\perp\vec{n}$ $\rightarrow$ $(\vec{b}\times\vec{c})||\vec{n}$

$\rightarrow$ $\vec{b}\times\vec{c} = r\vec{n}$

Luego, en (1) se tiene: $(abc) = \vec{a}.(r\vec{n}) = r(\vec{a}.\vec{n})$

$= r(0) = 0$

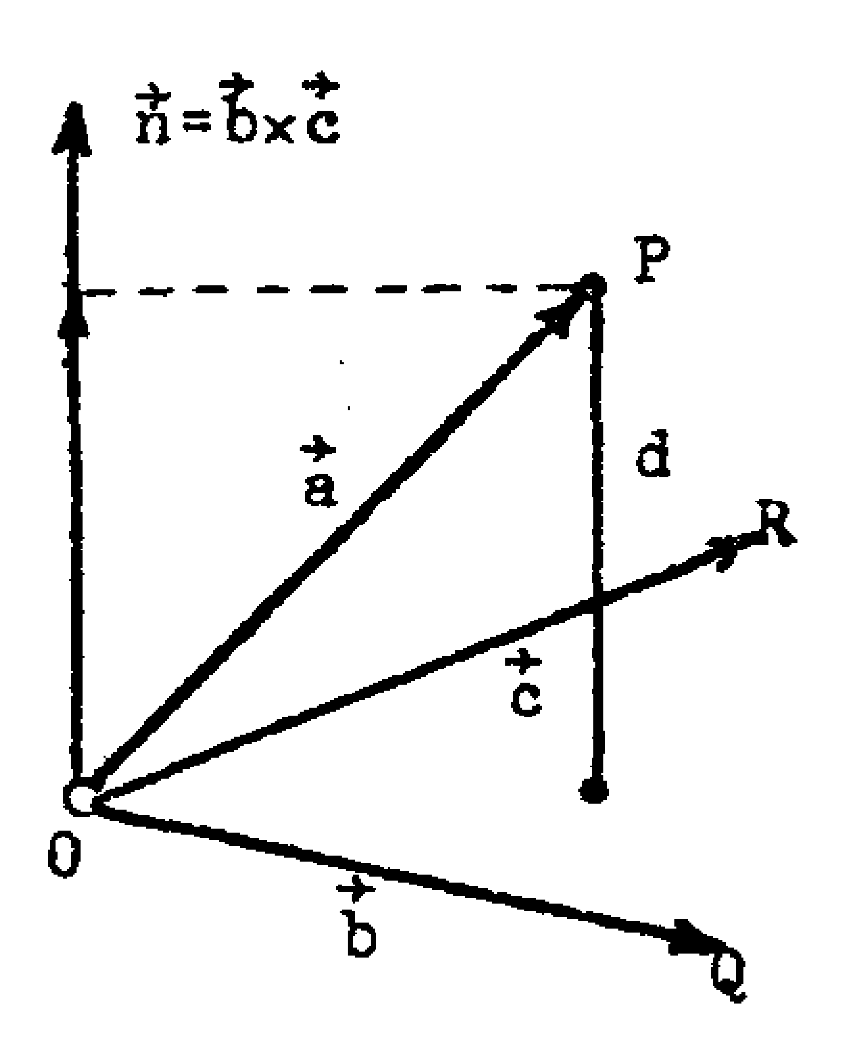
Por consiguiente, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes.

EJEMPLO 9. Los vectores de posición, con respecto al origen, de los puntos P, Q y R son $a=(3,-2,-1)$, $b=(1,3,4)$ y $c=(2,1,-2)$, respectivamente. Hallar la distancia del punto P al plano OQR.

Solución. En la figura vemos que:

$d = ||\text{Proy}_{\vec{n}}\vec{a}|| = |\text{Comp}_{\vec{n}}\vec{a}|$

$\rightarrow d = \dfrac{|\vec{a}.\vec{n}|}{||\vec{n}||} = \dfrac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{||\vec{b}\times\vec{c}||}$ (1)



$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= 5(-2,2,-1)$

$\rightarrow \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = 5(3,-2,-1).(-2,2,-1) = -45$

y $||\vec{b}\times\vec{c}|| = 5\sqrt{4+4+1} = 15$

Por tanto, en (1): $d = \dfrac{|-45|}{15} = 3$

EJEMPLO 10. Hallar el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores: $\vec{a}=(3,-1,1)$, $\vec{b}=(2,3,-2)$ y $\vec{c}=(1,4,3)$.

Solución. Según la interpretación geométrica del producto mixto

se tiene: $V = (abc) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(9+8)+1(6+2)+1(8-3)$

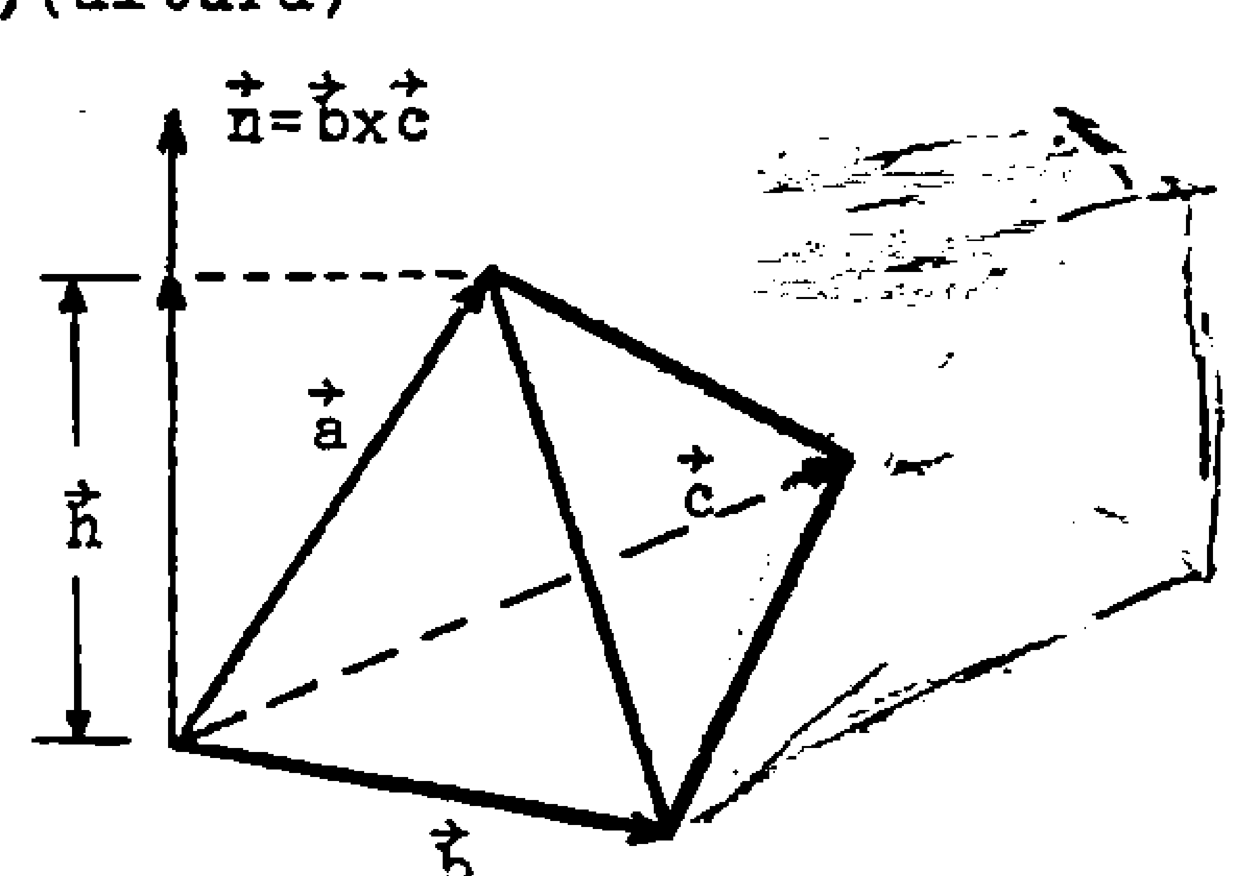
$= 51 + 8 + 5$

$\therefore\ V = 64\ u^3$

EJEMPLO 11. Hallar el volumen del tetraedro cuyas aristas son los vectores $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(-3,0,6)$ y $\vec{c}=(4,5,-1)$.

Solución. Volumen del tetraedro = $\frac{1}{3}$(base)(altura)

$\rightarrow V = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}||\vec{b}\times\vec{c}||)(||\vec{h}||)$



Pero: $||\vec{h}|| = ||Proy_{\vec{n}}\vec{a}|| = |Comp_{\vec{n}}\vec{a}|$

$\rightarrow V = \frac{1}{6}(||\vec{b}\times\vec{c}||)\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{||\vec{b}\times\vec{c}||} = \frac{1}{6}(abc)$

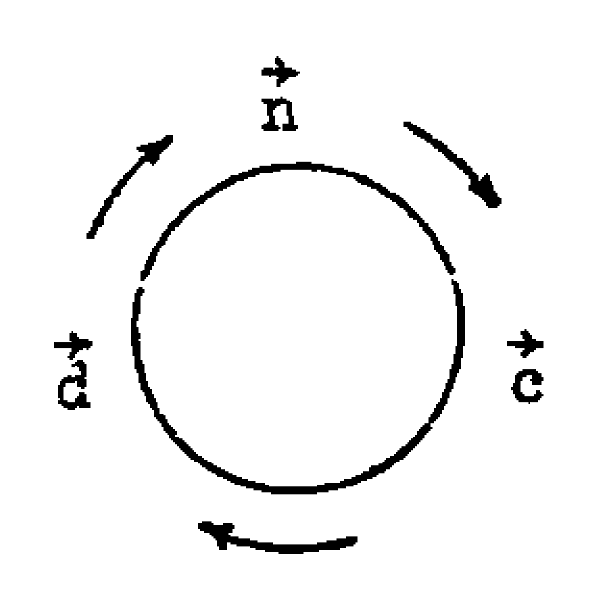
$\rightarrow V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-84|$

$\therefore\ V = 14\ u^3$

EJEMPLO 12. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}\varepsilon R^3$, demostrar que $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d})-(\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$

Demostración. En efecto, supongamos que: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{n}$

$\rightarrow (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{n}.(\vec{c}\times\vec{d})$



Según la permutación cíclica:

$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{d}.(\vec{n}\times\vec{c}) = -\vec{d}.(\vec{c}\times\vec{n})$

$= -\vec{d}.[\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})]$

$= -\vec{d}.[(\vec{c}.\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}.\vec{a})\vec{b}]$

$= -(\vec{d}.\vec{a})(\vec{c}.\vec{b}) + (\vec{c}.\vec{a})(\vec{d}.\vec{b})$

$= (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$

EJEMPLO 13. El volumen de un tetraedro, tres de cuyos vértices están en los puntos A(2,1,-1), B(3,0,1), C(2,-1,3), es $V=5u^3$. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D si se sabe que está en el eje OY.

Solución. Si D está sobre el eje Y $\rightarrow$ D(0,y,0)

Sean: $\vec{a} = \overline{AB} = (3,0,1)-(2,1,-1) = (1,-1,2)$

$\vec{b} = \overline{AC} = (2,-1,3)-(2,1,-1) = (0,-2,4)$

$\vec{c} = \overline{AD} = (0,y,0)-(2,1,-1) = (-2,y-1,1)$

$$\text{Si } V = \frac{1}{6}|(abc)| \rightarrow 5 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow 30 = |1(-2-4y+4)-(-1)(0+8)+2(0-4)|$$

de donde: $|1-2y| = 15 \leftrightarrow 1-2y=15$ ó $1-2y=-15$

$\leftrightarrow y = -7$ ó $y = 8$

Hay dos soluciones: D(0,-7,0) ó D(0,8,0)

EJERCICIOS

1. Establecer si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman una base en el conjunto de todos los vectores, si:

   a) $\vec{a}=(2,3,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$, $\vec{c}=(1,9,-11)$ Rp. No

   b) $\vec{a}=(3,-2,1)$, $\vec{b}=(2,1,2)$, $\vec{c}=(3,-1,-2)$ Rp. Si

2. Demostrar que para cualesquiera $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los vectores $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ y $\vec{c}-\vec{a}$ son coplanares. Cuál es el sentido geométrico de este hecho?

3. Determinar el valor de k de modo que los cuatro puntos dados A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1) y D(k,1,3) estén situados en un plano. Rp. k=2

4. Los vectores de posición, con respecto al origen, de los puntos P, Q y R son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, respectivamente. Hallar la distancia del punto P al plano OQR.

   a) $\vec{a}=(3,4,-4)$, $\vec{b}=(-5,4,-2)$, $\vec{c}=(-6,-7,2)$ Rp. d=6

   b) $\vec{a}=(3,2,4)$, $\vec{b}=(2,1,-2)$, $\vec{c}=(1,3,4)$ Rp. d=2

   c) $\vec{a}=(3,-1,-3)$, $\vec{b}=(1,0,3)$, $\vec{c}=(2,-2,3)$ Rp. d=3

5. Demostrar las identidades:

a) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})\times(4\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}) = 0$

b) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}) = -(abc)$

c) $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}) = 3(abc)$

d) $\forall\alpha,\beta,\ \vec{a}.\vec{b}\times(\vec{c} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = (abc)$

6. Calcular el volumen del tetraedro OABC, si: $\overline{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\overline{OB}=-3\vec{j}+\vec{k}$, $\overline{OC}=2\vec{j}+5\vec{k}$. Rp. $V=8.5u^3$

7. Calcular el volumen del tetraedro con los vértices situados en los puntos A(2,-3,5), B(0,2,1), C(-2,-2,3) y D(3,2,4). Rp. $V=6u^3$

8. En un tetraedro con los vértices situados en los puntos: A(1,1,1), B(2,0,2), C(2,2,2) y D(3,4,-3), hallar la altura $h=||\overline{DE}||$. Rp. $h=3\sqrt{2}$

9. Dados los vértices de un tetraedro: A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7) y D(-5,-4,8), hallar la longitud de su altura bajada desde el vértice D. Rp. h=11

10. Dados los vértices de un tetraedro: A(2,-1,1), B(5,5,4), C(m,2,-1) y D(4,1,m); hallar el valor de m sabiendo que su volumen es de $3u^3$. Rp. m=3 ó m=5/2

11. Si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son las aristas de un paralelepípedo, hallar su volumen, si $\vec{a}=6\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=(4,-2,1)$ y $\vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$. Rp. $V=80u^3$

12. Dados los puntos P(2,1,3), Q(1,2,1), R(-1,-2,-2) y S(1,-4,0) hallar la mínima distancia entre las rectas PQ y RS. Rp. $d=3\sqrt{2}$ u

13. Si en los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se verifica la ley asociativa para el producto vectorial, demostrar que los vectores $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}$ y $\vec{b}\times\vec{c}$ son linealmente dependientes.

14. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A(1,0,1), B(3,1,0), C(-1,0,-5) y D(-1,-1,-10). Rp. $4u^3$

1.52 RECTAS EN EL ESPACIO

Sea L una recta en R^3 tal que contiene un punto dado $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y que es paralela a las representaciones de un vector dado $\vec{a}=(a,b,c)$. (Figura 51). Entonces la recta L es el conjunto de puntos P(x,y,z) tales que P_1P es paralelo al vector $\vec{a}$. Esto es,

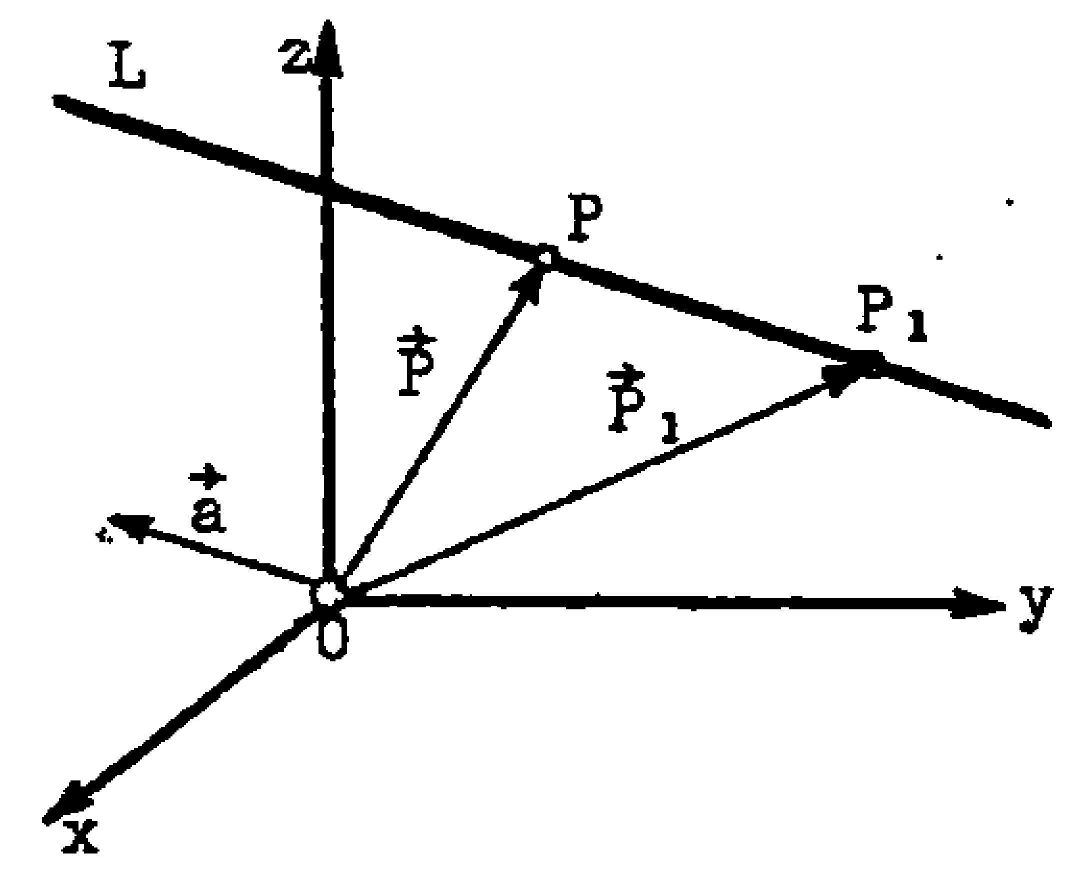


Figura 51

$$P\varepsilon L \leftrightarrow \overline{P_1P} = t\vec{a}$$
$$\leftrightarrow \vec{P}-\vec{P}_1 = t\vec{a}$$
$$\leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + t\vec{a} \text{ , } t\varepsilon R \qquad (66)$$

es una ecuación paramétrica vectorial de L. Entonces L se puede escribir como:

$$L = \{\vec{P}\varepsilon R^3 / \ \vec{P}=\vec{P}_1+t\vec{a}, \ t\varepsilon R\}$$

EJEMPLO 1. Hallar la ecuación paramétrica vectorial de la recta L que pasa por los puntos S(2,3,-1) y T(5,-3,1).

Solución. Un vector coincidente con ST es:

$$\vec{a} = ST = (5,-3,1)-(2,3,-1) = (3,-6,2)$$

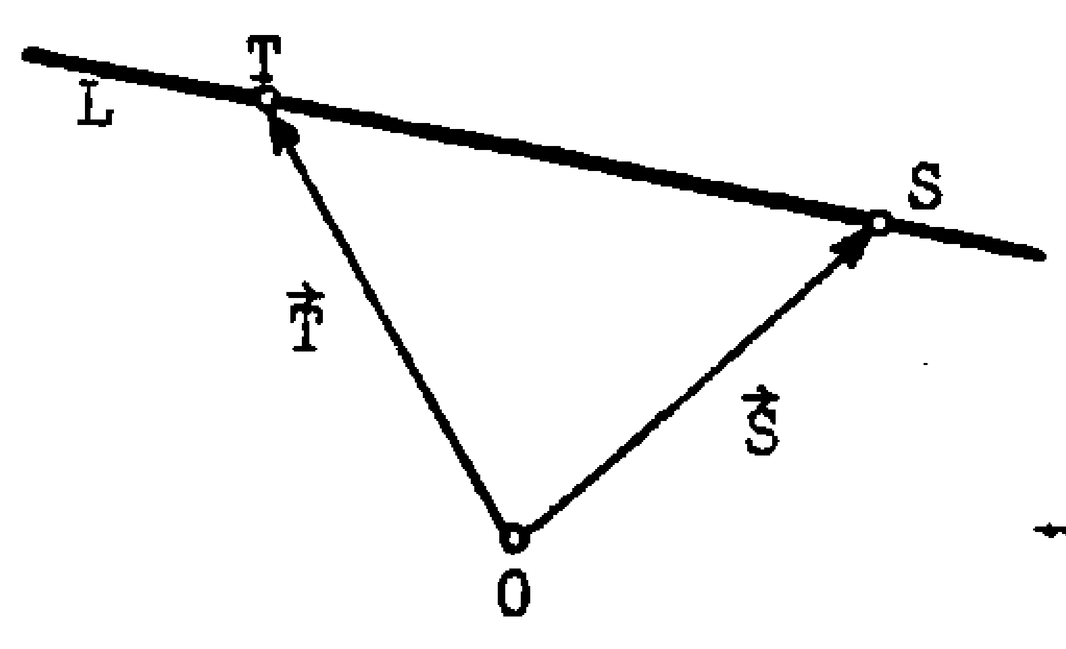
Como S está sobre la recta L, entonces según (66), su ecuación paramétrica vectorial es:

$$L:P=(2,3,-1)+t(3,-6,2), \ t\varepsilon R$$

Obsevación. Tal como en el caso de vectores en R^2, si se restringe el dominio de t, en la ecuación (66), a un intervalo cerrado, entonces la gráfica de la ecuación es un *segmento de recta*.

En particular, si $0\leq t\leq 1$, entonces la gráfica es el segmento $\overline{ST}$.

Se puede identificar a los puntos que están a una distancia dada de S sobre T eligiendo aproximadamente el parámetro t.



EJEMPLO 2. Obtener las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento de extremos S(-6,1,5) y T(3,13,-1).

Solución. El vector de dirección de la recta que pasa por S y T es: $\vec{a} = \vec{T}-\vec{S} = (3,13,-1)-(-6,1,5) = (9,12,-6)$

Luego, la ecuación paramétrica vectorial del segmento $\overline{ST}$ es:

$$\overline{ST}: P=(-6,1,3)+t(9,12,-6),\ t\varepsilon|0,1|$$

Para obtener los puntos de trisección B y C hacemos: t=1/3 y t= 2/3.

Para t=1/3 → $B = (-6,1,3) + \frac{1}{3}(9,12,-6) = (-3,5,3)$

Para t=2/3 → $C = (-6,1,3) + \frac{2}{3}(9,12,-6) = (0,9,1)$

(2) Si en la ecuación (66) escribimos los vectores $\vec{P}$, $\vec{P}_1$ y $\vec{a}$ en función de sus componentes, entonces:

$$(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + t(a,b,c)$$

o bien:

$$(x,y,z) = (x_1+ta\ ,\ y_1+tb\ ,\ z_1+tc)$$

que equivale a las tres ecuaciones cartesianas:

$$x = x_1+ta\ ,\quad y = y_1+tb\ ,\quad z = z_1+tc$$

Estas tres ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* cartesianas de la recta L.
Si despejamos t en cada una de estas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \qquad (67)$$

Las ecuaciones (67) reciben el nombre de *ecuaciones simétricas* de la recta L. Los términos a, b y c son los números directores de L, ya que son las componentes de un vector de dirección de L. Si una recta es paralela a un plano, entonces uno de sus números dierectores es 0. Por lo tanto, no tiene ecuaciones simétricas de la forma (67), puesto que uno de los denominadores sería cero. Por ejemplo, si una recta L es paralela al plano XY, pero no a los ejes X e Y (Figura 52), entonces tiene un vector direccional de la forma (a,b,0), donde a≠0 y b≠0. Aunque L no tiene ecuaciones de la forma (67), si contiene al punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ se puede

determinar mediante las ecuaciones:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} \ , \ z=z_1$$

Si una recta es paralela a uno de los ejes coordenados, entonces dos de sus números directores son 0, y en lugar de las ecuaciones simétricas se tiene simplemente las ecuaciones que expresan las dos coordenadas constantes de cada punto sobre la recta. Así si la recta L, que es paralela al eje Z, pasa por $P_1(x_1,y_1,z_1)$ queda especificada por las ecuaciones:

$$x=x_1 \ , \ y=y_1$$

La recta L interseca al plano XY en el punto $S(x_1,y_1,0)$ como se indica en la Figura 53.

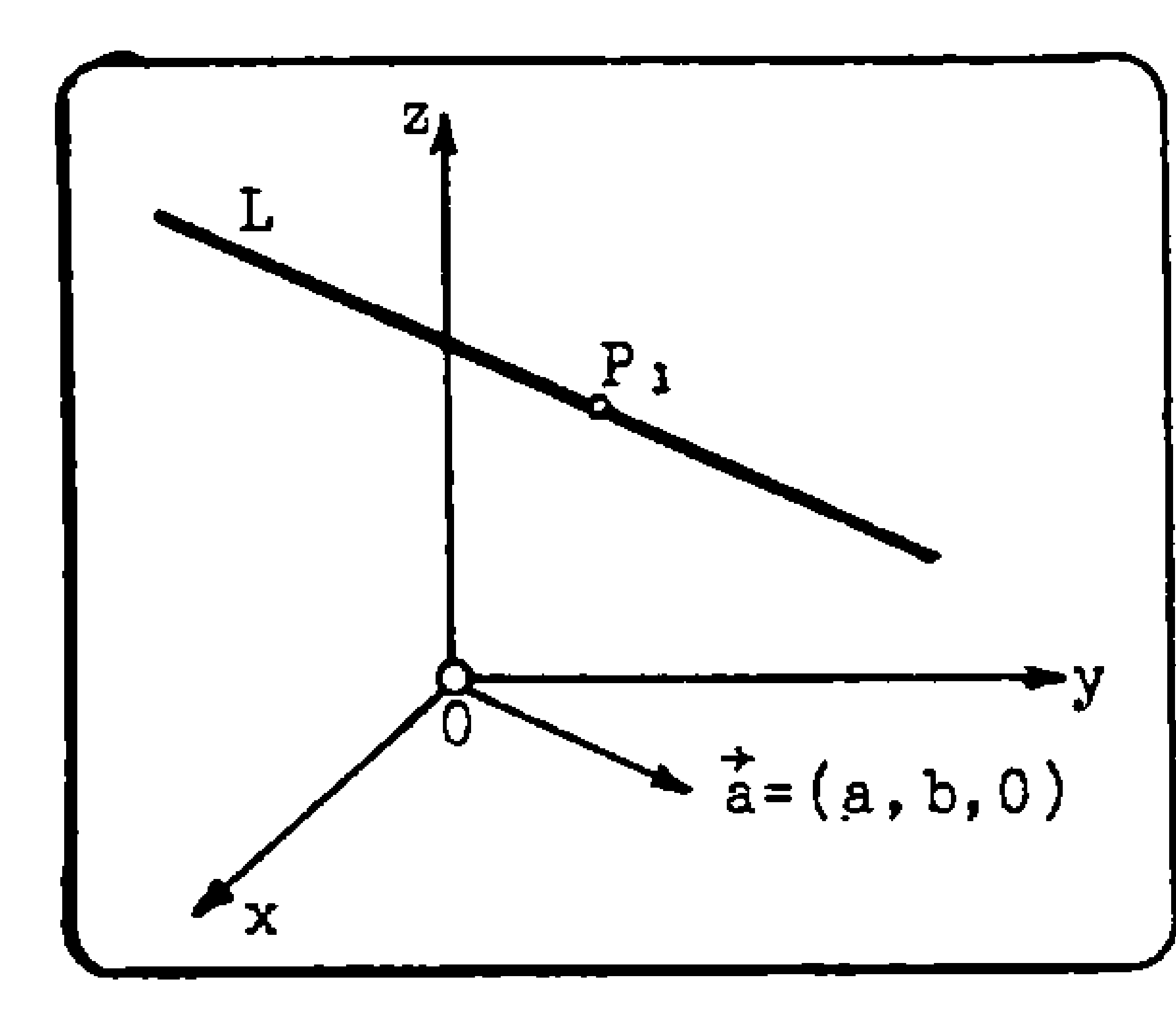


Figura 52

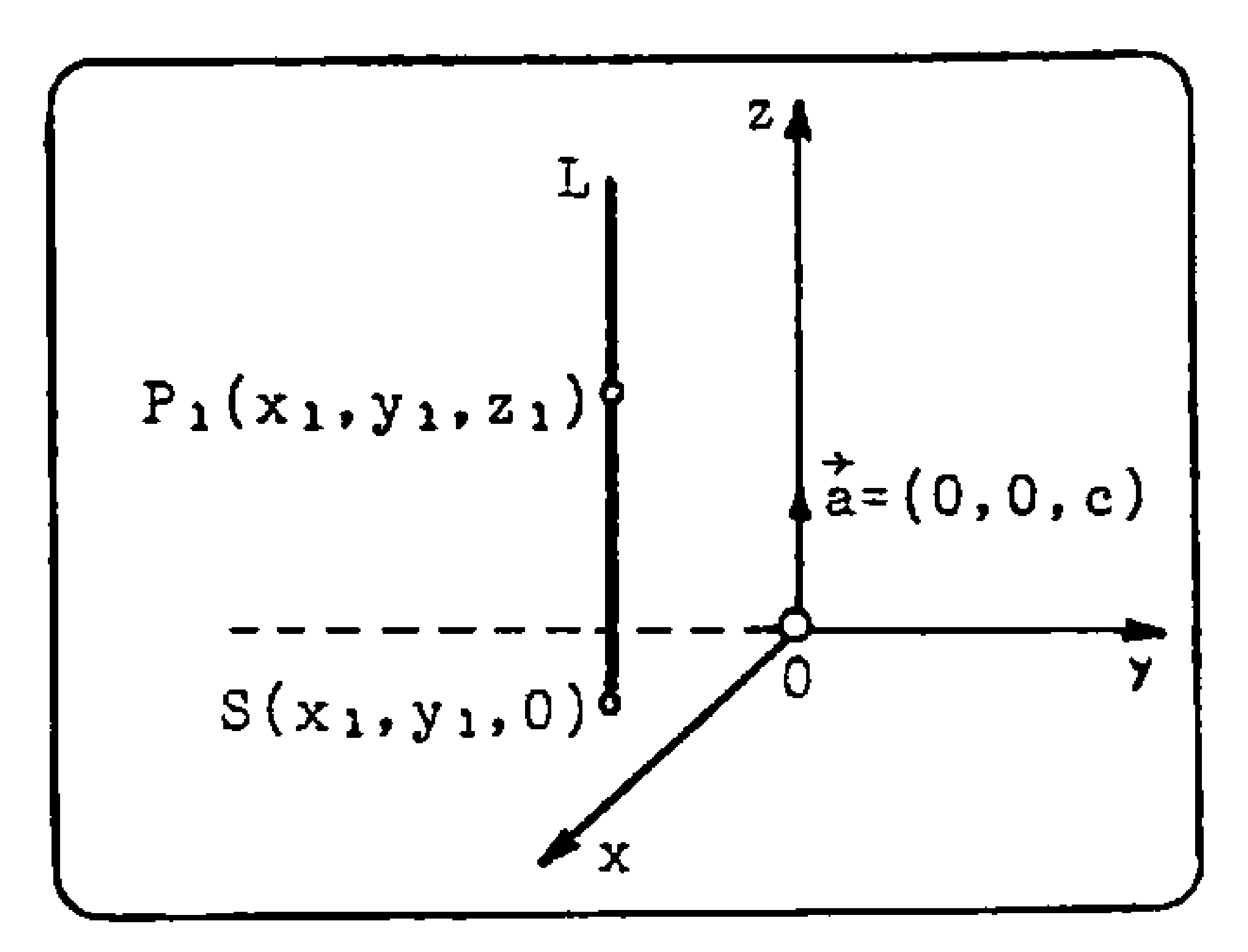


Figura 53

EJEMPLO 3. Hallar la ecuación simétrica de la recta L que pasa por los puntos S(2,1,-4) y T(5,3,-1).

Solución. El vector de dirección de la recta L es:

$\vec{a} = \overline{ST} = (5,3,-1)-(2,1,-4) = (3,2,3)$

Como $S\epsilon L$, entonces la ecuación simétrica de la recta es:

$$L: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{3}$$

EJEMPLO 4. Hallar la ecuación simétrica de la recta L que pasa por S(1,-3,4) y es paralela a la recta $L_1=\{(-3,7,5)+t(2,-1,0)/t\epsilon R\}$.

Solución. Los números directores de L_1 son: a=2, b=-1 y c=0.

Entonces, según (67), la ecuación de la recta buscada es:

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} \;,\; z=4$$

1.53 POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS EN EL ESPACIO

DEFINICION 13. Paralelismo de Rectas.

Dos rectas $L_1=\{P=P_1+t\vec{a}/t\varepsilon R\}$ y $L_2=\{P=Q_1+r\vec{b}/r\varepsilon R\}$, se dice que son paralelas si los vectores de dirección $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos. Esto es:

$$L_1||L_2 \;\leftrightarrow\; \vec{a}||\vec{b}$$

Observación 1. Si dos rectas L_1 y L_2 en el espacio son paralelas, entonces, o son coincidentes ($L_1=L_2$) o no se interceptan ($L_1 \cap L_2 = \phi$).

EJEMPLO 5. Dadas las rectas $L_1=\{(2,-1,2)+t(2,1,-3)\}$, $L_2=\{(0,2,3)+s(-4,-2,6)\}$ y $L_3=\{(6,1,-4)+r(6,3,-9)\}$. Establecer si son paralelas o coincidentes.

Solución. Los vectores de dirección de las rectas dadas son:
$\vec{a}_1=(2,1,-3)$, $\vec{a}_2=-2(2,1,-3)$, $\vec{a}_3=3(2,1,-3)$

Por simple inspección: $\vec{a}_1||\vec{a}_2||\vec{a}_3 \;\rightarrow\; L_1||L_2||L_3$
Veamos si $P_2(0,2,3)\varepsilon L_2$ pertenece también a L_1. Para ello trazamos el vector $\vec{v}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=(0,2,3)-(2,-1,2)=(-2,3,1) \neq (2,1,-3)$
Luego, $\vec{v}\not\parallel\vec{a}_1$, o sea $P_2\notin L_1$, por tanto, L_1 y L_2 no son coincidentes ($L_1 \cap L_2 = \phi$).
Veamos ahora si $P_3\varepsilon L_3$ pertenece también a L_1.
Trazamos el vector: $\vec{v}=\vec{P}_3-\vec{P}_1=(6,1,-4)-(2,-1,2)=2(2,1,-3)$
Como $\vec{v}||\vec{a}_1 \;\rightarrow\; L_1$ y L_3 son rectas coincidentes, es decir: $L_1=L_3$ y $L_1 \cap L_3=\{P_3\}$.

Observación 2. Si dos rectas L_1 y L_2 en el espacio no son paralelas entonces, o son concurrentes ($L_1 \cap L_2 \neq \phi$) o se cruzan en el espacio ($L_1 \cap L_2=\phi$)

Dadas las rectas no paralelas: $L_1=\{P_1+t\vec{a}/t\varepsilon R\}$ y $L_2=\{Q_1+s\vec{b}/s\varepsilon R\}$ y trazado el vector $\vec{c}=\vec{Q}_1-\vec{P}_1$, entonces para reconocer si estas rectas son concurrentes o se cruzan en el espacio, se sigue el si-

guiente criterio:

a) L_1 y L_2 son concurrentes $\leftrightarrow$ (abc) = 0

b) L_1 y L_2 se cruzan en el espacio $\leftrightarrow$ (abc) $\neq$ 0

EOEMPLO 6. Dadas las rectas $L_1: \frac{x+4}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-1}$, $L_2=\{(-3,-2,6)+t(2,3,-4)\}$ y $L_3: x=s+5,\ y=-4s-1,\ z=s-4$; establecer cuales son concurrentes o cuales se cruzan en el espacio. En el caso de que sean concurrentes, hallar el punto de intersección.

Solución. Tenemos: $L_1=\{(-4,0,3)+r(1,3,-1)\}$
$L_3=(5,-1,-4)+s(1,-4,1)\}$

Para L_1 y L_2: $\vec{a}_1=(1,3,-1)$, $\vec{a}_2=(2,3,-4)$
$\vec{c}_1=\vec{P}_2-\vec{P}_1=(-3,-2,6)-(-4,0,3)=(1,-2,3)$

$$\rightarrow\ (\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{c}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

Luego, L_1 y L_2 se cruzan en el espacio.

Para L_1 y L_3: $\vec{a}_1=(1,3,-1)$ y $\vec{a}_3=(1,-4,1)$
$\vec{c}_2 = \vec{P}_3-\vec{P}_1 = (5,-1,-4)-(-4,0,3) = (9,-1,-7)$

$$\rightarrow\ (\vec{a}_1\vec{a}_3\vec{c}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 9 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 42 \neq 0$$

Luego, L_1 y L_3 se cruzan en el espacio.

Para L_2 y L_3: $\vec{a}_2=(2,3,-4)$ y $\vec{a}_3=(1,-4,1)$
$\vec{c}_3 = \vec{P}_3-\vec{P}_2 = (5,-1,-4)-(-3,-2,6) = (8,1,-10)$

$$\rightarrow\ (\vec{a}_2\vec{a}_3\vec{c}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

Luego, L_2 y L_3 son rectas concurrentes.

Si $P\epsilon(L_2 \cap L_3)$ $\rightarrow$ $\exists t,s\epsilon R$ tales que:

$(x,y,z) = (-3,-2,6)+t(2,3,-4) = (5,-1,-4)+s(1,-4,1)$

o sea: $(2t-s,3t+4s-4t-s) = (8,1,-10) \leftrightarrow \begin{cases} 2t-s = 8 \\ 3t+4s = 1 \\ 4t+s = 10 \end{cases}$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones obtenemos: t=3 y s=-2

Luego: $(x,y,z) = (-3,-2,6)+2(2,3,-4) \rightarrow P(3,7,-6)$

DEFINICION 14. Perpendicularidad de Rectas.

Dos rectas $L_1=\{P_1=t\vec{a}\}$ y $L_2=\{Q_1+s\vec{b}\}$ se dicen que son perpendiculares si lo son sus vectores de dirección, est es:

$$L_1 \perp L_2 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

EJEMPLO 7. Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto $P_1(3,1,2)$ y es perpendicular a la rectas $L_1=\{(1,0,2)+r(1,-2,2)\}$ y $L_2=\{(2,6,-3)+r(3,0,-1)\}$.

Solución. Sean: $\vec{a}_1=(1,-2,2)$ y $\vec{a}_2=(3,0,-1)$

Dado que: $L \perp L_1 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{a}_1$ y $L \perp L_2 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{a}_2$

Entonces, por definición de producto vectorial, el vector a será perpendicular al plano formado por $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$.

$$\rightarrow \vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}$$

Luego, la ecuación buscada es: $L:P=(3,1,2)+t(2,7,-6),\ t\varepsilon R$

EJEMPLO 8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $S(2,-1,1)$ y es perpendicular en el punto de intersección con la recta $L_1=\{(1,-3,2)+r(2,0,-1), r\varepsilon R\}$.

Solución. Sea $\{P_1\}\varepsilon(L \cap L_2)$ y $\vec{a}_1=(2,0,-1)$

Si $P_1 \varepsilon L_1 \rightarrow P_1=(1+2r,-3,2-r)$

El vector de dirección de L es:

$$\vec{a} = t\overline{SP_1} \qquad (1)$$

L

S

L_1

$\vec{a}_1$

P_1

(1,-3,2)

Pero: $\overline{SP_1} = (1+2r,-3,2-r)-(2,-1,1)$

$= (2r-1,-2,1-r)$

Si $L \cap L_1 \rightarrow \overline{SP_1}.\vec{a}_1 = 0$

$\rightarrow (2r-1,-2,1-r).(2,0,-1)=0$, de donde: $r=3/5$

Luego: $\overline{SP_1} = (\frac{6}{5}-1\ ,\ -2\ ,\ 1-\frac{3}{5}) = \frac{1}{5}(1,-10,2)$

Entonces en (1): $\vec{a} = \frac{t}{5}(1,-10,2) \rightarrow L=\{(2,-1,1)+s(1,-10,2)/s\varepsilon R\}$

EJEMPLO 9. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $S(1,-4,6)$ y es perpendicular, en el espacio, a la línea recta $L_1=\{(3,2,-1)+r(1,-1,2)/r\varepsilon R\}$.

Solución. Sean $P_1(3,2,-1)$, $\vec{a}_1=(1,-1,2)$ y $\vec{v}=\overline{SP_1}$

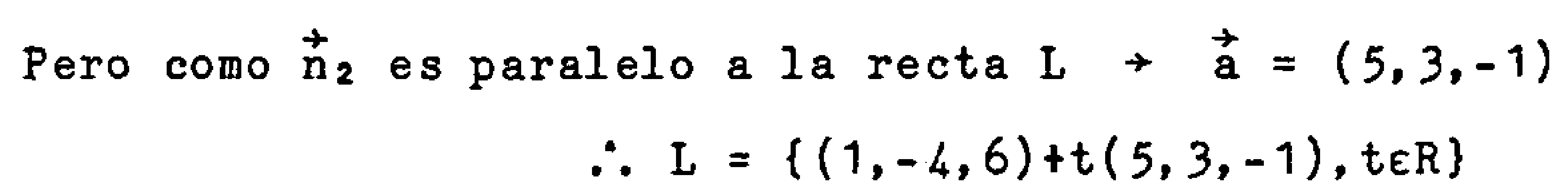
$\rightarrow \vec{v} = (3,2,-1)-(1,-4,6) = (2,6,-7)$

Un vector perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}_1$ es:

$$\vec{n}_1 = \vec{v}\times\vec{a}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5,-11,-8)$$

Un vector perpendicular al plano formado por $\vec{a}_1$ y $\vec{n}_1$ es:

$$\vec{n}_2 = \vec{a}_1\times\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -11 & -8 \end{vmatrix} = 6(5,3,-1)$$



Pero como $\vec{n}_2$ es paralelo a la recta L $\rightarrow$ $\vec{a} = (5,3,-1)$

$$\therefore\ L = \{(1,-4,6)+t(5,3,-1),\ t\varepsilon R\}$$

EJEMPLO 10. Hallar la ecuación de la recta L que pasa por la intersección de las rectas $L_1=\{(5,-3,1)+t(3,-4,7)/t\varepsilon R\}$ y $L_2=\{(4,2,-5)+r(2,1,-3)/r\varepsilon R\}$ y es perpendicular al plano formado por L_1 y L_2 .

Solución. Si $P_1\varepsilon(L_1\cap L_2)$ $\rightarrow$ $\exists t,r\varepsilon R$ tales que:

$$(x_1,y_1,z_1) = (5,-3,1)+t(3,-4,7) = (4,2,-9)+r(2,1,-3)$$

o sea: $(3t-2r,-4t-r,7t+3r) = (-1,5,-10)$ $\leftrightarrow$ $\begin{cases} 3t-2r = -1 \\ -4t-r = 5 \\ 7t+3r = -10 \end{cases}$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones obtenemos: $t = r = -1$

Entonces: $P_1 = (5,-3,1)-(3,-4,7) = (2,1,-6)$

Si $\vec{a}$ es el vector de dirección de L $\rightarrow$ $\vec{a} = \vec{a}_1\times\vec{a}_2$

$$\rightarrow \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (5,23,11) \qquad \therefore\ L=\{(2,1,-6)+s(5,23,11)/s\varepsilon R\}$$

EJEMPLO 11. Sean las rectas $L_1=\{(3,4,0)+r(1,2,-1)/r\epsilon R\}$ y $L_2=\{(1,1,1)+s(1,0,2)/s\epsilon R\}$. Hallar la ecuación de una recta que corta a L_1 en A, a L_2 en B y al eje X en C, de modo q' $\overline{AB}=\overline{BC}$.

Solución. Si $A\epsilon L_1 \rightarrow A(3+r,4+r,-r)$

$B\epsilon L_2 \rightarrow B(1+s,1,1+2s)$

$C\epsilon(\text{Eje X}) \rightarrow C(x,0,0)$

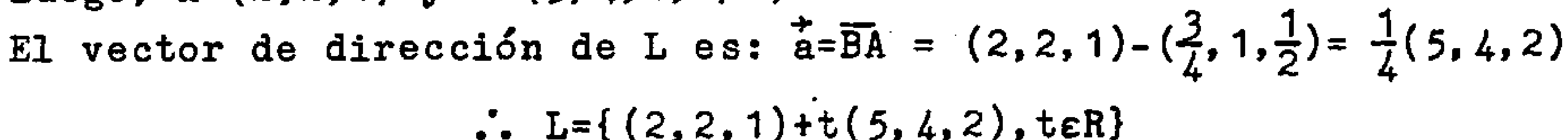
Dado que: $\overline{AB}=\overline{BC} \rightarrow$ B es punto medio de $\overline{AC}$

o sea: $3+r+x = 2(1+s) \rightarrow r-2s+x = -1$

$4+2r+0 = 2(1) \rightarrow r = -1$

$-r+0 = 2(1+2s) \rightarrow s = -1/4$

Luego, $A=(2,2,1)$ y $B=(3/4,1,1/2)$



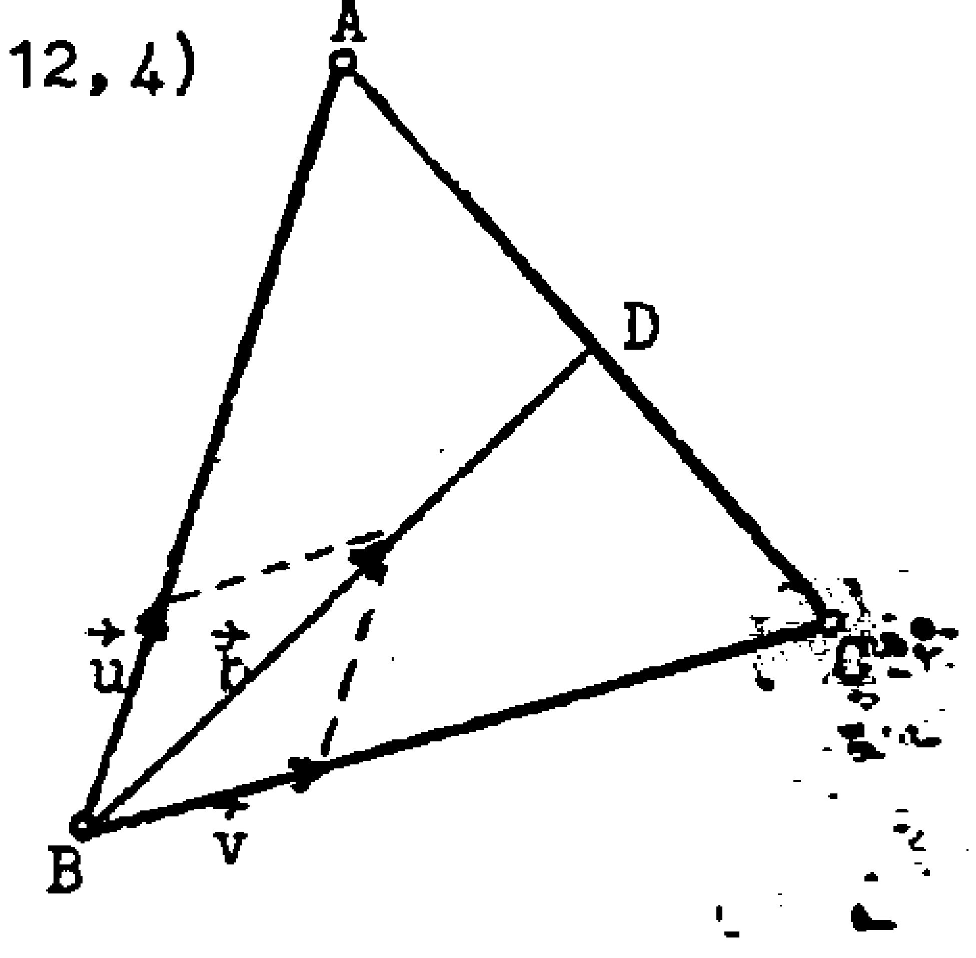
El vector de dirección de L es: $\vec{a}=\overline{BA} = (2,2,1)-(\frac{3}{4},1,\frac{1}{2})= \frac{1}{4}(5,4,2)$

$\therefore\ L=\{(2,2,1)+t(5,4,2),t\epsilon R\}$

EJEMPLO 12. Dados los vértices de un triángulo A(3,-1,-1), B(1,2,-7) y C(-5,14,-3). Hallar las ecuaciones simétricas de la bisectriz del ángulo interno del vértice B.

Solución. $\overline{BA} = (3,-1,-1)-(1,2,-7) = (2,-3,6)$

$\overline{BC} = (-5,14,-3)-(1,2,-7) = (-6,12,4)$



Los vectores unitarios en las direcciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ son, respectivamente:

$$\vec{u} = \frac{(2,-3,6)}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{(2,-3,6)}{7}$$

$$\vec{v} = \frac{(-6,12,4)}{\sqrt{36+144+16}} = \frac{(-3,6,2)}{7}$$

Entonces, un vector en la dirección de la bisectriz $\overline{BD}$ es: $\vec{b} = \vec{u}+\vec{v} = -\frac{1}{7}(1,-3,-8)$

Luego, los números directores de la bisectriz $\overline{BD}$ son: 1,-3 y -8

Si B(1,2,-7) pertenece a la bisectriz, entonces sus ecuaciones simétricas son: $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$

EJEMPLO 13. Una recta L_1 pasa por los puntos A(2,1,1) y B(6,4,1) y otra recta L_2 pasa por C(1,3,-1) y D(3,0,5). Si L es una recta que pasa por P(1,3,-1) formando un mismo ángulo con

L_1 y L_2 tal que los vectores de dirección de las rectas L, L_1 y L_2 son linealmente dependientes, hallar la ecuación de L.

Solución. Las direcciones de las rectas L_1 y L_2 son:

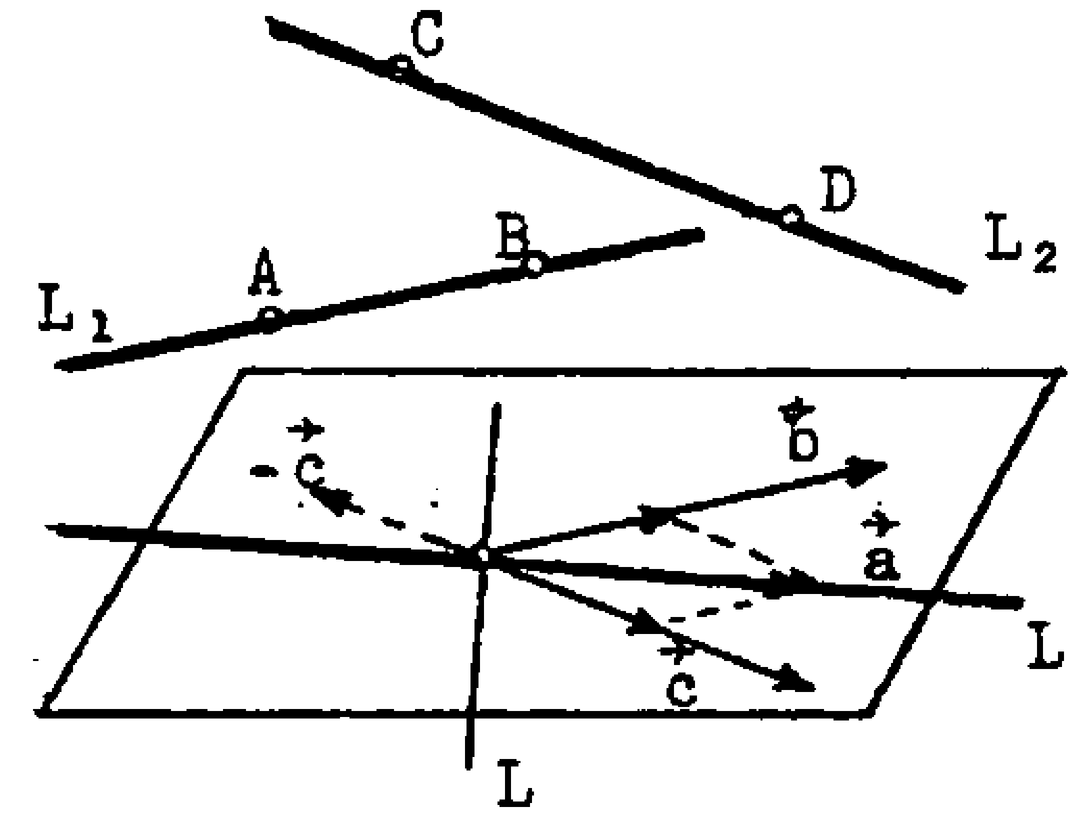
$\vec{b} = \overline{AB} = (6,4,1)-(2,1,1) = (4,3,0)$

$\vec{c} = \overline{CD} = (3,0,5)-(1,3,-1) = (2,-3,6)$

Entonces: $L_1=\{(2,1,1)+r(4,3,0)\}$ y $L_2=\{(1,3,-1)+s(2,-3,6)\}$

Como $L_1 \nparallel L_2$, veamos si son concurrentes o se cruzan en el espacio. Sea: $\vec{d}=\overline{AC} = (1,3,-1)-(2,1,1) = (-1,2,-2)$

$$\rightarrow \quad (bcd) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \text{ , luego, } L_1 \text{ y } L_2 \text{ se cruzan.}$$



Dado que los vectores de dirección de L, L_1 y L_2 son coplanares (linealmente dependientes), trazamos éstos sobre un plano de modo que sus puntos iniciales coincidan con P. Además como L forma ángulos iguales con L_1 y L_2, su vector de dirección es bisectriz del ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$ o entre $\vec{b}$ y $-\vec{c}$.

$$\rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} + \frac{\vec{c}}{||\vec{c}||} = \frac{(4,3,0)}{5} + \frac{(2,-3,6)}{7} = \frac{2}{35}(19,3,-15)$$

$$\text{ó} \quad \vec{a} = \frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} - \frac{\vec{c}}{||\vec{c}||} = \frac{(4,3,0)}{5} - \frac{(2,-3,6)}{7} = \frac{2}{35}(7,18,15)$$

$\therefore$ $L=\{(1,3,-1)+t(19,3,-15), t\in R\}$ ó $L=\{(1,3,-1)+t(7,18,15)\}$

1.54 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La distancia de un punto a una recta en el espacio se define como la longitud del segmento perpendicular a la recta que va de la recta al punto.

Sea la recta L de ecuación:

$L = \{P=T+t\vec{a}, \ t\in R\}$

Obsérvese en la Figura 54 que la

$d(S,T) = ||\vec{S}-\vec{T}|| = ||\vec{v}||$

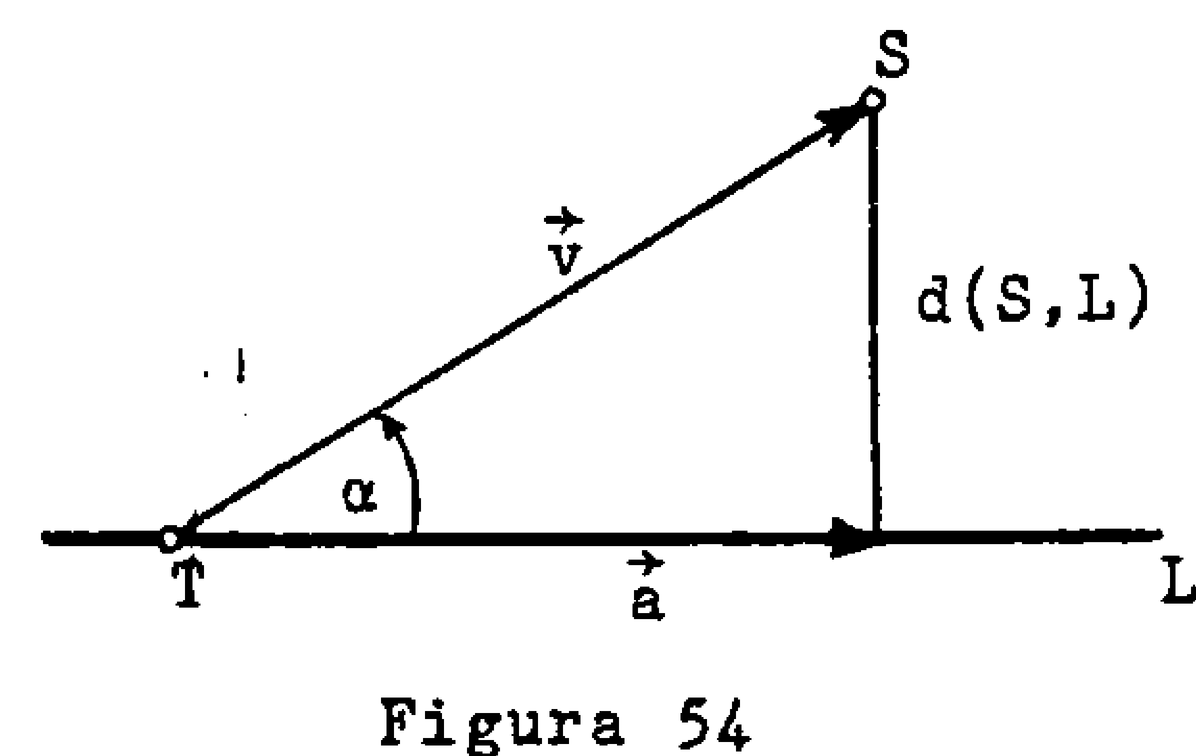


Figura 54

Entonces, se sigue que: $d(S,L) = ||\vec{v}||\text{Sen}\alpha$

Pero, según (63): $||\vec{a}\times\vec{v}|| = ||\vec{a}||.||\vec{v}||\text{Sen}\alpha$

$$\therefore\ d(S,L) = \frac{||\vec{a}\times\vec{v}||}{||\vec{a}||} \qquad (66)$$

EJEMPLO 14. Hallar la distancia del punto S(1,-1,2) a la recta $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{3}$

Solución. Por inspección, un punto de L es T(3,2,-3) y su vector de dirección es $\vec{a}=(2,-1,3)$. Entonces, un vector que va de T a S es:

$$\vec{v} = \overline{TS} = (1,-1,2)-(3,2,-3) = (-2,-3,5)$$

$$\rightarrow\ \vec{a}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4(1,-4,-2)$$

Luego: $||\vec{a}\times\vec{v}|| = 4\sqrt{1+16+4} = 4\sqrt{21}$, $||\vec{a}|| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

Finalmente, en (66): $d(S,L) = \frac{4\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{6}$

EJEMPLO 15. Hallar la distancia del punto S(5,-3,-4) a la recta $L: y+4=0\ ,\ x+z=3$.

Solución. Vemos que la recta L está definida por la intersección de dos planos.

$$\rightarrow\ L: \frac{x}{1} = \frac{z-3}{-1}\ ,\ y=-4$$

Por inspección, un punto sobre L es T(0,-4,3) y un vector de dirección es $\vec{a}=(1,0,-1)$.

Si $\vec{v} = \overline{TS}$ → $\vec{v} = (5,-3,-4)-(0,-4,3) = (5,1,-7)$

$$\rightarrow\ \vec{a}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix} = (1,2,1)$$

Luego: $||\vec{a}\times\vec{v}|| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$, $||\vec{a}|| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Por tanto, según (66): $d(S,L) = \sqrt{3}$

1.55 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Sean las rectas no paralelas:

$L_1 = \{S_1+t\vec{a}_1\}$ y $L_2 = \{S_2+r\vec{a}_2\}$

Construimos dos planos paralelos Π_1 y Π_2 que contengan a L_1 y L_2 respectivamente. Como la normal $\vec{n}$ a ambos planos, es perpendicular a los vectores de dirección de L_1 y L_2,

$\rightarrow \quad d(L_1,L_2) = |Comp_{\vec{n}}\vec{v}|$

en donde: $\vec{v} = \overrightarrow{S_1S_2} = \vec{S}_2-\vec{S}_1$

$\vec{n} = \vec{a}_1\times\vec{a}_2$

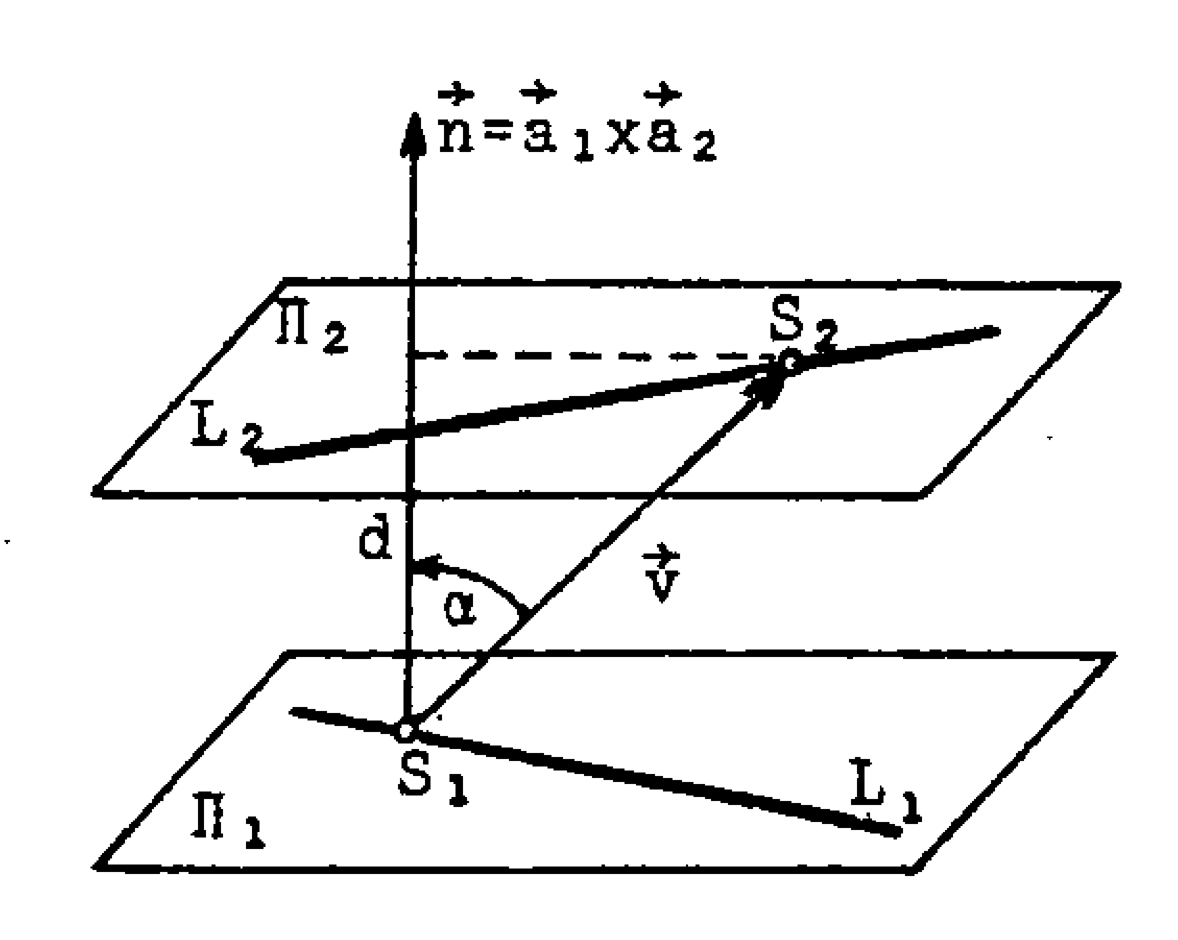


Figura 55

$$d(L_1,L_2) = \frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{||\vec{n}||} = \frac{|(\vec{S}_2-\vec{S}_1).(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)|}{||\vec{a}_1\times\vec{a}_2||} \qquad (67)$$

EJEMPLO 16. Calcular la distancia entre las rectas:

$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-1} \quad y \quad L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$$

Solución. Por inspección: $S_1(1,0,5)$ y $\vec{a}_1=(3,4,-1)$

$S_2(0,-1,4)$ y $\vec{a}_2=(2,-1,1)$

$\rightarrow \vec{S}_2-\vec{S}_1 = (-1,-1,-1)$

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3,-5,-11)$$

Luego, según (67): $d(L_1,L_2) = \dfrac{|(-1,-1,-1).(3,-5,-11)|}{\sqrt{9+25+121}} = \dfrac{13}{\sqrt{135}}$

EJEMPLO 17. Hallar la distancia entre las rectas:

$$L_1=\{(2,-1,6)+t(2,-1,-5)/t\epsilon R\} \quad y \quad L_2: \frac{x-5}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{10}$$

Solución. Por inspección: $S_1(2,-1,6)$ y $\vec{a}_1=(2,-1,-5)$

$S_2(5,-2,0)$ y $\vec{a}_2=(-4,2,10)=-2(2,-1,-5)$

Como $\vec{a}_2=r\vec{a}_1 \rightarrow L_2||L_1$; luego, no es posible calcular $d(L_1,L_2)$ por la fórmula (67), ya que $\vec{a}_1\times\vec{a}_2=0$

Entonces: $d(L_1,L_2) = d(S_2,L_1) = d(S_1,L_2)$

Según (66): $d(S_2,L_1) = \dfrac{||\vec{a}_1\times\vec{v}||}{||\vec{a}_1||}$

$\vec{v} = (5,-2,0)-(2,-1,6) = (3,-1,-6)$

$$\vec{a}_1\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} = (1,-3,1)$$

$$\therefore\ d(L_1,L_2) = \frac{||(1,-3,1)||}{||(3,-1,-6)||} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{46}}$$

EJEMPLO 18. Dadas las rectas $L_1: \frac{x+6}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ y $L_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2}$ $z=2$, que se cruzan en el espacio; determinar un punto $A\epsilon L_1$ y otro punto $B\epsilon L_2$, tales que la distancia de A a B sea mínima, asi como la recta que los contiene.

Solución. Tenemos: $L_1=\{(-6,1,-1)+r(2,1,-1)\}$
$L_2=\{(3,0,2)+s(1,2,0)\}$

Trazamos la recta L perpendicular a L_1 y a L_2, cuyo vector de dirección es $\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2$

$$\rightarrow \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2,-1,3)$$

Entonces: $L = \{A+t(2,-1,3)\}$

Como $B\epsilon(L\cap L_2) \rightarrow B = A + t(2,-1,3)$ (1)

$\rightarrow B = (3,0,2)+s(1,2,0)$ (2)

$A\epsilon L_1 \rightarrow A = (-6,1,-1)+r(2,1,-1)$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene:

$$(3,0,2)+s(1,2,0) = (-6,1,-1)+r(2,1,-1)+t(2,-1,3)$$

$$\rightarrow (s-2r-2t,2s-r+t,r-3t) = (-9,1,-3) \leftrightarrow \begin{cases} s-2r-2t = -9 \\ 2s-r+t = 1 \\ r-3t = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $r=3$, $s=1$, $t=2$

$\therefore A = (-6,1,-1)+3(2,1,-1) = (0,4,-4)$

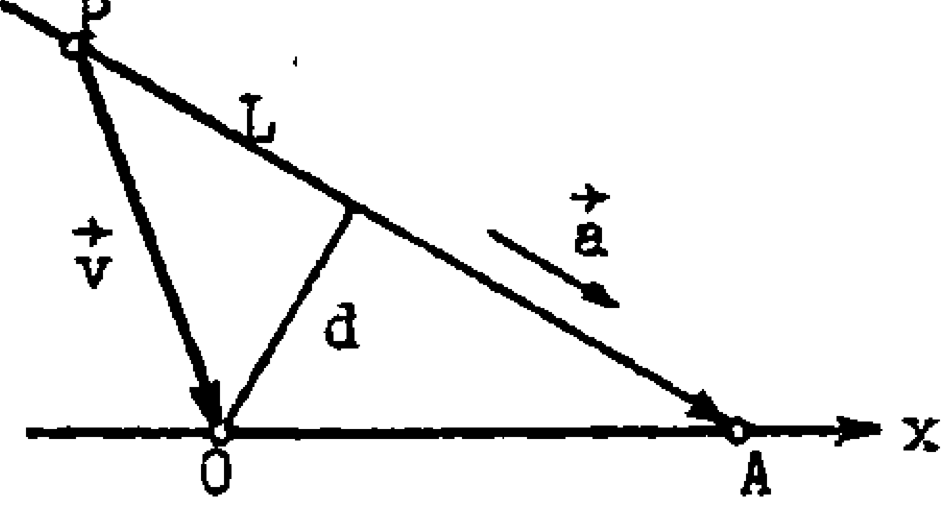
$B = (3,0,2)+(1,2,0) = (4,2,2)$

$L = \{(0,4,-4)+t(2,-1,3), t\epsilon R\}$

EJEMPLO 19. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,-3,-4)$ y corta al eje X, sabiendo que la distancia del origen de coordenadas a dicha recta es 5 unidades.

Solución. Sean: $A(x,0,0)$, $\vec{v}=\overline{PO}=(-1,3,4)$

$\vec{a}=\overline{PA}=(x-1,3,4)$



$$\rightarrow \vec{a}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=x(0,-4,3)$$

$$\rightarrow ||\vec{a}\times\vec{v}||=|x|\sqrt{0+16+9}=5|x| \quad y \quad ||a||=\sqrt{(x-1)^2+9+16}$$

Si $d(O;L)=\dfrac{||\vec{a}\times\vec{v}||}{||\vec{a}||} \rightarrow 5=\dfrac{5|x|}{\sqrt{x^2-2x+26}}$, de donde: $x=13$

$$\therefore\ L=\{(1,-3,-4)+t(12,3,4),t\varepsilon R\}$$

EJERCICIOS

1. Hallar la ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por los puntos $S(1,-2,-3)$ y $T(2,-3,2)$.

   Rp. $L=\{(1,-2,-3)+t(1,-1,5),t\varepsilon R\}$

2. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $S(6,0,-3)$ y $T(-6,9,-12)$.

   Rp. $A(2,3,-6)$, $B(-2,6,-9)$

3. Hallar las coordenadas de los puntos que dividen en 4 partes iguales al segmento de extremos $A(-1,2,1)$ y $B(7,6,-11)$.

   Rp. $(1,3,-2)$, $(3,4,-5)$, $(5,5,-8)$

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,0,-1)$ y es perpendicular, en su punto de intersección con la recta $L_1=\{(2,3,2)+t(2,-1,0),t\varepsilon R\}$. Rp. $L=\{(3,0,-1)+r(1,2,3),r\varepsilon R$

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $S(1,-3,2)$ y es perpendicular a la recta $L_1:P=(4,-1,3)+r(1,2,-1),r\varepsilon R$.

   Rp. $L=\{(1,-3,2)+t(1,0,1),t\varepsilon R$

6. Hallar el punto simétrico de $P=(3,2,1)$, respecto de la recta $L=\{(1,2,1)+t(2,3,2\sqrt{3})\}$. Rp. $Q=\frac{1}{25}(-9,74,25+16\sqrt{3})$

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $L_1=\{(-1,4,-3)+r(5,-2,2)\}$ y $L_2=\{(-2,4,13)+s(3,-1,-10)\}$ y es perpendicular al plano formado por L_1 y L_2.
Rp. $L=\{(4,2,-7)+t(22,56,1), t\in R\}$

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(0,1,1)$ y corta a las rectas $L_1: \begin{cases} x=y \\ 2x=z \end{cases}$ y $L_2=\{(1,-2,0)+s(1,2,1), s\in R\}$.
Rp. $L=\{(0,1,1)+t(1,0,1), t\in R\}$ ó $L=\{(0,1,1)+t(3,-4,-1)\}$

9. Dadas las rectas que se cruzan $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{5-z}{4}$ y $L_2: x=-2, \frac{x-1}{1} = \frac{z+2}{2}$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $S(-1,-2,1)$ y es perpendicular a L_1 (en el espacio) y corta a L_2.
Rp. $L=\{(-1,-2,0)+t(-1,6,4), t\in R\}$

10. Dadas las rectas $L_1=\{(2,-1,3)+r(1,0,-2), r\in R\}$, $L_2=\{(3,0,-2)+s(0,2,1), s\in R\}$ y $L_3=\{(3,2,0)+t(0,3,1), t\in R\}$. Hallar la ecuación de la recta que corta a L_1, L_2 y L_3 en los puntos A, B y C respectivamente, de modo que B sea el punto de trisección, más cercano de C, del segmento $\overline{AB}$.
Rp. $L=\{(3,-1,1)+t(0,13,3), t\in R\}$

11. Hallar la distancia del punto $S(3,-1,5)$ a la recta que pasa por los puntos $A(3,-2,4)$ y $B(0,4,6)$. Rp. $\sqrt{34}/7$

12. Hallar la distancia del punto $S(-1,2,3)$ a la recta $L=\{(7,-3,0)+t(6,-2,3), t\in R\}$. Rp. 7

13. Hallar la distancia entre las rectas $L_1=\{(1,2,-2)+t(0,4,2)\}$ y $L_2: x+4=0,\ y+z=6$. Rp. 5

14. Hallar la distancia entre las rectas $L_1: \frac{x-3}{-2} = \frac{z-6}{2}$, $y=4$, y $L_2: x+1=y-2-z$. Rp. $4\sqrt{2}$

15. Hallar la distancia entre las rectas $L_1: \frac{x-5}{-7} = \frac{y+3}{21} = \frac{z-7}{14}$ y $L_2=\{(4,-1,5)+t(1,-3,-1), t\in R\}$. Rp. $\sqrt{13}$

16. Dados los vértices de un triángulo $A(2,-1,-3)$, $B(5,2,-7)$ y $C(-7,11,6)$, hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo externo del vértice A. Rp. $L: P=(2,-1,-3)+t(6,-1,-7)$

1.56 PLANOS EN EL ESPACIO

Si Π es un plano y S un punto sobre Π, y si $\vec{n}$ es un vector no nulo cuya representación geométrica es ortogonal a Π, entonces:

$$P(x,y,z)\in\Pi \;\leftrightarrow\; (\vec{P}-\vec{S}).\vec{n} = 0 \qquad (68)$$

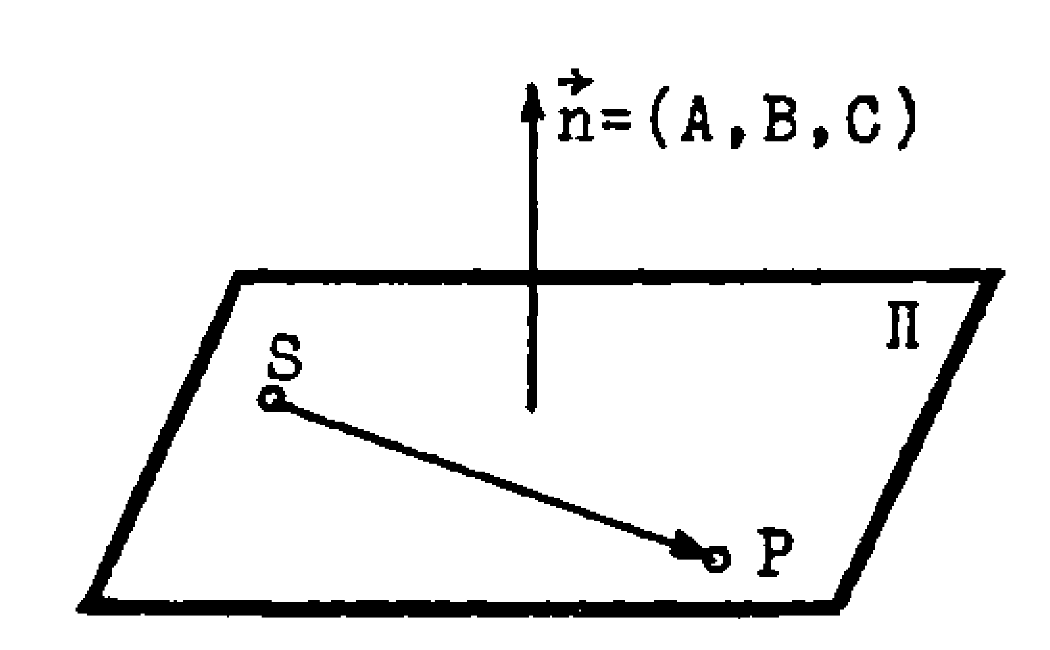


Figura 56

Por lo tanto, la ecuación (68) es una ecuación del plano Π.

Puesto que el producto escalar de dos vectores es un escalar, se puede emplear la ecuación (68) para obtener la ecuación cartesiana de un plano.

En efecto, supongamos que $S=(x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{n}=(A,B,C)$

Entonces, si: $\vec{P}.\vec{n} - \vec{S}.\vec{n} = 0$

$\rightarrow\; (x,y,z).(A,B,C) - (x_1,y_1,z_1).(A,B,C) = 0$

$\rightarrow\; Ax + By + Cz - (Ax_1+By_1+Cz_1) = 0$

Haciendo: $D = -(Ax_1+By_1+Cz_1)$ obtenemos:

$$\Pi:\ Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (69)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación general del plano.*

EJEMPLO 1. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por $S(2,-1,4)$ y cuyo vector normal es $\vec{n}=(2,3,-1)$.

Solución. Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera del plano. Entonces, de la ecuación (68) se tiene: $\vec{P}.\vec{n} = \vec{S}.\vec{n}$

$\rightarrow\; (x,y,z).(2,3,-1) = (2,-1,4).(2,3,-1)$

de donde: $\Pi: 2x+3y-z+3=0$

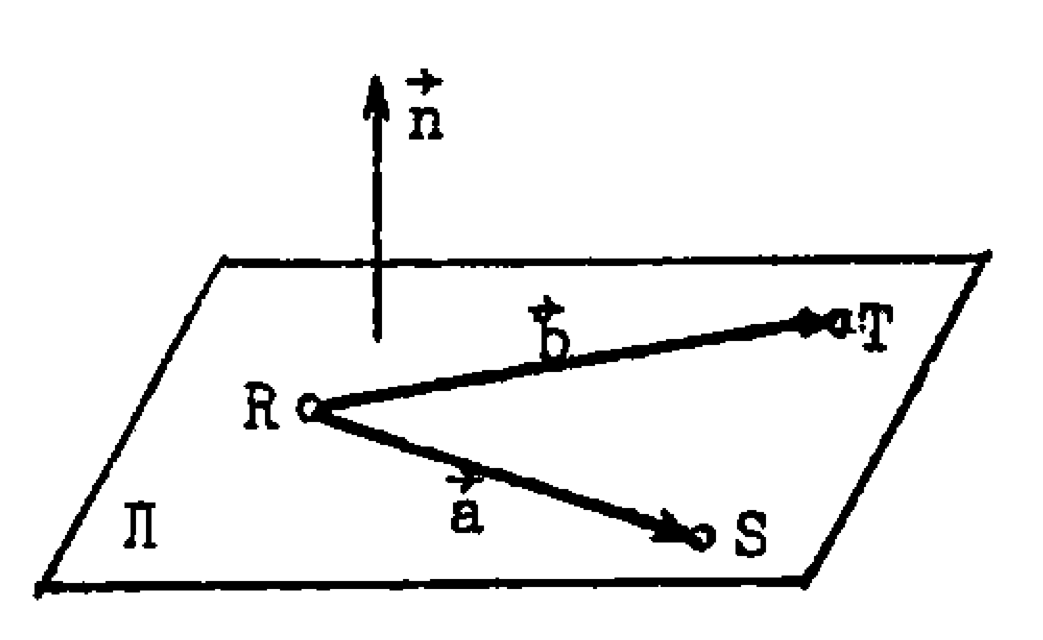
Se puede obtener la ecuación cartesiana de un plano si se conocen las coordenadas de tres puntos no colineales que están sobre dicho plano.

EJEMPLO 2. Obtener la ecuación general del plano que pasa por los puntos $R(3,2,1)$, $S(1,3,2)$ y $T(1,-2,3)$.

Solución. Sea: $\vec{a} = \overline{RS} = (1,3,2)-(3,2,1) = (-2,1,1)$

$\vec{b} = \overline{RT} = (1,-2,3)-(3,2,1) = (-2,-4,2)$

Entonces: $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$ es el vector normal al plano determinado por los tres puntos dados.



o sea: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2(3,1,5)$

Sin perder generalidad tomamos $\vec{n}=(3,1,5)$

Si $P(x,y,z)\in\Pi \leftrightarrow (\vec{P}-\vec{R})\cdot\vec{n} = 0 \leftrightarrow \vec{P}\cdot\vec{n} = \vec{R}\cdot\vec{n}$

$\leftrightarrow (x,y,z)\cdot(3,1,5) = (3,2,1)\cdot(3,1,5)$

de donde: $\Pi: 3x+y+5z-16=0$

1.57 ECUACION VECTORIAL DE UN PLANO

Sea el plano Π que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y que contiene a los vectores no paralelos $\vec{a}=(a_1,a_1,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Un vector $\vec{v} = \overline{P_1P}$ cualquiera del plano Π se puede escribir como una combinación lineal de un vector en la dirección de $\vec{a}$ y otro en la dirección de $\vec{b}$. Esto es:

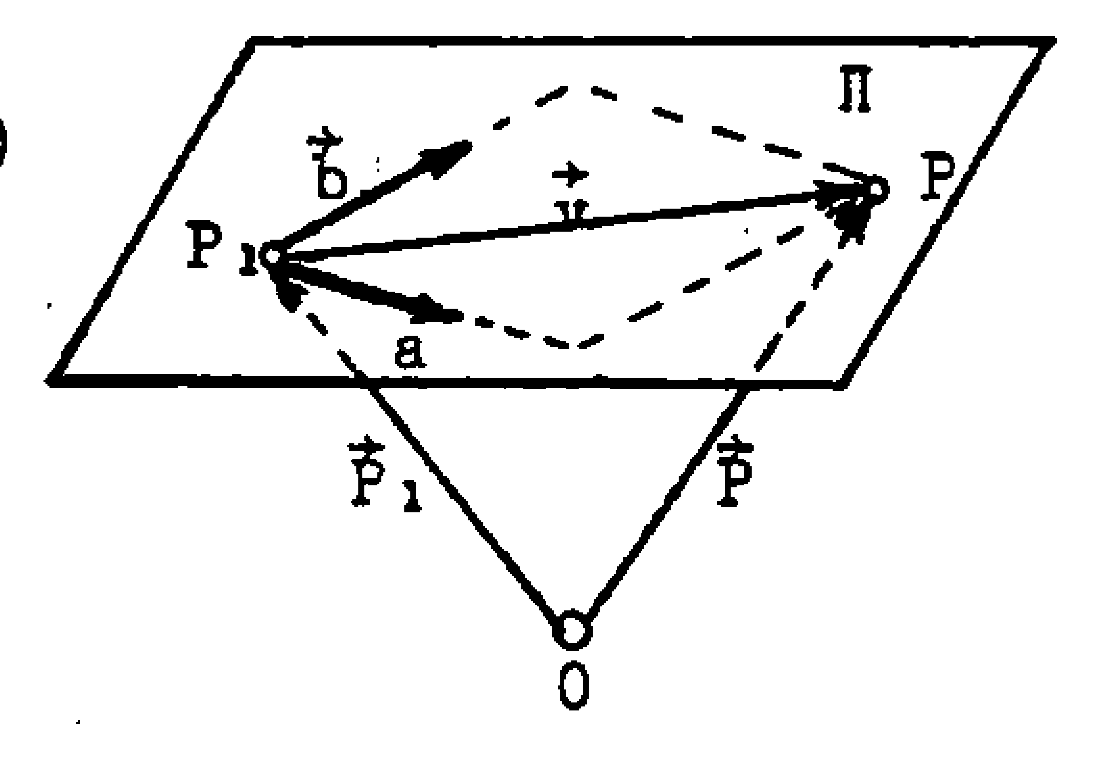
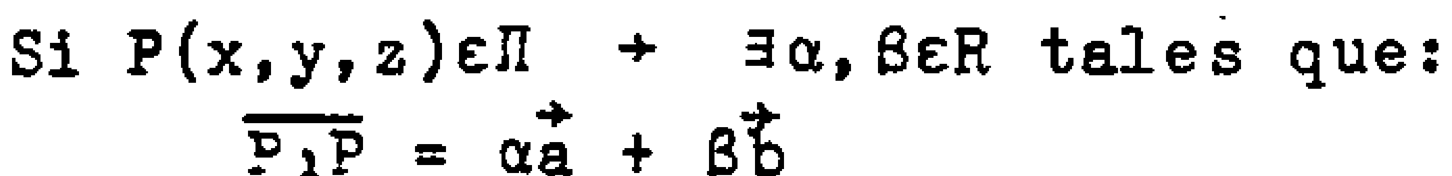


Figura 57



Si $P(x,y,z)\in\Pi \rightarrow \exists\alpha,\beta\in R$ tales que:

$\overline{P_1P} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

$\rightarrow P - P_1 = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

$\rightarrow P = P_1 + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

Queda entonces definido la ecuación vectorial del plano Π, como el conjunto de puntos:

$$\Pi = \{P/\ P = P_1 + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\ \alpha,\beta\in R\} \qquad (70)$$

Observaciones

(1) Como los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ determinan el plano Π, la normal a dicho plano está dada por: $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$.

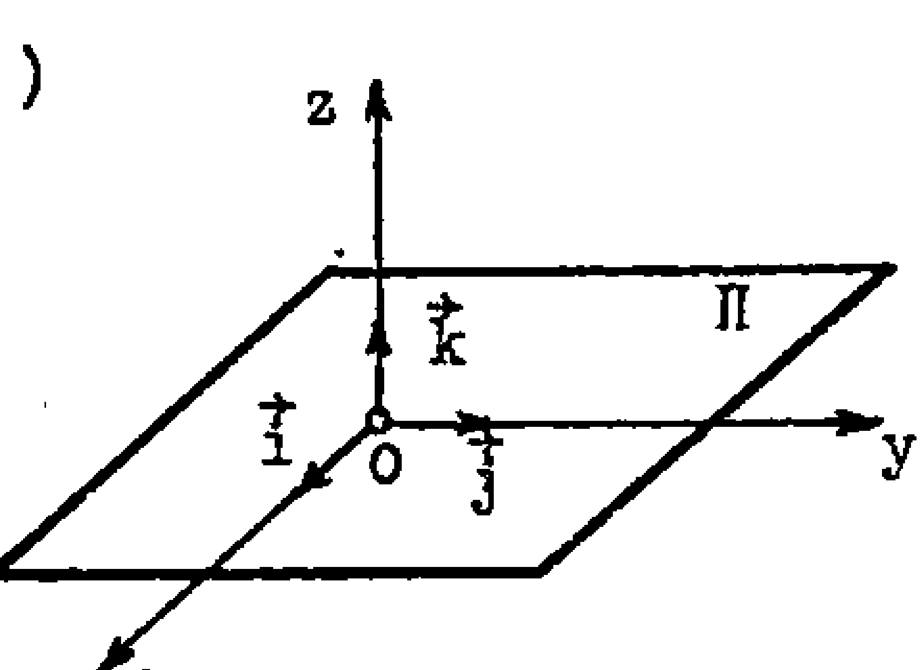
(2) Si en la ecuación (70) sustituimos las coordenadas de los vectores $\vec{P}$, $\vec{P}_1$, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \alpha a_1 + \beta b_1 \\ y &= y_1 + \alpha a_2 + \beta b_2 \\ z &= z_1 + \alpha a_3 + \beta b_3 \end{aligned} \tag{71}$$

Las ecuaciones (71) son definidas como las *ecuaciones paramétricas* del plano.

(3) Partiendo de las ecuaciones (68), (69) y (70) podemos obtener las ecuaciones normal, general y vectorial, respectivamente, de los planos coordenados:

a) Plano XY. Aquí tenemos: $\vec{n}=\vec{k}=(0,0,1)$
$\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$ y $P_1=(0,0,0)$



La ecuación normal es:
$(\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{n}=0 \leftrightarrow (x,y,z).(0,0,1)=0$

La ecuación general es: $z=0$

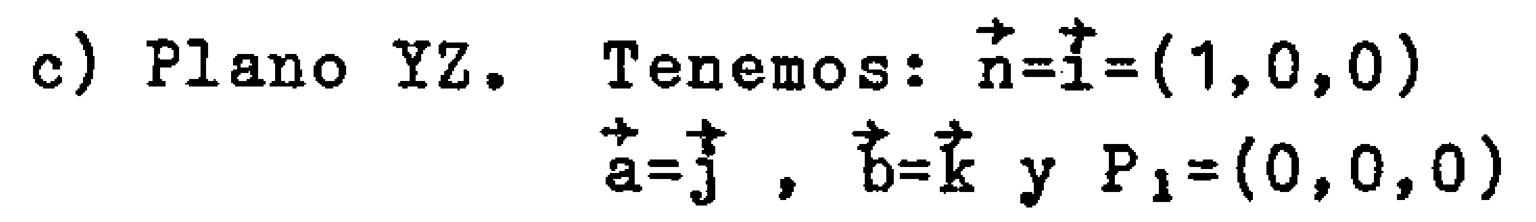
La ecuación vectorial es:
$\Pi=\{P/P=\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)\}$

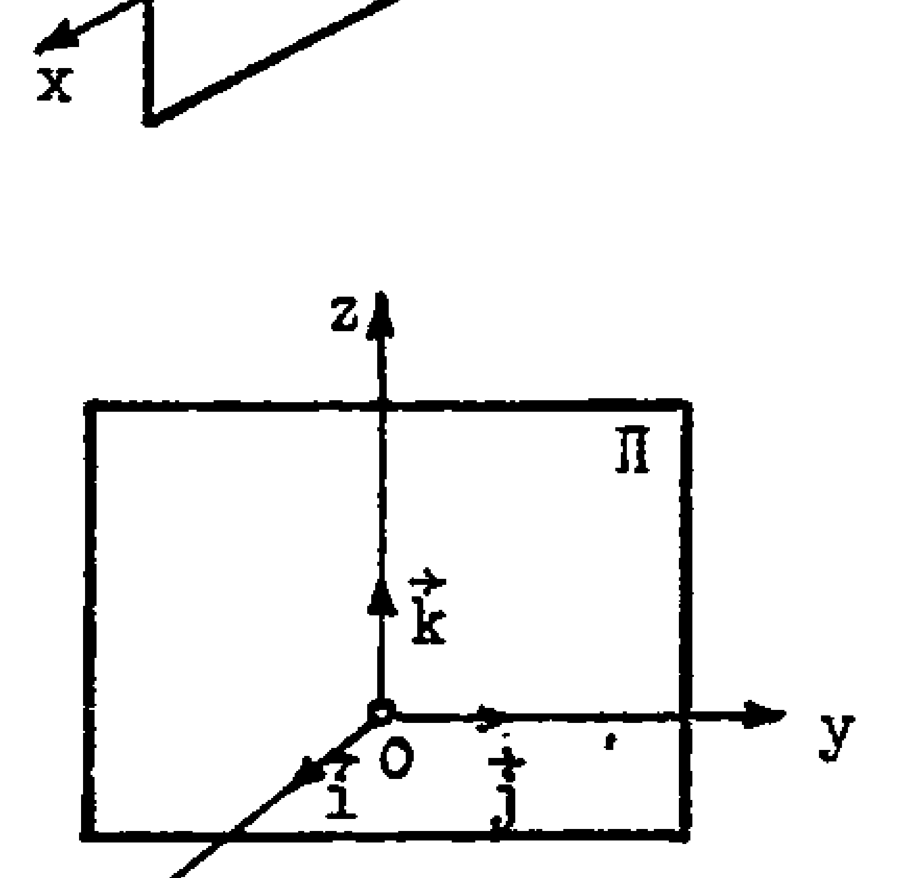
b) Plano XZ. Tenemos: $\vec{n}=\vec{j}=(0,1,0)$
$\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{k}$ y $P_1=(0,0,0)$

La ecuación normal es:
$(\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{n}=0 \leftrightarrow (x,y,z).(0,1,0)=0$

La ecuación general es: $y=0$

La ecuación vectorial es:
$\Pi = \{P/P = \alpha(1,0,0)+\beta(0,0,1)\}$


c) Plano YZ. Tenemos: $\vec{n}=\vec{i}=(1,0,0)$
$\vec{a}=\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{k}$ y $P_1=(0,0,0)$



La ecuación normal es:
$(\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{n}=0 \leftrightarrow (x,y,z).(1,0,0)=0$

La ecuación general es: $x=0$

La ecuación vectorial es:
$\Pi = \{P/P = \alpha(0,1,0)+\beta(0,0,1)\}$

EJEMPLO 3. Hallar la ecuación paramétrica vectorial del plano que contiene a los vectores $\vec{a}=(-1,2,3)$, $\vec{b}=(4,-3,5)$ y pasa por el punto $P_1(1,0,2)$.

Solución. Según (70), la ecuación del plano es:
$\Pi=\{P/P=(1,0,2)+\alpha(-1,2,3)+\beta(4,-3,5), \alpha,\beta\in R\}$

EJEMPLO 4. Hallar las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos R(2,1,3), S(-1,-2,4) y T(4,2,1).

Solución. Sean: $\vec{a}=\overline{RS}=(-1,-2,4)-(2,1,3)=(-3,-3,1)$
$\vec{b}=\overline{RT}=(4,2,1)-(2,1,3)=(2,1,-2)$

Si $R(2,1,3)\in\Pi \rightarrow \exists\alpha,\beta\in R$ tales que:

$P = (2,1,3)+\alpha(-3,-3,1)+\beta(2,1,-2)$

Por simple inspección, las ecuaciones paramétricas del plano son

$$x = 2-3\alpha+2\beta \;,\; y = 1-3\alpha+\beta \;,\; z = 3+\alpha-2\beta$$

DEFINICION 16. Una recta L es *paralela* a un plano Π si y sólo si un vector de dirección de L es perpendicular a un vector normal a Π. (La recta L puede o no estar contenida en Π). Una recta L es *perpendicular* a un plano Π, si y sólo si un vector de dirección de L es paralelo a un vector normal a Π. Por tanto, si $\vec{a}$ es un vector de dirección de L y $\vec{n}$ es el vector normal al plano Π, entonces:

$$\text{i) } L||\Pi \leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} = 0$$

$$\text{ii) } L\perp\Pi \leftrightarrow \vec{a}\times\vec{n} = \theta$$

DEFINICION 17. Dos planos son paralelos o perpendiculares si y sólo si sus respectivas normales son paralelos o perpendiculares. Es decir, si Π_1 es un plano con normal $\vec{n}_1$ y Π_2 es un plano con normal $\vec{n}_2$, entonces:

$$\text{i) } \Pi_1||\Pi_2 \leftrightarrow \vec{n}_1\times\vec{n}_2 = \theta$$

$$\text{ii) } \Pi_1\perp\Pi_2 \leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$$

EJEMPLO 5. Para qué valor de m la recta L: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+2}{-2}$ es paralela al plano Π:x-3y+6z+7=0.

Solución. Por simple inspección: $\vec{a}=(3,m,-2)$ y $\vec{n}=(1,-3,6)$
Luego, si $L||\Pi \leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} = 0$
$\leftrightarrow (3,m,-2).(1,-3,6) = 0$

de donde: $m=-3$

EJEMPLO 6. Para qué valores de a y b, la recta L: $\frac{x-2}{a} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$, es perpendicular al plano Π:3x-2y+bz+1=0.

Solución. Por inspección: $\vec{a}=(a,4,-3)$ y $\vec{n}=(3,-2,b)$

Si $L\perp\Pi \leftrightarrow \vec{a}\times\vec{n} = \theta$

$$\rightarrow \vec{a}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 4 & -3 \\ 3 & -2 & b \end{vmatrix} = \vec{i}(4b-6)-\vec{j}(ab+9)+\vec{k}(-2a-12) = (0,0,0)$$

$$\rightarrow (4b-6,-ab-9,-2a-12) = (0,0,0) \leftrightarrow \begin{cases} 4b-6 = 0 \rightarrow b=3/2 \\ -ab-9=0 \\ -2a-12=0 \rightarrow a=-6 \end{cases}$$

EJEMPLO 7. Las ecuaciones de las intersecciones del plano Π con el plano XY y el plano YZ son las rectas $L_1: 2x-y-7=0$ $z=0$, y $L_2: y+3z+7=0$, $x=0$, respectivamente. Hallar la ecuación del plano Π.

Solución. Tenemos: $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+7}{2}$, $z=0$; $L_2: \frac{y+7}{-3} = \frac{z}{1}$, $x=0$

$\rightarrow \vec{a}_1=(1,2,0)$ y $\vec{a}_2=(0,-3,1)$

$$\text{Luego: } \vec{n} = \vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,-3)$$

Un punto de L_1 es $P_1(0,-7,0)$, entonces, si $P(x,y,z)\in\Pi \leftrightarrow$

$(\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{n} = 0 \rightarrow (x,y+7,z).(2,-1,-3)=0 \leftrightarrow \Pi: 2x-y-3z-7=0$

EJEMPLO 8. Obtener la ecuación del plano que contiene al punto $S(3,-2,1)$ y también a la recta $L: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z}{6}$

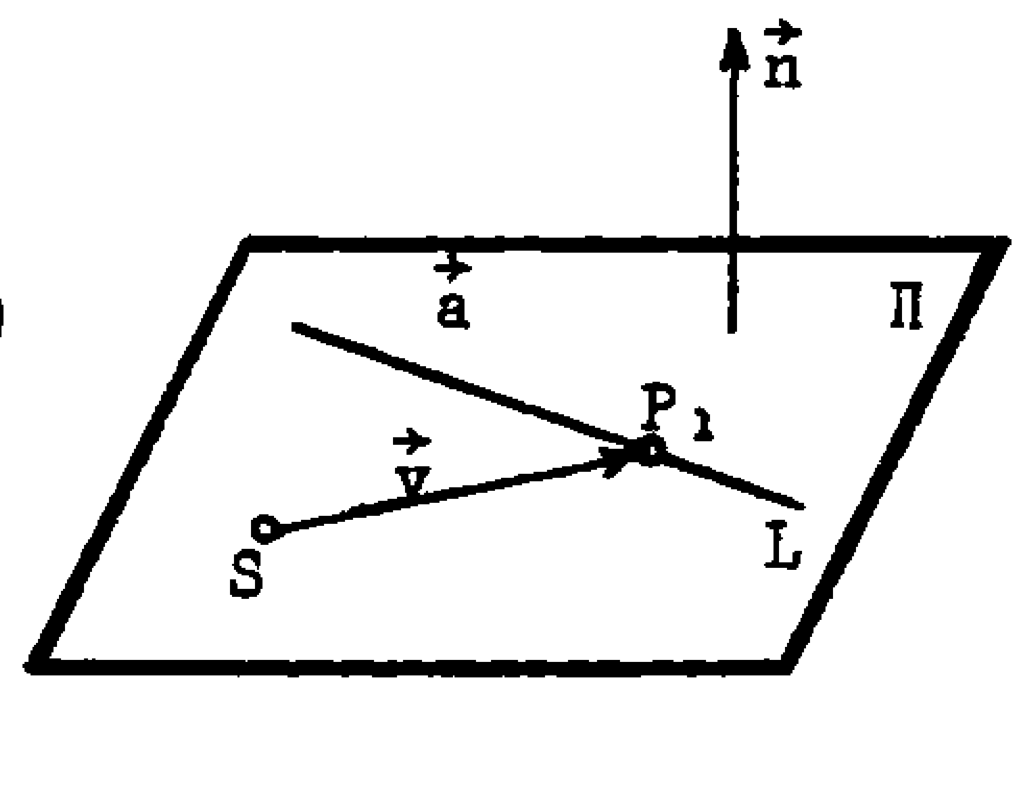
Solución. Por inspección:

$P_1=(-2,5,0)$ y $\vec{a}=(1,-1,6)$

Sea: $\vec{v} = \overrightarrow{SP_1} \rightarrow \vec{v} = \vec{P}_1-\vec{S}$

$\rightarrow \vec{v} = (-2,5,0)-(3,-2,1) = (-5,7,-1)$

Como $\vec{a}$ y $\vec{v}$ están sobre el plano Π, entonces: $\vec{n} = \vec{v}\times\vec{a}$



$$\rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (41,29,-2)$$

Si $P_1\in\Pi \rightarrow (\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{n} = 0 \leftrightarrow (x+2,y-5,z).(41,29,-2) = 0$

de donde: $\Pi: 41x+29y-2z-63=0$

EJERCICIOS

1. Dados los puntos $M(3,-1,2)$ y $R(4,-2,-1)$, hallar la ecuación del plano que pasa por M y es perpendicular al vector MR.
Rp. $x-y-3z+2=0$

2. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $S(3,4,-5)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a}=(3,1,-1)$ y $\vec{b}=(1,-2,1)$.
Rp. $x+4y+7z+16=0$

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $N(3,-1,2)$, $R(4,-1,-1)$ y $S(2,0,2)$. Rp. $3x+3y+z-8=0$

4. Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas concurrentes $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{7}$; $L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{-2}$.
Rp. $43x+3y-14z-34=0$

5. Las ecuaciones de las intersecciones del plano Π con el plano XY y el plano YZ son $x-4y=12$, $z=0$; $2y+5z=-6$, $x=0$, respectivamente. Hallar la ecuación del plano Π. Rp. $x-4y-13z-12=0$

6. Determinar para qué valores de a y b, los planos $\Pi_1: 2x+ay+3z-9=0$ y $\Pi_2: bx-6y-6z+2=0$ son paralelos. Rp. $a=3$, $b=-4$

7. Determinar para que valor de m los planos $\Pi_1: 3x-5y+nz-3=0$ y $\Pi_2: x+3y+2z+5=0$ son perpendiculares. Rp. $m=6$

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $S(2,-1,1)$ y es perpendicular a los planos $\Pi_1: 2x-z+1=0$ y $\Pi_2: y=0$.
Rp. $x+2z-4=0$

9. Para qué valores de a y b la recta $L: x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-3+t$, está contenida en el plano $\Pi: ax+2y-4z+b=0$ Rp. $a=3$, $b=-23$

10. Para qué valores de A y B el plano $\Pi: Ax+By+3z-5=0$ es perpendicular a la recta $L: x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$.
Rp. $A=-3$, $B=9/2$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos $2x-y+3z=1$ y $x+2y+z=0$
Rp. $7x-y-5z=0$

1.58 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sea S un punto del espacio y Π un plano. Si T es cualquier punto sobre Π, y $\vec{n}$ es un vector normal a Π, entonces la distancia que separa a S de Π es igual a la componente del vector $\vec{v}=\vec{S}-\vec{T}$ sobre la normal $\vec{n}$. Esto es

$$d(S,\Pi) = \text{Comp}_{\vec{n}}\vec{v} = \frac{|(\vec{S}-\vec{T}).\vec{n}|}{||\vec{n}||} \qquad (72)$$

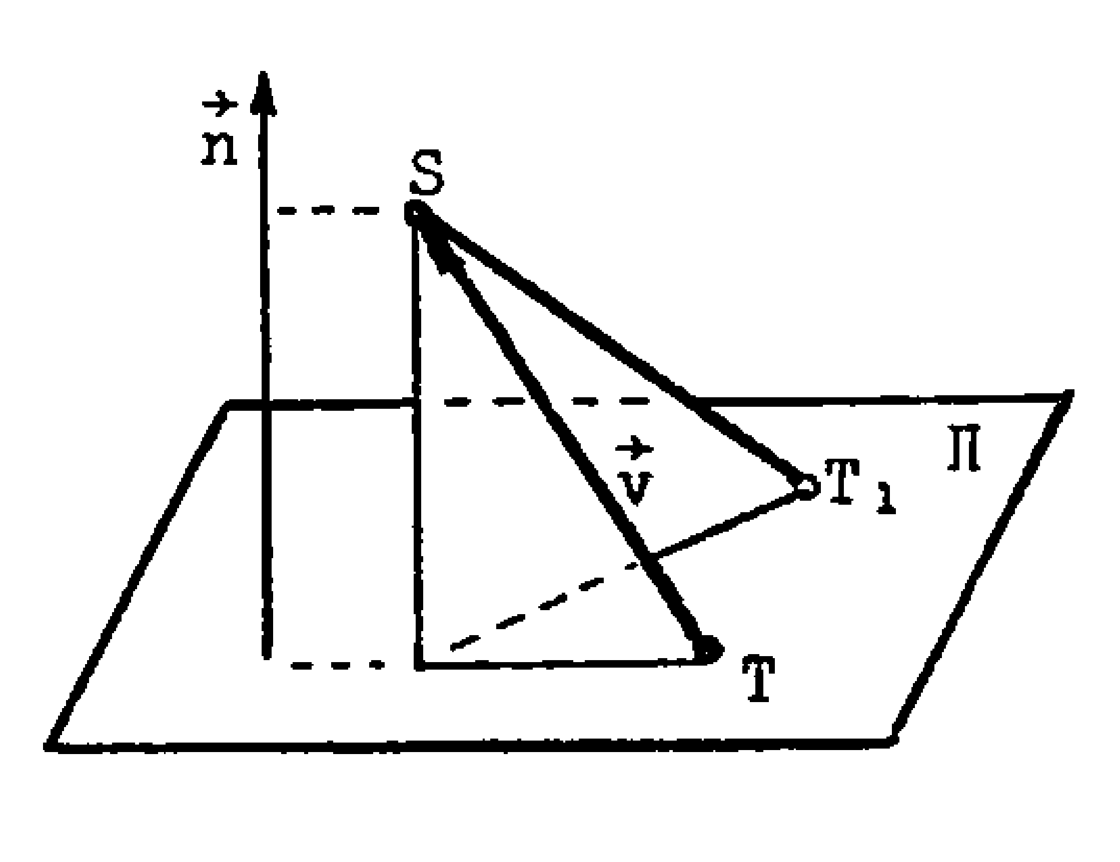


Figura 58

En la Figura 58 se ilustra el hecho de que la $d(S,\Pi)$ no depende de la elección del punto específico T sobre Π. La componente de $\vec{v}$ paralela a $\vec{n}$ es la misma para todos los puntos T sobre Π. Es decir, para cualquier otro punto T_1 se tiene:

$$|\text{Comp}_{\vec{n}}(\vec{S}-\vec{T})| = |\text{Comp}_{\vec{n}}(\vec{S}-\vec{T}_1)|$$

Para obtener una expresión cartesiana de la distancia de S al plano $\Pi:Ax+By+Cz+D=0$, consideremos los puntos $S(x_1,y_1,z_1)$, $T(x_2,y_2,z_2)$ y $\vec{n}=(A,B,C)$ una normal al plano Π. Entonces, según (72) se tiene:

$$d(S,\Pi) = \frac{|\vec{S}.\vec{n}-\vec{T}.\vec{n}|}{||\vec{n}||} = \frac{|(x_1,y_1,z_1).(A,B,C)-(x_2,y_2,z_2).(A,B,C)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-(Ax_2+By_2+Cz_2)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Pero $T(x_2,y_2,z_2)\varepsilon\Pi \rightarrow Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \rightarrow D = -(Ax_2+By_2+Cz_2)$

$$\therefore \quad d(S,\Pi) = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (73)$$

Si en la fórmula (73) sustituimos las coordenadas de T por las del origen, obtenemos:

$$d(O,\Pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (74)$$

que es la fórmula para calcular la distancia del origen a un plano. Valiéndose de la fórmula (74) podemos calcular la distancia cartesiana entre dos planos paralelos.

En efecto, sean los planos paralelos; $\Pi_1:Ax+By+Cz+D_1=0$ y

$\Pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$

Según (74): $d(O,\Pi_1) = \dfrac{|D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $d(O,\Pi_2) = \dfrac{|D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Entonces: $d(\Pi_1,\Pi_2)=d(O,\Pi_2)-d(O,\Pi_1)$ ó $d(\Pi_1,\Pi_2)=d(O,\Pi_1)-d(O,\Pi_2)$

$$\therefore \quad d(\Pi_1,\Pi_2) = \frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (75)$$

EJEMPLO 1. Hallar la distancia del punto $S(5,-2,3)$ al plano $\Pi=\{(2,-1,6)+t(1,0,3)+s(2,-2,3)/t,s\in R\}$.

Solución. Por inspección, un punto sobre Π es $T(2,-1,6)$ y dos vectores sobre Π son: $\vec{a}=(1,0,3)$ y $\vec{b}=(2,-2,3)$.

$$\rightarrow \quad \vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,-2)$$

Un vector que va de T a S es: $\vec{v}=(5,-2,3)-(2,-1,6)=(3,-1,-3)$

Luego, según (72): $d(S,\Pi) = \dfrac{|(6,3,-2).(3,-1,-3)|}{\sqrt{36+9+4}} = \dfrac{21}{7} = 3$

EJEMPLO 2. Dados los planos paralelos $\Pi_1: 2x-3y+6z-14=0$ y $\Pi_2: 4x-6y+12z+21=0$; determinar si el punto $P(3,-2,5)$ está entre los planos.

Solución. El punto P estará entre los planos Π_1 y Π_2 si su distancia a cada plano es menor que la distancia entre ambos planos. Luego, haciendo uso de las fórmulas (73) y (75) tenemos: $d(P,\Pi_1) = \dfrac{|2(3)-3(-2)+6(5)-14|}{\sqrt{4+9+36}} = \dfrac{28}{7} = 4$

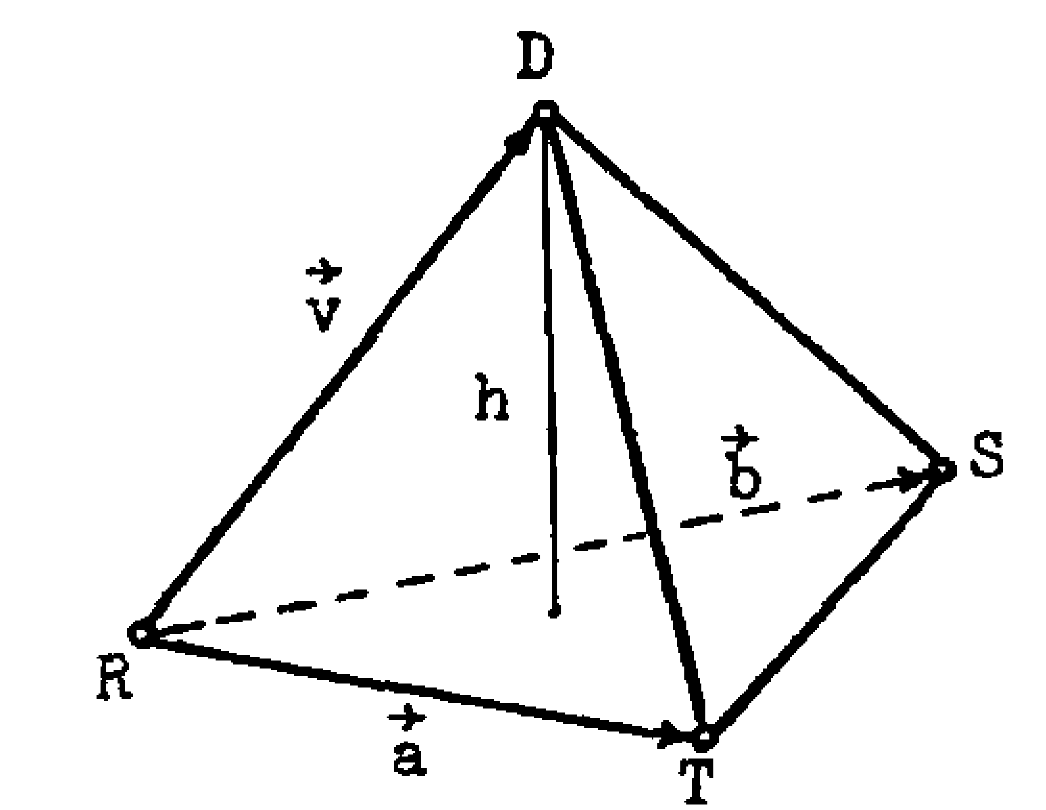
$$d(P,\Pi_2) = \frac{|4(3)-6(-2)+12(5)+21|}{\sqrt{16+36+144}} = \frac{105}{14} = 7.5$$

Para aplicar (75) debemos multiplicar la ecuación de Π_1 por 2.

$$\rightarrow \quad d(\Pi_1,\Pi_2) = \frac{|21-(-28)|}{\sqrt{16+36+144}} = \frac{49}{14} = 3.5$$

Como $d(P,\Pi_1) > d(\Pi_1,\Pi_2)$ y $d(P,\Pi_2) > d(\Pi_1,\Pi_2)$, el punto P no está entre los planos Π_1 y Π_2.

EJEMPLO 3. Si la base de un tetraedro es un triángulo cuyos vértices son R(1,3,-3), S(2,2,-1) y T(3,4,-2); hallar la longitud de la altura del tetraedro desde el vértice D(2,9,-2) a la base.



Solución. Sean: $\vec{a} = \overline{RT} = (2,1,1)$
$\vec{b} = \overline{RS} = (1,-1,2)$

El vector normal a la base del plano es:

$$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-3,-3)$$

Un vector que va de R a D es $\vec{v}=\vec{D}-\vec{R}$
$\rightarrow \vec{v} = (1,6,1)$

Luego, según (72): $h = \dfrac{|\vec{n}.\vec{v}|}{||\vec{n}||} = \dfrac{|(3,-3,-3).(1,6,1)|}{\sqrt{9+9+9}} = 2\sqrt{3}$

EJEMPLO 4. Obtener la ecuación del plano que es paralelo al plano $\Pi_1: 3x-2y+6z=9$, y que está a 7 unidades del origen.

Solución. La familia de planos paralelos a Π_1 es
$\Pi: 3x-2y+6z+k=0$ (1)

Si $d(0,\Pi)=7$, entonces según (74): $\dfrac{|k|}{\sqrt{9+4+16}} = 7$

de donde: $|k|=49 \leftrightarrow k=49$ ó $k=-49$

Luego, en (1): $\Pi: 3x-2y+6z\pm 49=0$

EJEMPLO 5. Hallar la ecuación vectorial de la recta que se encuentra entre los planos $\Pi_1: x-2y-2z=12$ y $\Pi_2: x-2y-2z=6$.

Solución. Un plano Π paralelo a Π_1 y Π_2, y entre ambos, tiene la forma: $\Pi: x-2y-2z=k$, $\forall k\varepsilon<6,12>$

Evidentemente una recta L que se encuentra entre Π_1 y Π_2 debe estar sobre el plano Π. Entonces tomamos dos puntos $A\varepsilon\Pi$ y $B\varepsilon\Pi$ por donde pasará la recta L. Si $x=k$, $y=-k$, $z=k \rightarrow A=(k,-k,k)$
$x=3k$, $y=k$, $z=0 \rightarrow B=(3k,k,0)$

La dirección de la recta es: $\vec{a} = \overline{AB} = (2k,2k,-k)$

$\therefore L: P=A+t\vec{a}$, $t\varepsilon R$

$\leftrightarrow L: P=(k,-k,k)+t(2k,2k,-k), t\varepsilon R, k\varepsilon<6,12>$

EJERCICIOS

1. Hallar la distancia del punto S al plano Π dados.

   a) $S(4,-1,5)$, $\Pi=\{(1,-3,1)+t(2,1,-2)+s(1,3,4)\}$ Rp. 2

   b) $S(4,2,-3)$, $\Pi=\{(1-5\alpha-6\beta,-2+4\alpha+7\beta,1-2\alpha+2\beta), \alpha, \beta\in R\}$ Rp. 6

   c) $S(9,3,-5)$, $\Pi:2x+3y-6z-15=0$ Rp. 6

2. Hallar la distancia entre los planos paralelos dados.

   a) $\Pi_1:2x-y+2z+9=0$, $\Pi_2:4x-2y+4z-21=0$ Rp. 6.5

   b) $\Pi_1:6x-18y-9z=28$, $\Pi_2:4x-12y-6z-7=0$ Rp. 5/6

3. Dos caras de un cubo están en los planos $2x-2y+z-1=0$ y $2x-2y+z+5=0$. Hallar el volumen de este cubo. Rp. $8u^3$

4. Si la base de un tetraedro es un triángulo de vértices $R(1,-2,1)$, $S(-4,2,-1)$ y $T(-5,5,3)$; hallar la longitud de la altura del tetraedro trazada desde el vértice $D(4,2,-3)$ a la base. Rp. 6

5. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano $\Pi_1:x-3y+5z=8$ y que está a 3 unidades del origen.

   Rp. $\Pi:x-3y+5z\pm3\sqrt{35}=0$

6. Hallar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $2x-2y-z-3=0$, que están a la distancia 5 unidades de él.

   Rp. $2x-2y-z\pm18=0$

7. Hallar las ecuaciones de los planos que dividen por la mitad los ángulos diedros formados por los planos concurrentes: $2x-y+5z+3=0$ y $2x-10y+4z-2=0$. Rp. $3x-6y+7z+2=0$, $x+4y+3z+4=0$

8. Hallar la distancia del punto $P(-1,1,-2)$ al plano que pasa por los puntos $R(1,-1,1)$, $S(-2,1,3)$ y $T(4,-5,2)$. Rp. 4

9. Hallar un punto simétrico de $P(36,20,-17)$ respecto del plano formado por las rectas $L_1:P=(1,2,3)+t(0,4,3), t\in R$ y $L_2:P=(1,-2,0)+s(3,0,4), s\in R$. Rp. $Q=(-28,-16,31)$

1.59 INTERSECCIONES DE PLANOS

Dos planos cuyos vectores normales no son paralelos se intersecan en una recta. Esta recta recibe el nombre de *recta de intersección de dos planos.*

Si $\vec{n}_1$ es una normal al plano Π_1 y $\vec{n}_2$ es una normal al plano Π_2, y si Π_1 y Π_2 se intersecan en una recta L, entonces $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ es un vector de dirección de L (Figura 59).

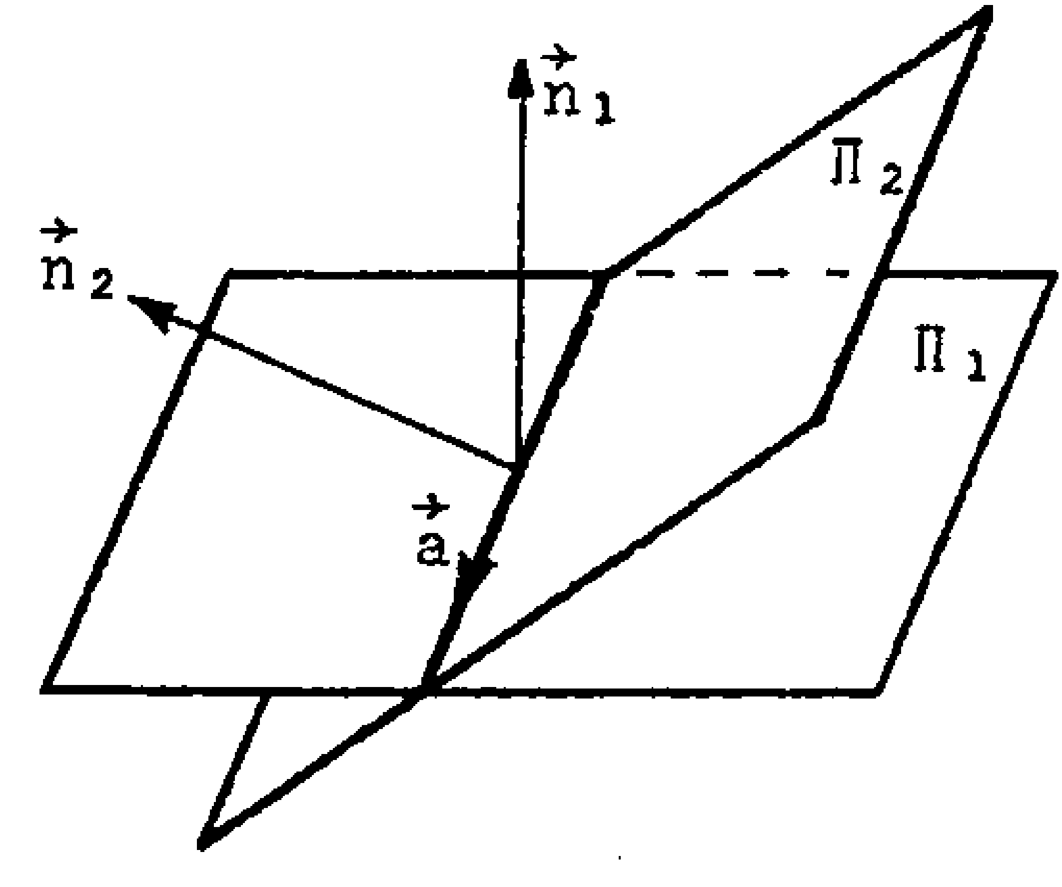


Figura 59

Si se desea determinar a L, entonces deben obtenerse las coordenadas de al menos un punto S sobre L. Puesto que L está sobre Π_1 y sobre Π_2, un punto S tal debe estar en ambos planos.

Conociendo las coordenadas de $S(x_1,y_1,z_1)$ y si $P(x,y,z)$ representa un punto cualquiera de L en el espacio, entonces:

$$L: P=S+t(\vec{n}_1\times\vec{n}_2),\ t\in R$$

es una ecuación paramétrica vectorial de L.

EJEMPLO 1. Hallar la ecuación paramétrica vectorial de la recta L de intersección de los planos $\Pi_1: x-2y+z=0$ y $\Pi_2: 3x+y+2z-7=0$.

Solución. Por inspección: $\vec{n}_1=(1,-2,1)$ y $\vec{n}_2=(3,1,2)$ son vectores normales a los dos planos. Entonces un vector de dirección de la recta de intersección es:

$$\vec{a} = \vec{n}_1\times\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5,1,7)$$

Como la coordenada z de a no es cero, L no es paralela al plano XY, y se puede sustituir a z por cero en las ecuaciones de los planos para obtener el punto S de intersección de L y el plano XY. Luego, si $z=0 \leftrightarrow (x-2y=0)\cap(3x+y=7) = S(2,1,0)$

Por tanto, la ecuación paramétrica vectorial de L es:

$$L: P=(2,1,0)+t(-5,1,7),\ t\in R$$

Observaciones. (1) La intersección de un plano Π en el espacio con uno de los planos coordenados recibe el nombre de *traza* de Π en ese plano coordenado. Frecuentemente se puede emplear las trazas de un plano para facilitar el trazado de su gráfica. En la Figura 60 se muestra la parte de un plano, con ecuación:

$$\Pi: 2x+4y+3z-12=0 \qquad (1)$$

que está en el primer octante.

La traza del plano Π en el plano XY se obtiene haciendo z=0 en (1). Esto es:

$$2x+4y=12 \rightarrow x+2y=6$$

Figura 60

Haciendo x=0 en (1) obtenemos la ecuación de la traza en YZ, o sea:

$$4y+3z=12$$

Finalmente, haciendo y=0 en (1) obtenemos la ecuación de la traza XZ: $2x+3z=12$

(2) Si en la ecuación del plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ ninguno de los coeficientes A, B, C y D es igual a cero, esta ecuación se puede transformar a la forma:

$$\Pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (76)$$

en donde: $a=-D/A$, $b=-D/B$ y $c=-D/C$ son las magnitudes de los segmentos que el plano Π intercepta en los ejes X, Y y Z respectivamente. La ecuación (76) se llama *ecuación segmentaria* o *simétrica* del plano.

EJEMPLO 2. Hallar la ecuación del plano Π que es paralelo al plano cuyas intersecciones con los ejes X, Y y Z son 3, -1 y 2 respectivamente, y que pasa por el punto S(5,-8,3).

Solución. Según (76), la ecuación del plano con a=3, b=-1 y c=2 es, $\Pi_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1 \leftrightarrow \Pi_1: 2x-6y+3z-6=0$

Si $\Pi || \Pi_1 \rightarrow \Pi: 2x-6y+3z+k=0$

Si $S(5,-8,3) \in \Pi \rightarrow 2(5)-6(-8)+3(3)+k=0$, de donde: $k=-67$

$\therefore \Pi: 2x-6y+3z-67=0$

EJEMPLO 3. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $S(-1,4,-1)$ y $T(-13,2,-10)$ y que intercepta a los ejes X y Z segmentos de igual longitud y diferente de cero.

Solución. Si $|a|=|c| \leftrightarrow a=c$ ó $a=-c$

Para $a=c$, la ecuación del plano es $\Pi: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{a}=1$

Si $S(-1,4,-1)\varepsilon\Pi \rightarrow -\frac{1}{a}+\frac{4}{b}-\frac{1}{a}=1 \rightarrow \frac{4}{b}-\frac{2}{a}=1$ (1)

$T(-13,2,-10)\varepsilon\Pi \rightarrow -\frac{13}{a}+\frac{2}{b}-\frac{10}{a}=1 \rightarrow \frac{2}{b}-\frac{23}{a}=1$ (2)

Resolviendo (1) y (2) obtenemos: $a=-44$ y $b=88/21$

$$\therefore \Pi: 2x-21y+2z+88=0$$

Para $a=-c$, la ecuación del plano es: $\Pi: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{a}=1$ (β)

Si $S(-1,4,-1)\varepsilon\Pi \rightarrow -\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{a}=1$, de donde: $b=4$

$T(-13,2,-10)\varepsilon\Pi \rightarrow -\frac{13}{a}+\frac{2}{b}+\frac{10}{a}=1$, de donde: $a=-6$

Sustituyendo en (β) se tiene, $\Pi: 2x-3y-2z+12=0$

1.58 FAMILIA DE PLANOS QUE PASAN POR LA INTERSECCION DE DOS PLANOS.

Dados dos planos no paralelos $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, la ecuación de la familia de planos que pasan por $(\Pi_1 \cap \Pi_2)$ esta dada por la ecuación:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1 + k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (77)$$

donde k se denomina, *parámetro* de la familia.

EJEMPLO 4. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $\Pi_1: 5x-2y-z-3=0$, $\Pi_2: x+3y-2z+5=0$ y es paralelo al vector $\vec{v}=(5,-1,3)$.

Solución. Según (77), el haz de planos está dado por:

$$5x-2y-z-3+k(x+3y-2z+5)=0 \qquad (1)$$

o sea: $(5+k)x+(3k-2)y-(1+2k)z-3+5k=0 \rightarrow \vec{n}=(5+k,3k-2,-1-2k)$

Como el plano buscado es paralelo al vector $\vec{v}=(5,-1,3)$, entonces

$\vec{n}.\vec{v}=0 \leftrightarrow 5(5+k)-1(3k-2)+3(-1-2k)=0$, de donde: $k=6$

Sustituyendo en (1) obtenemos: $\Pi: 11x+16y-13z+27=0$

EJEMPLO 5. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos $\Pi: x-3y+7z+36+k(2x+y-z-15)=0$, cuya distancia al origen de coordenadas es igual a 3.

Solución. De la familia dada se tiene:

$\Pi: (1+2k)x+(k-3)y+(7-k)z+36-15k=0$

Según (74), si $d(0,\Pi)=3 \rightarrow \dfrac{|36-15k|}{\sqrt{(1+2k)^2+(k-3)^2+(7-k)^2}} = 3$

$\rightarrow \quad |12-5k| = \sqrt{(1+2k)^2+(k-3)^2+(7-k)^2}$

de donde: $19k^2-104k+85=0 \leftrightarrow k=1$ ó $k=85/19$

Sustituyendo en la ecuación del haz de planos obtenemos:

$\Pi_1: 3x-2y+6z+21=0$ ó $\Pi_2: 189x+28y+48z-591=0$

EJEMPLO 6. Averiguar si el plano $\Pi: 4x-8y+17z-8=0$ pertenece a la familia de planos: $5x-y+4z-1+k(2x+2y-3z+2)=0$.

Solución. Supongamos que: $\Pi_1 + k(\Pi_2) = 0$

Entonces por inspección: $\vec{n}=(4,-8,17)$, $\vec{n}_1=(5,-1,4)$ y $\vec{n}_2=(2,2,-3)$.

El vector de dirección de la recta de intersección de Π_1 y Π_2 es

$$\vec{a} = \vec{n}_1\times\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-5,23,12)$$

El vector de dirección de la recta de intersección de Π y Π_1 es:

$$\vec{a}_1 = \vec{n}\times\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -8 & 17 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-15,69,36) = 3(-5,23,12)$$

El vector de dirección de la recta de intersección de Π y Π_2 es:

$$\vec{a}_2 = \vec{n}\times\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -8 & 17 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-10,46,24) = 2(-5,23,12)$$

Como $\vec{a}||\vec{a}_1||\vec{a}_2$, el plano Π pertenece al haz de planos $\Pi_1+k\Pi_2=0$

1.61 ANGULO DIEDRO ENTRE DOS PLANOS

El ángulo diedro $0^\circ<\theta<180^\circ$, que forman dos planos orientados:

$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

se define como el ángulo que forman las normales a ambos planos (Figura 61). Entonces, si $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ y $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, se tiene:

$$\text{Cos}\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{||\vec{n}_1||\cdot||\vec{n}_2||}$$

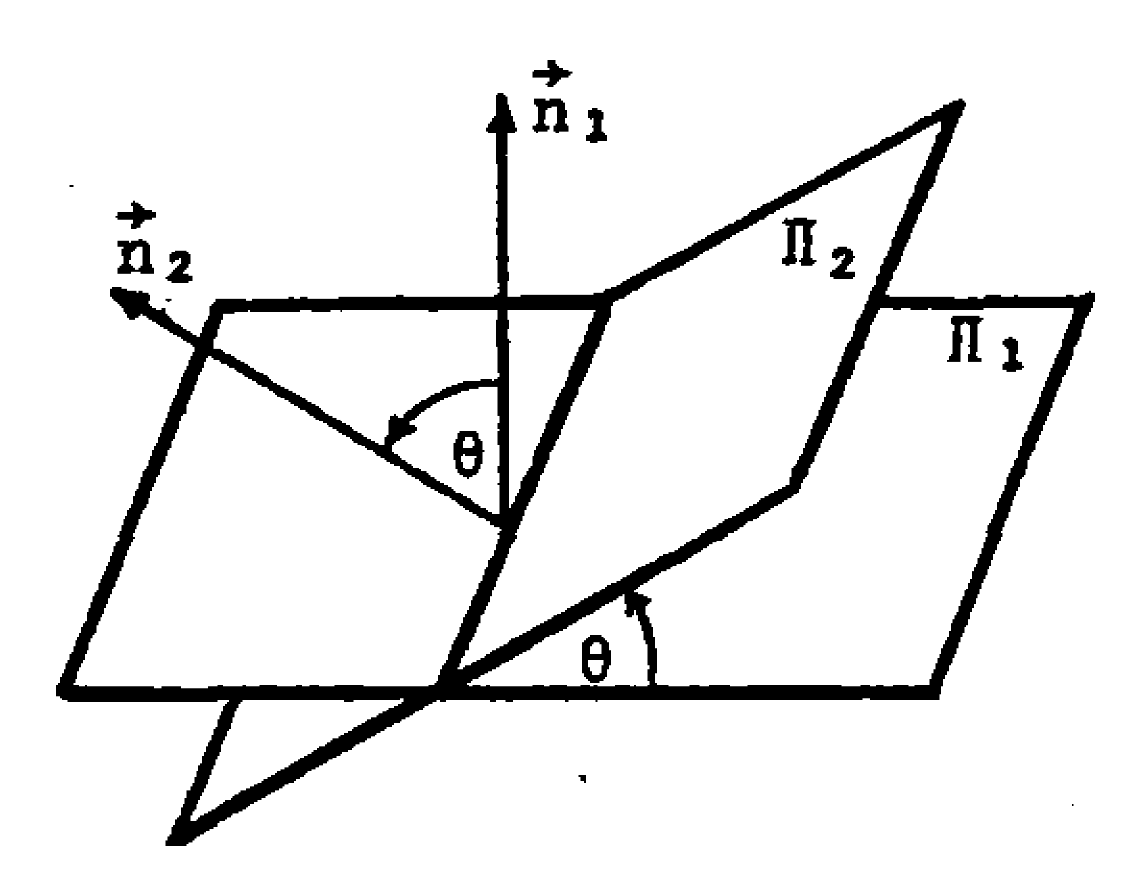


Figura 61

EJEMPLO 7. Hallar el coseno del ángulo diedro que forman los planos $\Pi_1: 4x+2y-6z+3=0$ y $\Pi_2: 2x-y+3z+5=0$.

Solución. Por inspección: $\vec{n}_1=(4,2,-6)$ y $\vec{n}_2=(2,-1,3)$

$$\rightarrow \quad \text{Cos}\theta = \frac{(4,2,-6).(2,-1,3)}{\sqrt{16+4+36}\ \sqrt{4+1+9}} = \frac{8-2-18}{\sqrt{56}\ \sqrt{14}}$$

$$\therefore \text{Cos}\theta = -3/7$$

1.62 ANGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Dados una recta $L: P=P_1+t\vec{a}$ y un plano Π de normal n, se define el ángulo entre L y Π al complemento del ángulo que forma el vector de dirección de L con la normal al plano Π.

En efecto, en la Figura 62, se observa claramente que: $\alpha=90^\circ-\theta$

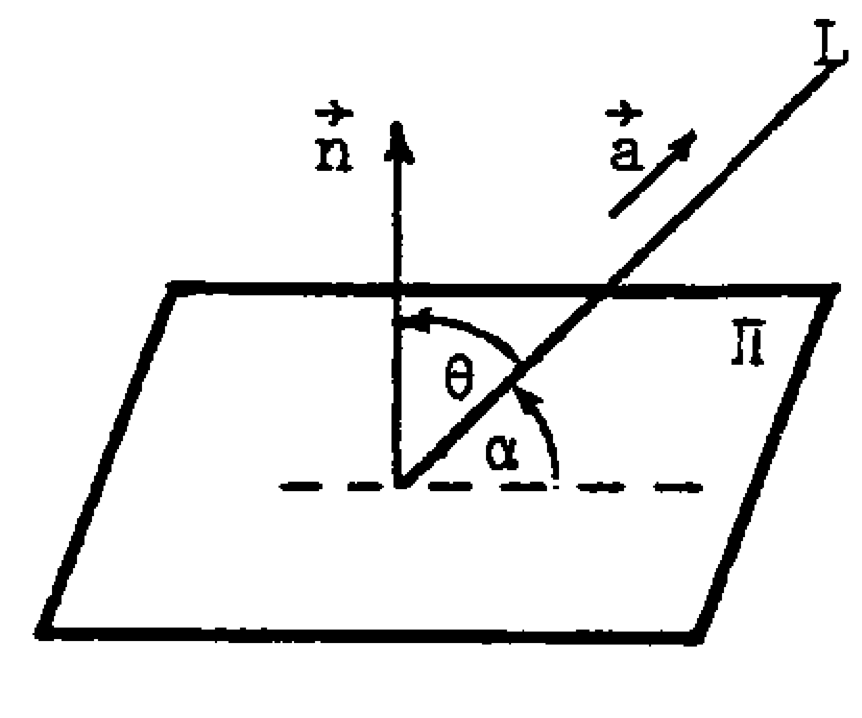


Figura 62

$$\rightarrow \quad \text{Sen}\alpha = \text{Cos}\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{||\vec{a}||\cdot||\vec{n}||}$$

EJEMPLO 8. Hallar el ángulo que forma la recta $L: \begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ con el plano coordenado XOY.

Solución. Un vector de dirección de la recta L es:

$$\vec{a} = \vec{n}_1\times\vec{n}_2 = (2,1,-1)\times(1,1,1) = (2,-3,1)$$

Para el plano XOY: $\vec{n}=\vec{k}=(0,0,1)$

$$\rightarrow \quad \text{Sen}\alpha_1 = \frac{(2,-3,1).(0,0,1)}{(\sqrt{14})(\sqrt{1})} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore \ \alpha_1 = \text{arcSen}(1/\sqrt{14}$$

1.63 PROYECCION ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Se denomina proyección ortogonal de una recta $L:P=P_1+t\vec{a}$, sobre un plano Π, de normal $\vec{n}$, a la intersección del plano Π con el plano Π_1, de ecuación $\Pi_1=\{P/P=P_1+\alpha\vec{a}+\beta\vec{n}\}$, el cual es perpendicular al plano Π. (Figura 63)

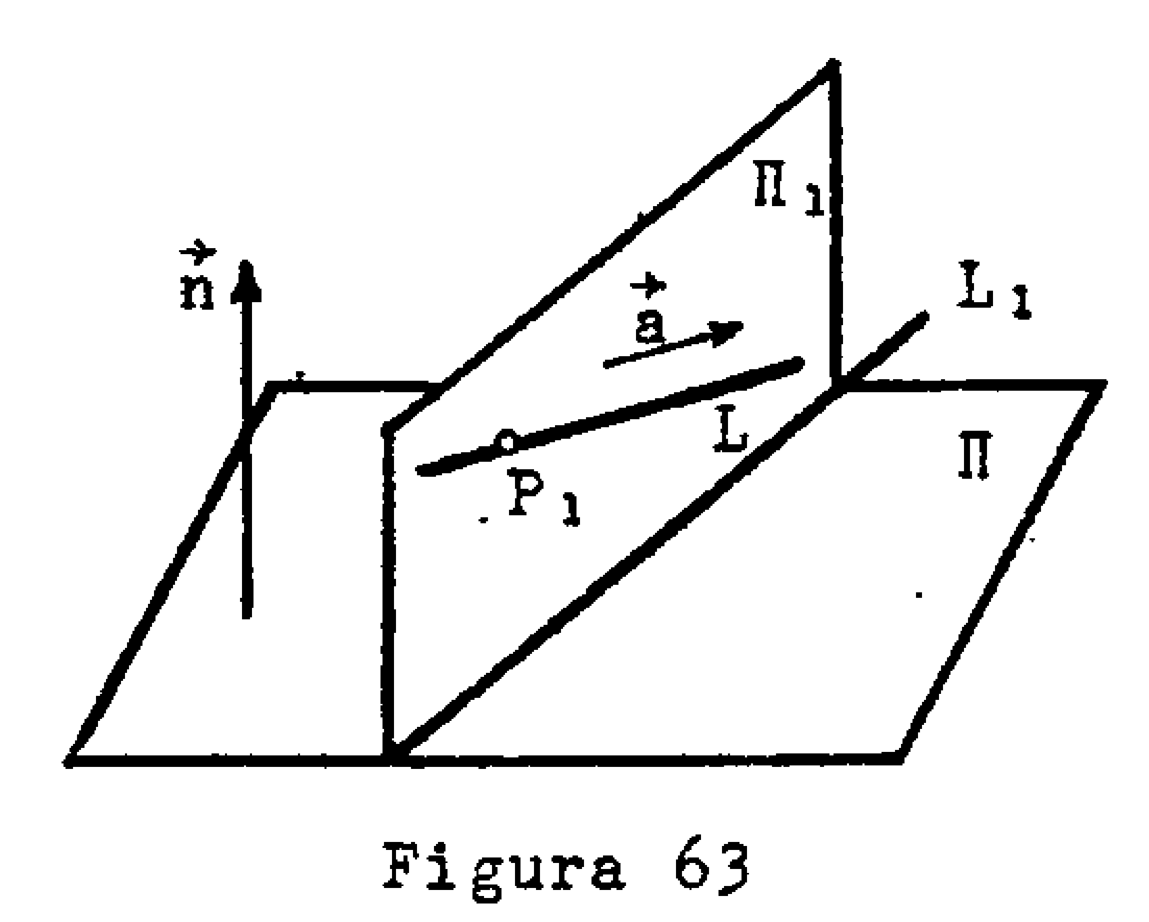


Figura 63

EJEMPLO 9. Hallar las ecuaciones de la proyección de la recta $L: \begin{cases} 5x-4y-2z-5=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$, sobre el plano $\Pi:2x-y+z-1=0$.

Solución. Por inspección: $\vec{n}_1=(5,-4,-2)$, $\vec{n}_2=(1,0,2)$, $\vec{n}=(2,-1,1)$

Un vector de dirección de la recta L es:

$$\vec{a} = \vec{n}_1\times\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4(2,3,-1)$$

La normal del plano Π_1 formado por $\vec{a}$ y $\vec{n}$ es:

$$\vec{n}_1 = \vec{a}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-4,-8)$$

Luego, la ecuación del plano Π_1 es: $2x-4y-8z+D=0$

Elegimos un punto cualquiera de L, tal como $P_1(0,-7/4,1)$

Si $P_1\in\Pi_1 \rightarrow 2(0)-4(-7/4)-8(1)+D=0$, de donde: $D=1$

$$\therefore \ \Pi_1:2x-4y-8z+1=0$$

Como $L_1\in(\Pi\cap\Pi_1)$, entonces las ecuaciones de la proyección de L sobre el plano Π son: $L_1: \begin{cases} 2x-4y-8z+1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$

EJERCICIOS

1. Obtener una ecuación paramétrica vectorial de la recta de intersección de los pares de planos cuyas ecuaciones se dan.

   a) $\Pi_1: 2x+3y-z=0$, $\Pi_2: y-3z+4=0$ Rp. $P=(1,0,\frac{4}{3})+t(-9,6,2)$

   b) $\Pi_1: 3x+y-z-6=0$, $\Pi_2: 4x-2y-3z+2=0$ Rp. $P=(1,3,0)+t(-1,1,-2)$

   c) $\Pi_1: x+y+3z-1=0$, $\Pi_2: 2x-3y+z-7=0$ Rp. $P=(2,-1,0)+t(2,1,-1)$

2. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano cuyas intersecciones con los ejes X, Y y Z son -1, 3 y 5 respectivamente, y que pasa por S(0,1,-1). Rp. $15x-5y-3z+2=0$

3. Hallar el volumen de la pirámide limitada por el plano $\Pi: 2x-3y+6z-12=0$ y por los planos coordenados. (Sug. $V=1/6(|abc|)$).
   Rp. $V=8u^3$

4. Hallar la ecuación del plano que intercepta al eje OZ el segmento $c=-5$ y es perpendicular al vector $\vec{v}=(-2,1,3)$.
   Rp. $2x-y-3z-15=0$

5. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $2x-2y+4z-5=0$ y que intercepta en los ejes coordenados OX y OY los segmentos $a=-2$ y $b=2/3$. Rp. $x-3y-2z+2=0$

6. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos $3x-4y+z+6+k(2x-3y+z+2)=0$ y es equidistante de los puntos S(3,-4,-6) y T(1,2,2). Rp. $x-2y+z-2=0$, $x-5y+4z-20=0$

7. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos $10x-8y-15z+56+k(4x+y+3z-1)=0$, cuya distancia al punto C(3,-2,-3) es igual a 7. Rp. $2x-3y-6z+19=0$

8. Determinar los valores de m y n para que el plano $5x+my+4z+n=0$ pertenezca al haz de planos: $3x-7y+z-3+k(x-9y-2z+5)=0$.
   Rp. $m=-5$, $n=-11$

9. Averiguar si el plano $\Pi: 5x-9y-2z+12=0$ pertenece al haz de planos $2x-3y+z-5+k(x-2y-z-7)=0$. Rp. No pertenece

10. Averiguar si el punto $M(3,2,-1)$ está situado en el ángulo agudo u obtuso formado por los planos $x-2y+3z-5=0$ y $4x-3y+2z+5=0$. Rp. M está situado dentro del ángulo obtuso

11. Hallar la ecuación del plano que divide por la mitad el ángulo diedro formado por los planos $2x-y+2z-3=0$ y $3x+2y-6z-1=0$, en que está situado el punto $M(1,2,-3)$. Rp. $23x-y-4z-24=0$

12. Averiguar para qué valor de D la recta $L: \begin{cases} 2x+3y-z+D=0 \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$

corta: a) el eje X , b) el eje Y , c) el eje Z.

Rp. a) -4, b) 9, c) 3

13. Hallar en el haz: $2x-3y+z-3+k(x+3y+2z+1)=0$ un plano que: a) sea paralelo al eje OX , b) sea paralelo al eje OZ.

Rp. a) $9y+3z+5=0$, b) $3x-9y-7=0$

14. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos $4x+13y-2z-60+k(4x+3y+3z-30)=0$ y recorta del ángulo coordenado OXY un triángulo de área igual a $6u^2$.

Rp. $4x-3y+6z-12=0$, $12x-49y+6z+21=0$

15. Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta $L: \begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-3y+2z-2=0 \end{cases}$, sobre el plano $\Pi: x+2y+3z-5=0$.

Rp. $L: \begin{cases} x-8y+5z-3=0 \\ x+2y+3z-5=0 \end{cases}$

16. Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta $L: \begin{cases} x+2y-3z-5=0 \\ 2x-y+z+2=0 \end{cases}$, sobre los planos coordenados.

Rp. $\begin{cases} 7x-y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 5x-z-1=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 5y-7z-12=0 \\ x=0 \end{cases}$

17. Se dan el plano $\Pi: x+y-z+1=0$ y la recta $L: x=1, \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, con la particularidad de que $L\varepsilon\Pi$ (compruébese). Se pide:

a) calcular el $\text{Sen}(\sphericalangle \Pi, L)$ y las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano. Rp. $M(1,-6,-4)$

b) escribir la ecuación de un plano que pase por la recta L y es perpendicular al plano Π. Rp. $3x-y+2z-1=0$

c) escribir las ecuaciones de la proyección de la recta L sobre el plano Π.

Rp. $L_1: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$

1.64 INTERSECCION DE RECTAS Y PLANOS

Dados una recta L y un plano Π en el espacio hay tres posibles configuraciones (Figura 64), o bien la recta es paralela al plano pero no interseca, o bien es paralela pero está completamente contenida en el plano, o bien interseca al plano en un sólo punto.

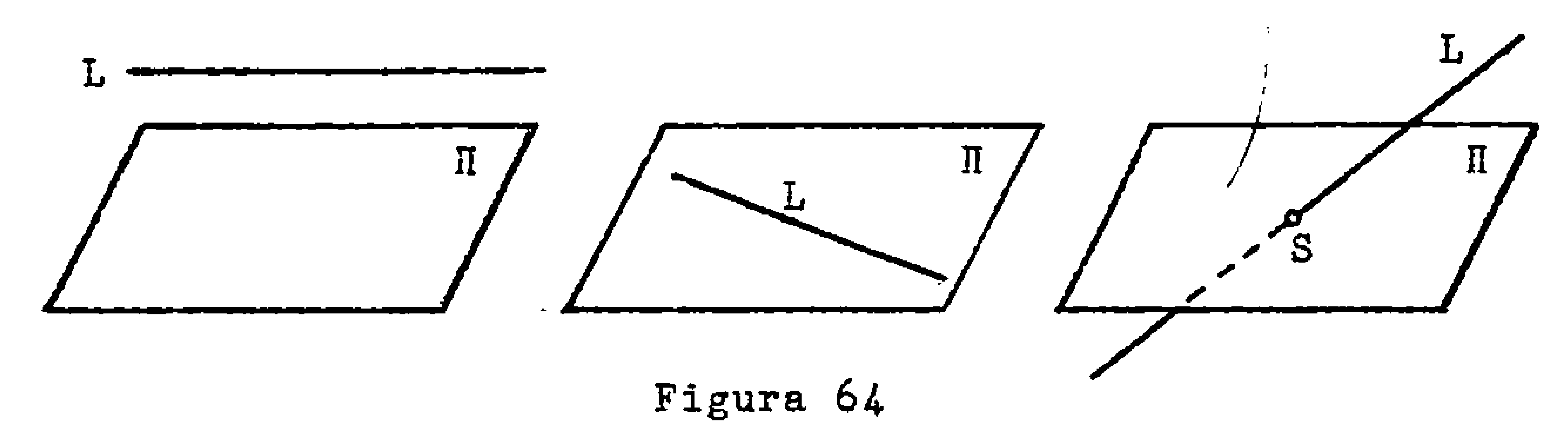


Figura 64

Los siguientes ejemplos ilustran como obtener la intersección de una recta L con un plano Π.

EJEMPLO 1. Hallar las coordenadas del punto S de intersección del plano $\Pi: x+4y-z+5=0$ y la recta $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$

Solución. Por inspección, las ecuaciones paramétricas de la recta son: $x=1+t$, $y=-2+2t$, $z=3+4t$

Si $S\in L \rightarrow S=(1+t,-2+2t,3+4t)$ (1)

y como $S\in\Pi \rightarrow (1+t)+4(-2+2t)-(3+4t)+5=0$, de donde: $t=1$

Luego, en (1), obtenemos: $(L\cap\Pi) = S(2,0,7)$

EJEMPLO 2. Hallar la intersección de la recta $L: P=(-5,1,3)+r(2,-2,3), r\in R$ con el plano $\Pi: P=(1,3,-2)+\alpha(1,-2,3)+\beta(2,1,-2)$, $\alpha,\beta\in R$.

Solución. El vector normal al plano es:

$\vec{n} = (1,-2,3)\times(2,1,-2) = (1,8,5)$

Si $P(x,y,z)\in\Pi \rightarrow (\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{n} = 0 \leftrightarrow \vec{P}.\vec{n} = \vec{P}_1.\vec{n}$

$\rightarrow (x,y,z).(1,8,5) = (2,3,-2).(1,8,5)$

de donde: $\Pi: x+8y+5z-15=0$

Si $S\in L \rightarrow \exists r\in R$ tal que: $S=(-5+2r,1-2r,3+3r)$ (1)

Como $S\in\Pi \rightarrow (-5+2r)+8(1-2r)+5(3+3r)-15=0$, de donde: $r=-3$

Luego, en (1), se tiene: $(L\cap\Pi) = S(-11,7,-6)$

Veamos ahora, algunos ejemplos de problemas mixtos relativos a la ecuación del plano y a las ecuaciones de la recta.

EJEMPLO 3. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $S(1,-2,1)$ y es perpendicular a la recta

$$L:\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$$

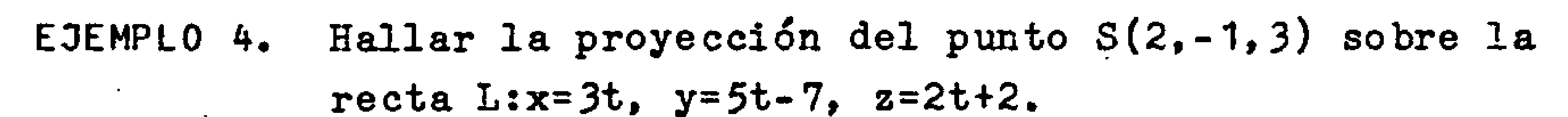
Solución. El vector de dirección de la recta L es la normal al plano buscado, esto es:

$$\vec{a} = \vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,3)$$

Si $P(x,y,z)\in\Pi \rightarrow (\vec{P}-\vec{S})\cdot\vec{n}=0 \rightarrow \vec{P}\cdot\vec{n}=\vec{S}\cdot\vec{n}$

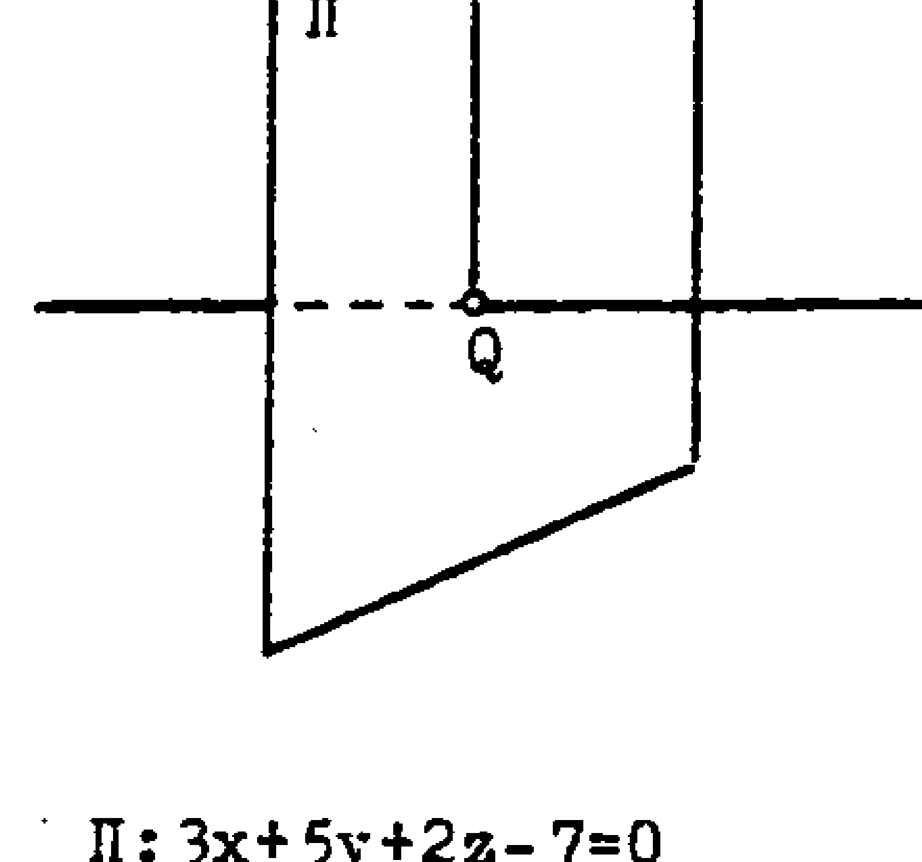
$\rightarrow (x,y,z)\cdot(1,2,3) = (1,-2,1)\cdot(1,2,3)$

$\Pi: x+2y+3z=0$


EJEMPLO 4. Hallar la proyección del punto $S(2,-1,3)$ sobre la recta $L: x=3t,\ y=5t-7,\ z=2t+2$.

Solución. La proyección de S sobre la recta L es el pie de la perpendicular bajada de S sobre dicha recta, y se encuentra en la intersección de la recta con el plano que contiene al punto S y es perpendicular a L. Esto es, si $P(x,y,z)\in\Pi \rightarrow (\vec{P}-\vec{S})\cdot\vec{n}=0$

$\rightarrow \vec{P}\cdot\vec{n} = \vec{S}\cdot\vec{n}$



donde $\vec{n}$ es el vector de dirección de L, o sea: $\vec{n}=(3,5,2)$

$\rightarrow (x,y,z)\cdot(3,5,2) = (2,-1,3)\cdot(3,5,2) \leftrightarrow \Pi: 3x+5y+2z-7=0$

Si $Q\in L \rightarrow \exists t\in R$ tal que: $Q=(3t,5t-7,2t+2)$ (1)

Pero $Q\in\Pi \rightarrow 3(3t)+5(5t-7)+2(2t+2)-7=0$, de donde: $t=1$

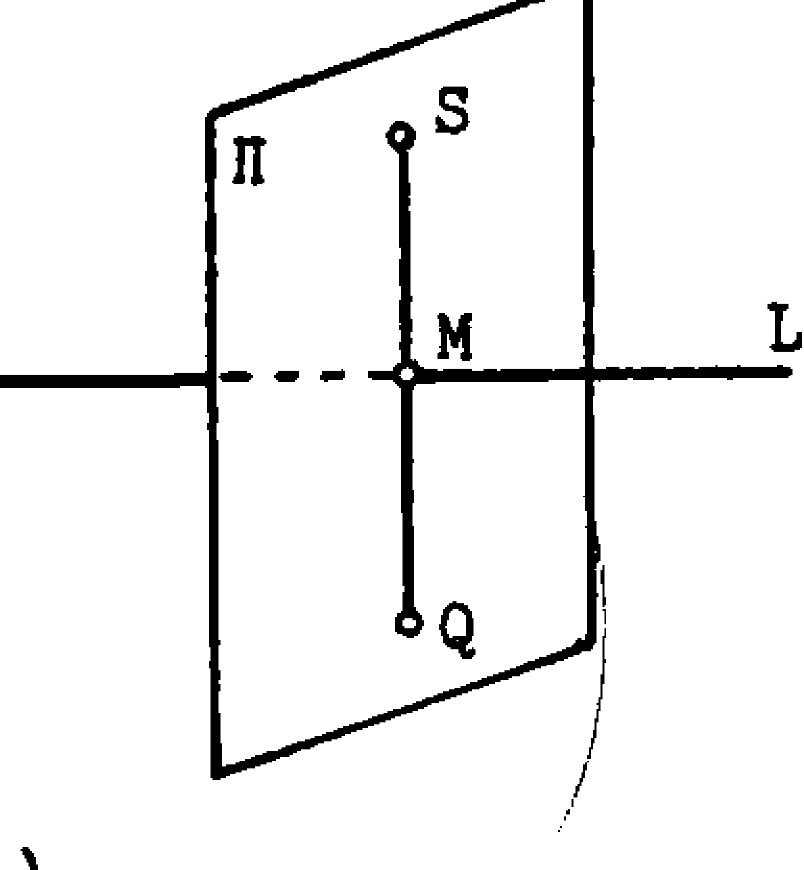
Sustituyendo en (1) obtenemos:

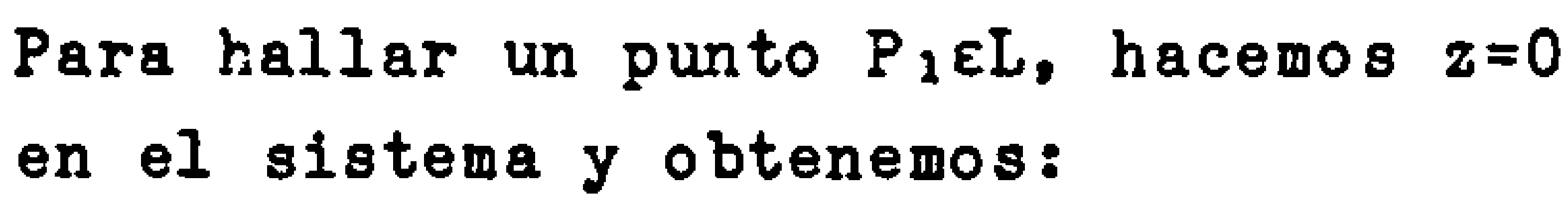
$$Q(3,-2,4)$$

EJEMPLO 5. Hallar el punto Q simétrico al punto S(4,1,6) respecto de la recta L: $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$

Solución. El vector de dirección de L es:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3(2,-2,1)$$





Para hallar un punto $P_1 \in L$, hacemos z=0 en el sistema y obtenemos:

$(x-y+12=0) \cap (2x+y+3=0) = P_1(-5,7,0)$

Luego: $L: x=-5+2t\ ,\ y=7-2t\ ,\ z=t$

Si $M \in L \rightarrow \exists t \in R$ tal que: $M=(-5+2t,7-2t,t)$ (1)

La ecuación del plano Π que contiene al punto S y es perpendicular a L es: $(\vec{P}-\vec{S}).\vec{a}=0 \leftrightarrow \vec{P}.\vec{a} = \vec{S}.\vec{a}$

$\leftrightarrow (x,y,z).(2,-2,1)=(4,1,6).(2,-2,1)$

$\leftrightarrow \Pi: 2x-2y+z-12=0$

Como $M \in \Pi \rightarrow 2(-5+2t)-2(7-2t)+t = 0$, de donde: t=4

Sustituyendo en (1) obtenemos: M(3,-1,4)

Dado que M equidista de S y Q $\rightarrow M = \frac{1}{2}(Q+S)$

$\rightarrow 2(3,-1,4) = (x+4,y+1,z+6) \leftrightarrow x=2\ ,\ y=-3\ ,\ z=2$

$\therefore Q(2,-3,2)$

EJEMPLO 6. Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos S(3,0,2) y T(4,1,-1) y que es paralelo a la recta L: $\begin{cases} x-2y+z-2=0 \\ 2x+3y-2z-3=0 \end{cases}$

Solución. Sea $\vec{v}=\overline{ST}=(4,1,-1)-(3,0,2)=(1,1,-3)$

El vector de dirección de L es:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (2,4,7)$$

Entonces la normal al plano Π es:

$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{a} = (1,1,-2)\times(2,4,7) = (19,-10,3)$

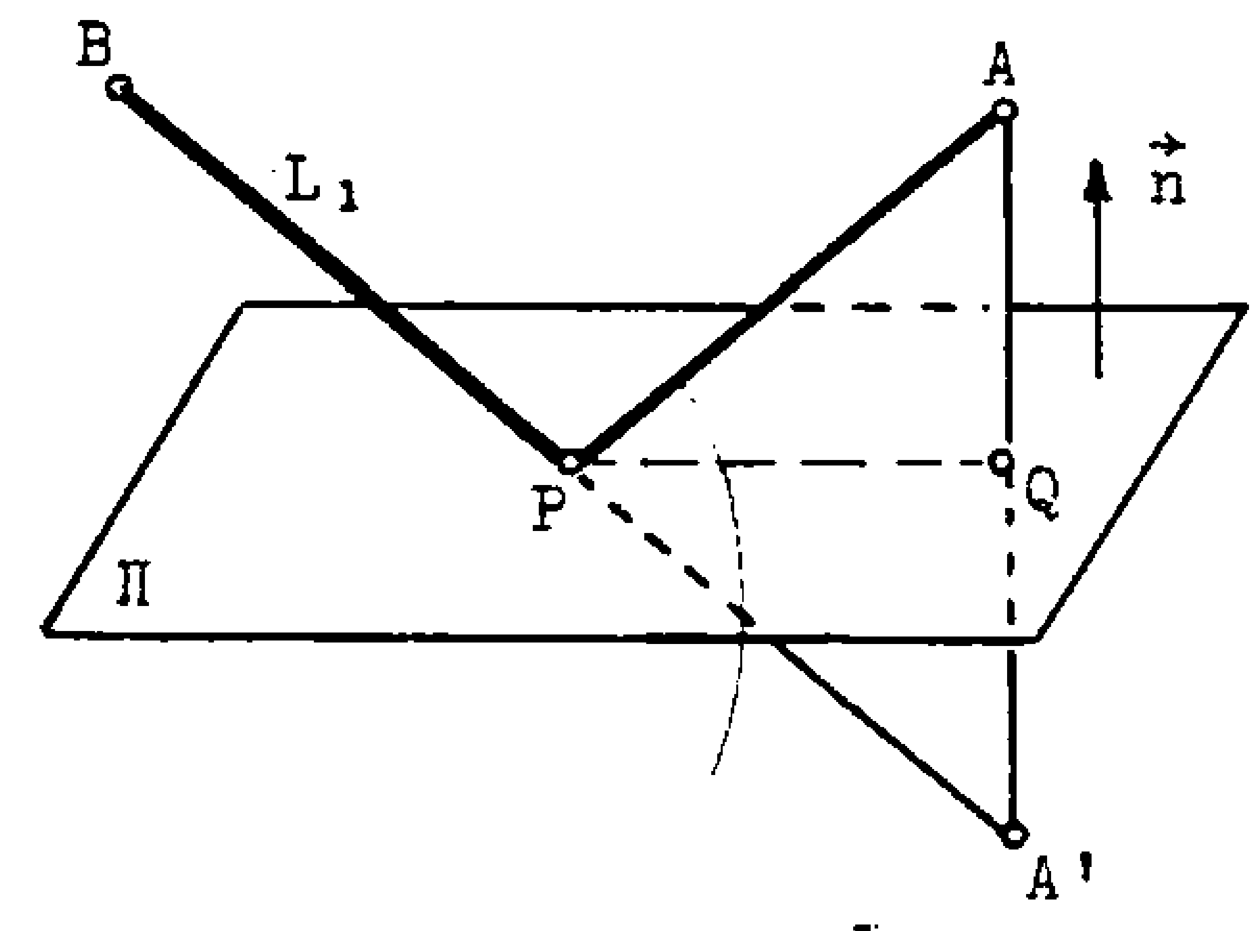
Si $S \in \Pi \rightarrow (\vec{P}-\vec{S}).\vec{n}=0 \leftrightarrow \vec{P}.\vec{n}=\vec{S}.\vec{n}$

$\leftrightarrow (x,y,z).(19,-10,3) = (3,0,2).(19,-10,3)$

$\leftrightarrow \Pi: 19x-10y+3z-63=0$

EJEMPLO 7. Hallar en el plano $\Pi: 2x-3y+3z-17=0$ un punto P de modo que la suma de sus distancias a los puntos A(3,-4,7) y B(-5,-14,17) sea mínima.

Solución. El punto P buscado se halla en la intersección del plano Π con la recta q' pasa por los puntos B y A', simétrico de A respecto al plano Π.



La recta que pasa por A, perpendicular al plano Π, tiene por ecuación:

$L_1: P=(3,-4,7)+r(2,-3,3),\ r\in R$

Si $Q\in L_1 \rightarrow \exists r\in R$ tal que: $Q=(3+2r,-4-3r,7+3r)$ (1)

Pero $Q\in\Pi \rightarrow 2(3+2r)-3(-4-3r)+3(7+3r)-17=0$, de donde: $r=-1$

Luego, en (1): $Q=(1,-1,4)$

Además, Q equidista de A y A' $\rightarrow Q = \frac{1}{2}(A+A')$

$\rightarrow A' = 2Q-A = 2(1,-1,4)-(3,-4,7) = (-1,2,1)$

Un vector de dirección de la recta que pasa por B y A' es:

$\vec{v} = \overline{BA'} = (-1,2,1)-(-3,-14,17) = 4(1,4,-4)$

Entonces su ecuación es $L_2: P=(-1,2,1)+t(1,4,-4),t\in R$

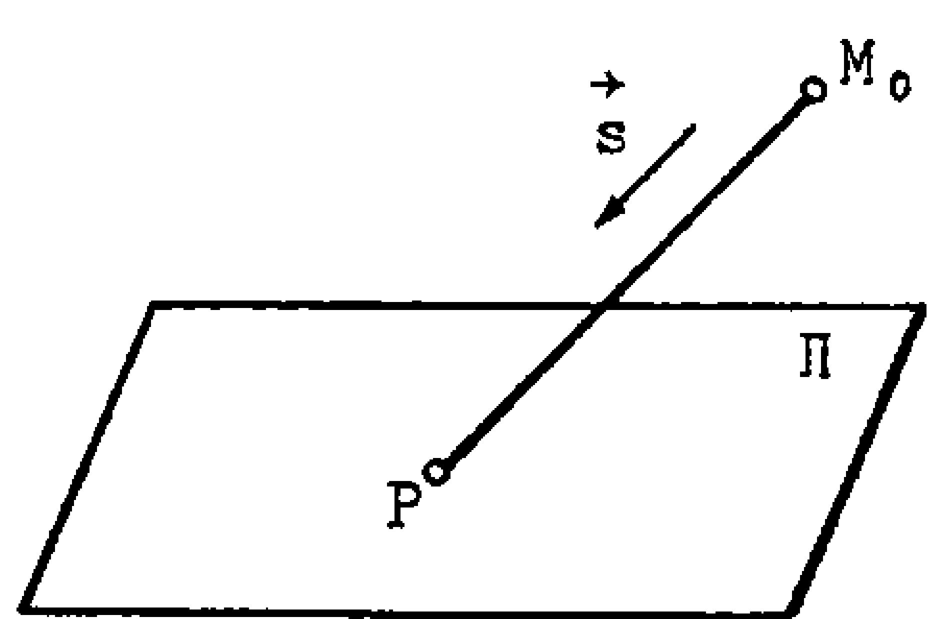
Si $P\in L_2 \rightarrow \exists t\in R$ tal que: $P=(-1+t,2+4t,1-4t)$ (2)

también $P\in\Pi \rightarrow 2(-1+t)-3(2+4t)+3(1-4t)-17=0$, de donde: $t=-1$

Finalmente en (2), obtenemos: $P=(-2,-2,5)$

EJEMPLO 8. La posición inicial del punto M(x,y,z), en un movimiento uniforme rectilíneo en dirección del vector $\vec{s}=(-2,2,1)$, es $M_0(15,-24,-16)$; la velocidad es v=12. Tras verificar que la trayectoria del punto M corta al plano $\Pi: 3x+4y+7z=17$, hallar: a) el punto P de su intersección, b) la longitud del segmento $\overline{M_0P}$, c) el tiempo que se necesita para que el punto M haga el recorrido desde M_0 hasta P.

Solución. a) La ecuación vectorial de la trayectoria es:



$L=\{(15,-24,-16)+t(-2,2,1),t\in R\}$

Si $P\in L \rightarrow P=(15-2t,-24+2t,-16+t)$ (1)

$P\in\Pi \rightarrow 3(15-2t)+4(-24+2t)+7(-16+t)=17$

de donde: $t=20\in R$

Entonces L corta a Π. Luego, en (1): $P=(-25,16,4)$

b) $\overline{M_0P} = (-25,16,4)-(15,-24,-16) = 20(-2,2,1)$

Espacio recorrido: $e = ||\overline{M_0P}|| = 20\sqrt{4+4+1} = 60$

c) Tiempo: $t = \frac{e}{v} = \frac{60}{12} = 5$ unidades de tiempo.

EJEMPLO 9. Un rayo luminoso parte del punto $A(-3,8,5)$ y sigue la dirección de la recta $L_1=\{(1,0,1)+t(-1,2,1), t\varepsilon R\}$, llega al espejo dado por el plano $\Pi: x+y+z=4$. Hallar la ecuación vectorial del rayo reflejado.

Solución. Ecuación del rayo luminoso

$L_2=\{(-3,8,5)+r(-1,2,1), r\varepsilon R\}$

Si $\{S\}\varepsilon L \rightarrow S = (-3-r, 8+2r, 5+r)$

Pero $\{S\}\varepsilon\Pi \rightarrow (-3-r)+(8+2r)+(5+r)=4$

de donde: $r=-3 \rightarrow S=(0,2,2)$

La ecuación de la recta que pasa por A, perpendicular al plano Π, es:

$L_3=\{(-3,8,5)+s(1,1,1), s\varepsilon R\}$

Si $\{B\}\varepsilon L \rightarrow B=(-3+s, 8+s, 5+s)$

$\{B\}\varepsilon\Pi \rightarrow (-3+s)+(8+s)+(5+s)=4$

de donde: $s=-2 \rightarrow B=(-5,6,3)$

B equidista de A y C $\rightarrow B = \frac{1}{2}(A+C) \rightarrow C=2B-A$

$\rightarrow C=2(-5,6,3)-(-3,8,5)=(-7,4,1)$

Dirección del rayo reflejado: $\vec{v} = \overline{CS} = (0,2,2)-(-7,4,1)=(7,-2,1)$

Por tanto, su ecuación es: $L=\{(0,2,2)+t(7,-2,1), t\varepsilon R\}$

EJEMPLO 10. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $S(1,4,-2)$ y dista una unidad de la recta $L=\{(2,6,5)+t(2,-4,0), t\varepsilon R\}$.

Solución. Sea la ecuación del plano

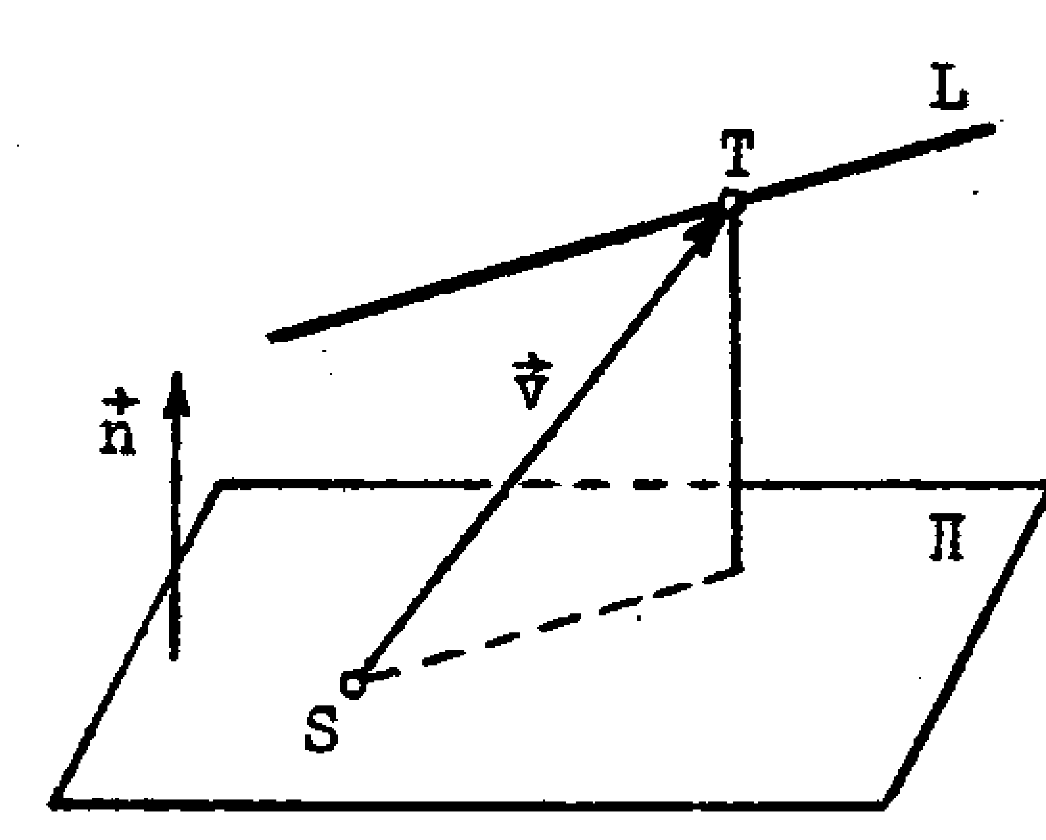
$* \; \Pi: x+By+Cz+D=0 \qquad (1)$

Si $d(L,\Pi)=1 \rightarrow \frac{|\vec{n}.\vec{v}|}{||\vec{n}||} = 1 \rightarrow |\vec{n}.\vec{v}|=||\vec{n}||$

$\vec{v} = \overline{ST} = (2,6,5)-(1,4,-2) = (1,2,7)$

$\vec{n} = (1,B,C)$

Entonces: $|(1,B,C).(1,2,7)|=\sqrt{1+B^2+C^2}$



Siendo $L \perp \vec{n} \rightarrow (2,-4,0).(1,B,C)=0 \leftrightarrow 2-4B=C \rightarrow B=1/2$

De la ecuación anterior obtenemos: $|1+2B+7C| = \sqrt{1+B^2+C^2}$

Sustituyendo el valor de B resulta: $192C^2+112C+11=0$

$\leftrightarrow C_1=-1/8$ ó $C_2=-11/24$

Si $\{S\}\epsilon\Pi \rightarrow 1+4B-2C+D=0$

Luego, para $B=1/2$ y $C_1=-1/8 \rightarrow D_1=-13/4$

para $B=1/2$ y $C_2=-11/24 \rightarrow D_2=-47/12$

En consecuencia, sustituyendo en (1) obtenemos:

$$\Pi_1: 8x+4y-z-26=0 \quad \text{ó} \quad \Pi_2: 24x+12y-11z-94=0$$

(*) Nota. En ocasiones en que se hace uso de la ecuación general del plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$, es aconsejable considerar como la unidad a cualquiera de los coeficientes A, B, C o D, de preferencia A, con esto se logra eliminar una incógnita y facilitar todas las operaciones realizables.

EJEMPLO 11. Hallar la ecuación del plano que pasa a través de la recta $L=\{(1,8,1)+t(1,-3,1), t\epsilon R\}$ y forma un ángulo de 60° con el plano $\Pi_1: 2x-y+z=7$.

Solución. Sea el plano $\Pi: x+By+Cz+D=0$ (1)

cuya normal es $\vec{n}=(1,B,C)$

Si $\{L\}\epsilon\Pi \rightarrow (1,8,1)\epsilon\Pi \rightarrow 1+8B+C+D=0$ (2)

$\{L\}\epsilon\Pi \rightarrow \vec{a}.\vec{n}=0 \rightarrow (1,-3,1).(1,B,C)=0$

$\rightarrow 1-3B+C=0 \rightarrow C=3B-1$ (3)

Sustituyendo (3) en (2) se tiene: $D=-11B$ (4)

Un vector normal al plano Π_1 es $\vec{n}_1=(2,-1,1)$

Si Π y Π_1 forman un ángulo de 60° $\rightarrow \text{Cos}60^\circ = \dfrac{\vec{n}.\vec{n}_1}{||\vec{n}||\ ||\vec{n}_1||}$

o sea: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{(1,B,C).(2,-1,1)}{\sqrt{1+B^2+C^2}\sqrt{4+1+1}} \rightarrow 2(2-B+C) = (\sqrt{6})(\sqrt{1+B^2+C^2})$

Sustituyendo el valor de (3) se tiene:

$2(2-B+3B-1) = (\sqrt{6})(\sqrt{1+B^2+(3B-1)^2}$, de donde: $11B^2-13B+2=0$

$\leftrightarrow B_1=1$ ó $B_2=2/11$

Luego, en (3) y (4) obtenemos: $C_1=2$ ó $C_2=-5/11$

$D_1=-11$ ó $D_2=-2$

Finalmente, en (1), las ecuaciones de los planos buscados son:

$$\Pi_1: x+y+2z-1=0 \quad \text{ó} \quad \Pi_2: 11x+2y-5z-22=0$$

EJEMPLO 12. Hallar la ecuación del plano que pasa por A(1,3,0) y B(4,0,0) y hace un ángulo de 30° con el plano Π_1: x+y+z-1=0.

Solución. Sea el plano buscado, $\Pi: x+By+Cz+D=0$ (1)
cuya normal es: $\vec{n}=(1,B,C)$

Si $\{A\}\epsilon\Pi \rightarrow 1+3B+D=0$ (2)

$\{B\}\epsilon\Pi \rightarrow 4+D=0 \rightarrow D=-4$, luego en (2): B=1

La normal al plano Π_1 es $\vec{n}_1=(1,1,1)$

$$\rightarrow \text{Cos}30^{\circ} = \frac{\vec{n}.\vec{n}_1}{||\vec{n}||\ ||\vec{n}_1||} \leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(1,B,0).(1,1,1)}{\sqrt{1+B^2+C^2}\sqrt{1+1+1}}$$

Para B=1 obtenemos: $5C^2-16C+2=0 \leftrightarrow C = \frac{1}{5}(8\pm3\sqrt{6})$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de los planos son:

$$\Pi: 5x+5y+(8\pm3\sqrt{6})z-20=0$$

EJEMPLO 13. Dado el plano $\Pi: x-2y+3z=0$ y la recta $L_1: \frac{x+4}{4} = \frac{8-z}{3}$, y=-1; hallar la ecuación de la recta que pasa por A(0,2,-1), es paralelo al plano Π y corta a la recta L_1.

Solución. Por inspección: $\vec{n}=(1,-2,3)$
y $L_1=\{(-4,-1,5)+r(4,0,-3), r\epsilon R\}$

Si $\{P_1\}\epsilon L_1 \rightarrow P_1=(-4+4r,-1,5-3r)$

El vector de dirección de L es

$\vec{a} = \overline{AP_1} = (-4+4r,-1,5-3r)-(0,2,-1)$
$= (-4+4r,-3,6-3r)$ (1)

Como $L||\Pi \rightarrow \vec{a}.\vec{n}=0$

$\rightarrow (-4+4r,-3,6-3r).(1,-2,3)=0$, de donde: r=4

Luego, en (1): $\vec{a}=(12,-3,-6)=3(4,-1,-2)$

$$\therefore L = \{(0,2,-1)+t(4,-1,-2), t\epsilon R\}$$

EJEMPLO 14. Hallar la ecuación cartesiana de un plano que contenga a la recta $L=\{(1,2,-3)+t(1,-4,2), t\epsilon R\}$ y se encuentra a una distancia de $8/\sqrt{41}$ unidades del punto T(2,-4,-5).

Solución. Sea el plano $\Pi: x+By+Cz+D=0$ (1)
$\rightarrow \vec{n}=(1,B,C)$

Si $\{L\}\epsilon\Pi \rightarrow (1,2,-3)\epsilon\Pi \rightarrow 1+2B-3C+D=0$ (2)

$\{L\}\epsilon\Pi \rightarrow (1,-4,2).(1,B,C)=0$, de donde: $B = \frac{1}{4}(1+2C)$ (3)

Sustituyendo (3) en (2) resulta: $D = \frac{1}{2}(4C-3)$ (4)

Si $d(T,\Pi) = \frac{8}{\sqrt{41}} \rightarrow \frac{|2-4B-5C+D|}{\sqrt{1+B^2+C^2}} = \frac{8}{\sqrt{41}}$

Sustituyendo los valores de (3) y (4) obtenemos:

$$100C^2+36C-11=0 \leftrightarrow C_1=1/6 \text{ ó } C_2=-11/30$$

Si $C_1=1/6 \rightarrow B_1=1/3$ y $D_1=-7/6$
$C_2=-11/30 \rightarrow B_2=1/15$ y $D_2=-67/30$

Luego, en (1), las ecuaciones de los planos buscados son:

$$\Pi_1:6x+2y+z-7=0 \text{ ó } \Pi_2:30x+2y-11z-67=0$$

EJEMPLO 15. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela a los planos $\Pi_1:3x+12y-3z-5=0$ y $\Pi_2:3x-4y+9z+7=0$, y que corta a las rectas:

$$L_1: \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3} \quad , \quad L_2: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

Solución. Por inspección, las normales a los planos dados son: $\vec{n}_1=(3,12,-3)=3(1,4,-1)$ y $\vec{n}_2=(3,-4,9)$

y las ecuaciones vectoriales de las rectas dadas son:

$L_1=\{(-5,3,-1)+r(2,-4,3),r\in R\}$
$L_2=\{(3,-1,2)+s(-2,3,4),s\in R\}$

Sea $L:P=P_1+t\vec{a}$, $t\in R$, la ecuación vectorial de la recta buscada, donde: $\vec{a}=(a,b,c)$

Dado que: $L||\Pi_1 \rightarrow \vec{a}.\vec{n}_1=0 \rightarrow a+4b-c=0$
$L||\Pi_2 \rightarrow \vec{a}.\vec{n}_2=0 \rightarrow 3a-4b+9c=0$

Resolviendo el sistema para a y b obtenemos: $a=-2c$ y $b=(3/4)c$

Luego: $\vec{a} = (-2c,\frac{3}{4}c,c) = -\frac{c}{4}(8,-3,-4)$

Sin perder generalidad, podemos elegir: $\vec{a}=(8,-3,-4)$

Si $P_1\varepsilon(L\cap L_1) \rightarrow P_1\varepsilon L_1 \rightarrow P_1=(-5+2r,3-4r,-1+3r)$
$P_2\varepsilon(L\cap L_2) \rightarrow P_2\varepsilon L_2 \rightarrow P_2=(3-2s,-1+3s,2+4s)$

Como $P_1P_2||\vec{a} \rightarrow P_2-P_1 = k\vec{a}$

$\rightarrow (8-2s-2r,-4+3s+4r,3+4s-3r) = k(8,-3,-4)$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 8-2s-2r = 8k \rightarrow s+r+4k = 4 \\ -4+3s+4r = -3k \rightarrow 3s+4r+3k = 4 \\ 3+4s-3r = -4k \rightarrow 4s-3r+4k = -3 \end{cases}$$

de donde obtenemos: $r=1$, $s=-1 \rightarrow P_1=(-3,-1,2)$

$\therefore L:P=(-3,-1,2)+t(8,-3,-4) \leftrightarrow x=-8t-3,\ y=-3t-1,\ z=-4t+2$

EJERCICIOS

1 Hallar la ecuación del plano que pasa por S(1,1,1) y es perpendicular a la recta L: $\begin{cases} 2x-y+z=5 \\ x+2y+2z=5 \end{cases}$ Rp. $4x+3y-5z-2=0$

2. Hallar el punto Q que es simétrico al punto S(2,-5,7) respecto de la recta que pasa por los puntos A(5,4,6) y B(-2,-17,-1). Rp. Q=(4,1,-3)

3. Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos S(1,2,3) y T(3,-1,0) y que es paralela a la recta de intersección de los planos $x+y+z=3$ y $x+2y-3z+5=0$. Rp. $9x+13y-7z-14=0$

4. Obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto S(-6,1,-3) y que es perpendicular a la recta cuyos cosenos directores son todos iguales. Rp. $x+y+z+8=0$

5. Una recta L que contiene al punto S(2,-5,8) es perpendicular al plano $\Pi: x-2y+3z-8=0$. Hallar las coordenadas del punto de intersección de L y Π. Rp. (0,-1,2)

6. Hallar las coordenadas del punto de intersección del plano $\Pi: 2x+y+z=6$ y la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a Π. Rp. (2,1,1)

7. Hallar la proyección del punto S(5,2,-1) sobre el plano $\Pi: 2x-y+3z+23=0$. Rp. Q(1,4,-7)

8. Hallar el punto Q que es simétrico al punto S(1,3,-4) respecto del plano $\Pi: 3x+y-2z=0$. Rp. Q(-5,1,0)

9. Hallar en el plano XOY un punto P de modo que la suma de sus distancias a los puntos A(-1,2,5) y B(11,-16,10) sea mínima. Rp. P(3,-4,0)

10. Hallar en el plano $\Pi: 2x+3y-4z-15=0$ un punto P de modo que la diferencia de sus distancias a los puntos A(5,2,-7) y B(7,-25,10) sea máxima. Rp. P(-1,3,-2)

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ y es perpendicular al plano $3x+2y-z-5=0$. Rp. $x-8y-13z+9=0$

12. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta $L: x=x_0+at,\ y=y_0+bt,\ z=z_0+ct$, y es perpendicular al plano $\Pi_1: Ax+By+Cz+D=0$ se puede representar en la forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

13. La posición inicial del punto $M(x,y,z)$, en un movimiento uniforme rectilíneo, es $M_0(28,-30,-27)$; la velocidad es $v=12.5$ y la dirección es la de la perpendicular bajada del punto M_0 al plano $\Pi: 15x-16y-12z+26=0$. Hallar las ecuaciones del movimiento del punto M y determinar: a) el punto de intersección de su trayectoria con este plano, b) el tiempo que se necesita para que el punto M haga el recorrido desde M_0 hasta P. c) La longitud del segmento M_0P. Rp. $x=28-7.5t$, $y=-30+8t$, $z=-27+6t$. a) $P(-2,2,-3)$, b) desde $t_1=0$ hasta $t_2=4$, c) $M_0P=50$

14. Sean las rectas $L_1=\{(-1,3,3)+r(0,-1,1), s\in R\}$, $L_2=\{(-1,3,1)+r(1,-1,1), r\in R\}$ y L una tercera recta que corta a L_1 y L_2, ortogonalmente. Si Π_1 es el plano que determina L_1 y L, y Π_2 es el plano que determina L_2 y L; hallar el coseno del ángulo que forman Π_1 y Π_2. Rp. $\sqrt{6}/3$

15. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $z=2$, que contenga al punto $P_1(1,-3,4)$ y haga un ángulo de 60° con el plano $\Pi: 2x-\sqrt{3}y+3z-5=0$. Rp. $x-1=0$, $x-4\sqrt{3}y-(1+12\sqrt{3})=0$

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por $T(2,-1,0)$ y forma un ángulo de 30° con el eje X. Rp. $x\pm\sqrt{3}y-(2\pm\sqrt{3})=0$

17. Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(1,3,0)$ y $B(4,0,0)$ y hace un ángulo de 30° con el plano $x+y+z-1=0$.
Rp. $5x+5y+(8\pm3\sqrt{6})z-20=0$

18. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $M_0(3,-2,-4)$ paralelamente al plano $\Pi: 3x-2y-3z-7=0$ y q' corta a la recta $L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$ Rp. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$

1.62 VECTORES EN n DIMENSIONES

Al estudiar el espacio de dos y tres dimensiones, notamos que tanto los vectores como los puntos se representan analíticamente mediante pares y ternas ordenadas de números reales respectivamente. Para los vectores, los números son las componentes, y para los puntos son las coordenadas. Por tanto, aun cuando en términos geométricos los puntos y los vectores en R^2 y R^3 son diferentes clases de objetos, analíticamente forman la misma clase es decir, pares y ternas ordenadas de números reales.
Dado que las n-adas ordenadas son una generalización de los pares y ternas ordenadas de números reales, podemos pensar las n-adas ordenadas como una generalización del concepto de punto o como una generalización del concepto de vector.

DEFINICION 18. Un vector de n dimensiones se define como una n-ada ordenada de números reales, es decir, un arreglo ordenado de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. El i-ésimo número se denomina la i-ésima componente del vector. Al conjunto de de todas las n-adas ordenadas se le denomina *espacio cartesiano de* n *dimensiones* y se denota mediante R^n.

Dado dos vectores en R^n: $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\vec{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, entonces:

$$\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_2 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

La suma $\vec{a}+\vec{b}$ se define como

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots\ldots, a_n+b_n)$$

y si r es un escalar, el múltiplo escalar se define como:

$$r\vec{a} = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)$$

El vector cero en R^n se define como el vector:

$$\theta = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

PROPIEDADES. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores en R^n, y s y tεR son escalares, entonces:

A_1: Si $\vec{a}\in R^n$ y $\vec{b}\in R^n$ $\rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b})\in R^n$ Cerradura
A_2: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ Conmutatividad
A_3: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ Asociatividad
A_4: $\vec{a}+\theta = \theta+\vec{a} = \vec{a}$ Elemento neutro
A_5: $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{a}-\vec{a} = \theta$ Inverso aditivo

P_1: $s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$
P_2: $s(\vec{a}+\vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$
P_3: $(s+t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$
P_4: $1\vec{a} = \vec{a}$

DEFINICION 19. Si $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ son vectores en R^n, entonces el *producto escalar* $\vec{a}.\vec{b}$ se define como:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

PROPIEDADES. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores en R^n y $t\in R$, un escalar, entonces:

E_1: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
E_2: $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{a} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$
E_3: $t(\vec{a}.\vec{b}) = (t\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(t\vec{b})$
E_4: $\vec{a}.\vec{a} = ||\vec{a}||^2 \geq 0$. Además: $\vec{a}.\vec{a}=0 \leftrightarrow \vec{a}=\theta$

Por analogía con las fórmulas conocidas para R^2 y R^3, la norma o longitud de un vector $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ en R^n se define como:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

EJEMPLO 1. Sean: $\vec{a}=(6,0,-1,3)$, $\vec{b}=(7,4,-3,-2)$ y $\vec{c}=(5,8,0,-7)$, determinar el vector $\vec{x}$ que satisface: $7\vec{x}+\vec{c} = 2\vec{a}-\vec{b}+\vec{x}$.

Solución. Restando $\vec{c}+\vec{x}$ a cada miembro de la ecuación dada tenemos: $(7\vec{x}+\vec{c})-(\vec{c}+\vec{x}) = (2\vec{a}-\vec{b}+\vec{x})-(\vec{c}+\vec{x})$

$$\rightarrow (7\vec{x}-\vec{x}) + (\vec{c}-\vec{c}) = 2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+(\vec{x}-\vec{x}) \qquad (A_3)$$

$\rightarrow\ 6\vec{x} + \theta = 3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\theta$ (A_5)

$\rightarrow\ 6\vec{x} = 3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ (A_4)

$= 3(6,0,-1,3)-(7,4,-3,-2)-(5,8,0,-7)$

$= (18,0,-3,9)+(-7,-4,3,2)+(-5,-8,0,7)$

$= (6,-12,0,18) = 6(1,-2,0,3)$

$\therefore\ \vec{x}=(1,-2,0,3)$

EJEMPLO 2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en R^n tales que: $||\vec{a}||=4$, $\vec{a}.\vec{b}=-6$ y $||\vec{b}||=5$. Hallar el valor de $x=(3\vec{a}+2\vec{b}).(2\vec{a}-3\vec{b})$.

Solución. $x = (3\vec{a}+2\vec{b}).2\vec{a} - (3\vec{a}+2\vec{b}).3\vec{b}$ (E_2)

$= 6\vec{a}.\vec{a} + 4\vec{b}.\vec{a} - 9\vec{a}.\vec{b} - 6\vec{b}.\vec{b}$ (E_2)

$= 6||\vec{a}||^2 + 4\vec{a}.\vec{b} - 9\vec{a}.\vec{b} - 6||\vec{b}||^2$ (E_1 y E_4)

$= 6||\vec{a}||^2 - 5\vec{a}.\vec{b} - 6||\vec{b}||^2$

$= 6(4)^2 - 5(-6) - 6(5)^2 = 96+30-150$

$\therefore\ x=-24$

1.63 Espacios Vectoriales

Sea $K=\{\alpha,\beta,\gamma, \ldots ,r,s,t,\ldots\}$ un cuerpo cuyos elementos llamaremos escalares y cuyas leyes de composición llamaremos adición y multiplicación.

Se dice que un conjunto no vacío $V=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}, \ldots ,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K, si está provisto de dos operaciones: una *interna* llamada *adición* (+) que provee a V de estructura de grupo conmutativo, se denota:

$$(\vec{a},\vec{b}) \rightarrow \vec{a}+\vec{b}$$

y posee las siguientes propiedades:

A_1: Si $\vec{a}\in V$ y $\vec{b}\in V \rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\in V$ — Cerradura

A_2: $\forall\vec{a},\vec{b}\in V$: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ — Conmutatividad

A_3: $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — Asociatividad

A_4: $\forall\vec{a}\in V$, $\exists(-\vec{a})$ tal que: $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \theta$
(Existencia del elemento *opuesto aditivo de* $\vec{a}$)

A_5: $\exists\theta\in V$ tal que $\forall\vec{a}\in V$: $\theta+\vec{a} = \vec{a}+\theta = \vec{a}$ — Elemento neutro θ

y una *externa* llamada *multiplicación por un escalar*, cuyo conjunto de operaciones es el conjunto K, que se denota:

$$(\lambda, a) \rightarrow \lambda a$$

y que satisface las siguientes propiedades:

M_1: Si $r \in K$ y $\vec{a} \in V \rightarrow r\vec{a} \in V$ Cerradura

M_2: $\forall r, s \in K$ y $\forall \vec{a} \in V$: $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$

M_3: $\forall r, s \in K$ y $\forall \vec{a} \in V$: $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$

M_4: $\forall r \in K$ y $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$: $r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$

M_5: Si 1 es el elemento neutro para la multiplicación en K, entonces $\forall \vec{a} \in V$: $1\vec{a} = \vec{a}$

Observación. El espacio vectorial V se denomina *real*, si en V la operación de multiplicación de vectores por un número viene definido sólo por los números reales R, y complejo, si dicha operación está definida por los números complejos C. Cuando no haya necesidad de referirnos a alguno de ellos en particular, hablaremos simplemente del cuerpo K, K es entonces R o C.

Ejemplos de Espacios Vectoriales.

(1) El conjunto R es un espacio vectorial sobre el cuerpo Q, cuando en R se considere la ley de composición adición como operación interna y la multiplicación de un racional por un real como ley de composición externa.

(2) El conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3 es un espacio vectorial sobre el cuerpo R de los reales.

En efecto, si $P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$Q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$

basta definir las siguientes leyes de composición:

Adición de polinomios:

A_1: $P(x)+Q(x) = (a_0+a_1x+a_1x^2+a_3x^3) + (b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)$

$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3$

Multiplicación de un polinomio por un número real:

M_1: $\lambda P(x) = \lambda(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = \lambda a_0+\lambda a_1x+\lambda a_2x^2+\lambda a_3x^3$

(3) El conjunto R^n $(n>1)$ de todos los vectores de n componentes $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x_i\in R$, es un espacio vectorial.
En efecto:
La suma $(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$
El elemento cero $\theta=(0,0,\dots,0)$
El opuesto de $\vec{x}$ es $-\vec{x}=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$
El producto de un escalar $\lambda\in R$ sobre un elemento de $\vec{x}$ de R^n está definida por:

$$\lambda\vec{x} = \lambda(x_1,x_2,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$$

La verificación de $A_1,\dots,A_5$ y $M_1,\dots,M_5$, hacen ver fácilmente que R^n es un espacio vectorial real.

(4) Sea Π cualquier plano que pasa por el origen en R^3. Mostrar que los puntos de Π forman un espacio vectorial bajo las operaciones ordinarias para vectores en R^3, adición y multiplicación por escalares.

Demostración. En efecto, se sabe que R^3 es un espacio vectorial bajo las operaciones de adición y multiplicación por escalares. Las propiedades A_2, A_3, M_2, M_3, M_4 y M_5 se verifican para todos los puntos de R^3, y por tanto para todos los puntos del plano Π. Por consiguiente, sólo es necesario mostrar las propiedades A_1, A_4 y M_1.
Dado que el plano Π pasa por el origen, su ecuación es de la forma: $\Pi: Ax+By+Cz=0$
Luego, si $P=(x_1,y_1,z_1)$ y $Q=(x_2,y_2,z_2)$ son puntos de Π, entonces:

$$Ax_1+By_1+Cz_1=0 \quad y \quad Ax_2+By_2+Cz_2=0$$

Sumando estas dos ecuaciones se tiene:

$$A(x_1+x_2) + B(y_1+y_2) + C(z_1+z_2) = 0$$

Esta igualdad indica que las coordenadas del punto $P+Q=(x_1+x_2, y_1+y_2,z_1+z_2)$ satisfacen A_1. Esto es:

$$P\in\Pi \ , \ Q\in\Pi \ \rightarrow \ (P+Q)\in\Pi$$

Multiplicando la ecuación $Ax_1+By_1+Cz_1=0$ por -1 resulta:

$$A(-x_1)+B(-y_1)+C(-z_1)=0$$

Por tanto, $-P=(-x_1,-y_1,-z_1)\in\Pi$ establece A_4.
Multiplicando la ecuación $Ax_1+By_1+Cz_1=0$ por r se tiene:

$$A(rx_1)+B(ry_1)+C(rz_1)=0$$

Luego, $rP = (rx_1, ry_1, rz_1) \in \Pi$ establece M_1

Por consiguiente, los puntos de Π forman un espacio vectorial.

(5) Sea S el conjunto de todos los puntos (x,y) en R^3 que pertenecen al primer cuadrante, es decir, todos los puntos tales que $x>0$, $y>0$.

El conjunto S no es un espacio vectorial bajo las operaciones ordinarias de R^3, dado que no se satisfacen las propiedades A_4 y M_1.

En efecto, $P=(2,1)\in S$, pero $(-1)P=(-2,-1)\notin S$

(6) Sea F el conjunto de las funciones reales que estan definidas en la totalidad de la recta real. Si $f=f(x)$ y $g=g(x)$ son dos de esas funciones y λ es un número real, definimos una adición de funciones $f+g$ y el múltiplo escalar λf según las fórmulas:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)\ ,\ \forall x\in R$$

Es decir, el valor de la función $f+g$ en x se obtiene sumando los valores de f y g en x (Figura 65). Así mismo el valor de λf en x es igual a λ por el valor de f en x (Figura 66). El conjunto F es un espacio vectorial bajo estas operaciones.

La función cero. $f(x)=0$, es la función constante cuya gráfica es la recta horizontal que pasa por (0,0).

Las condiciones de la definición de espacio vectorial pueden ser verificadas fácilmente.

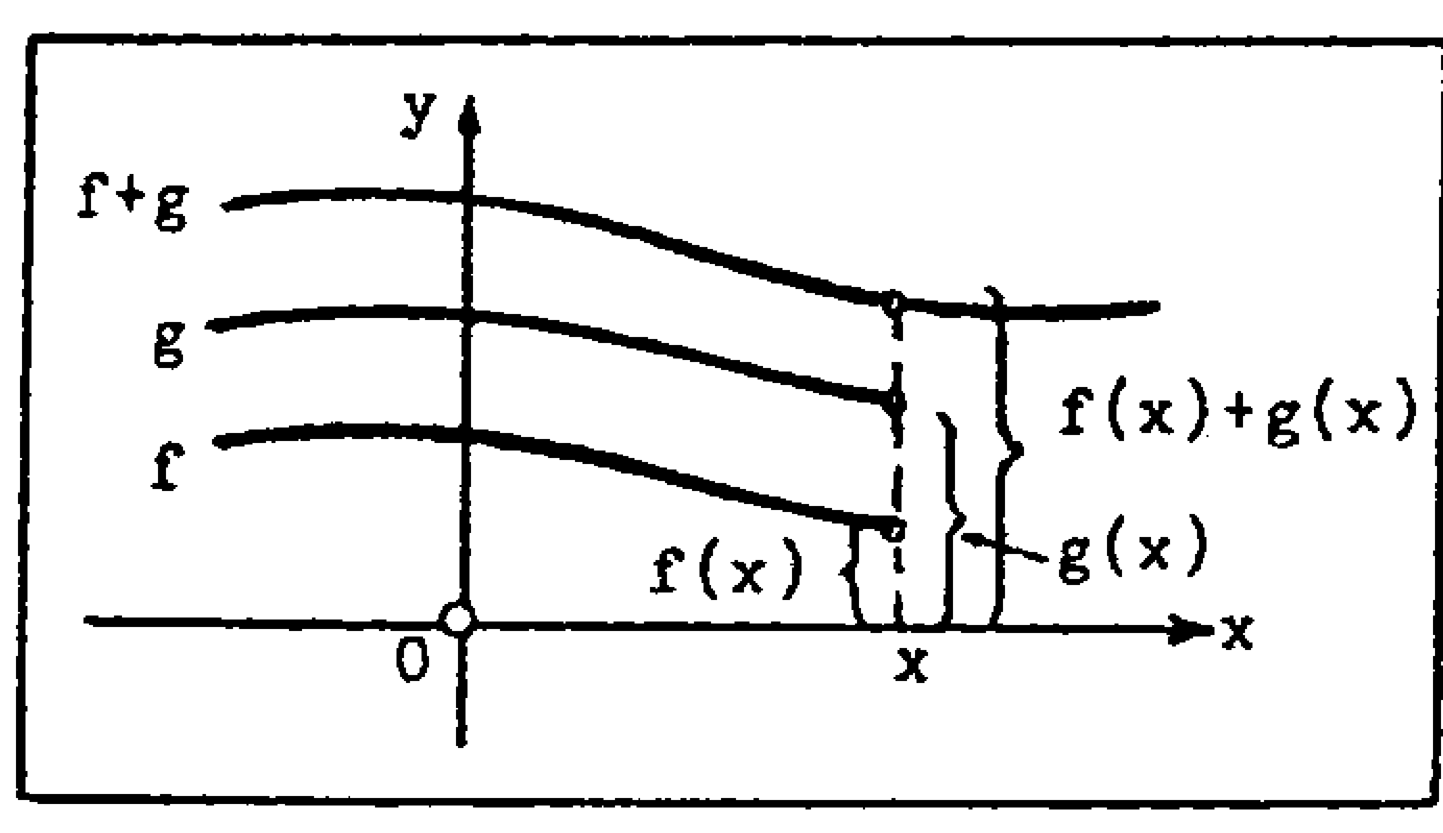


Figura 65

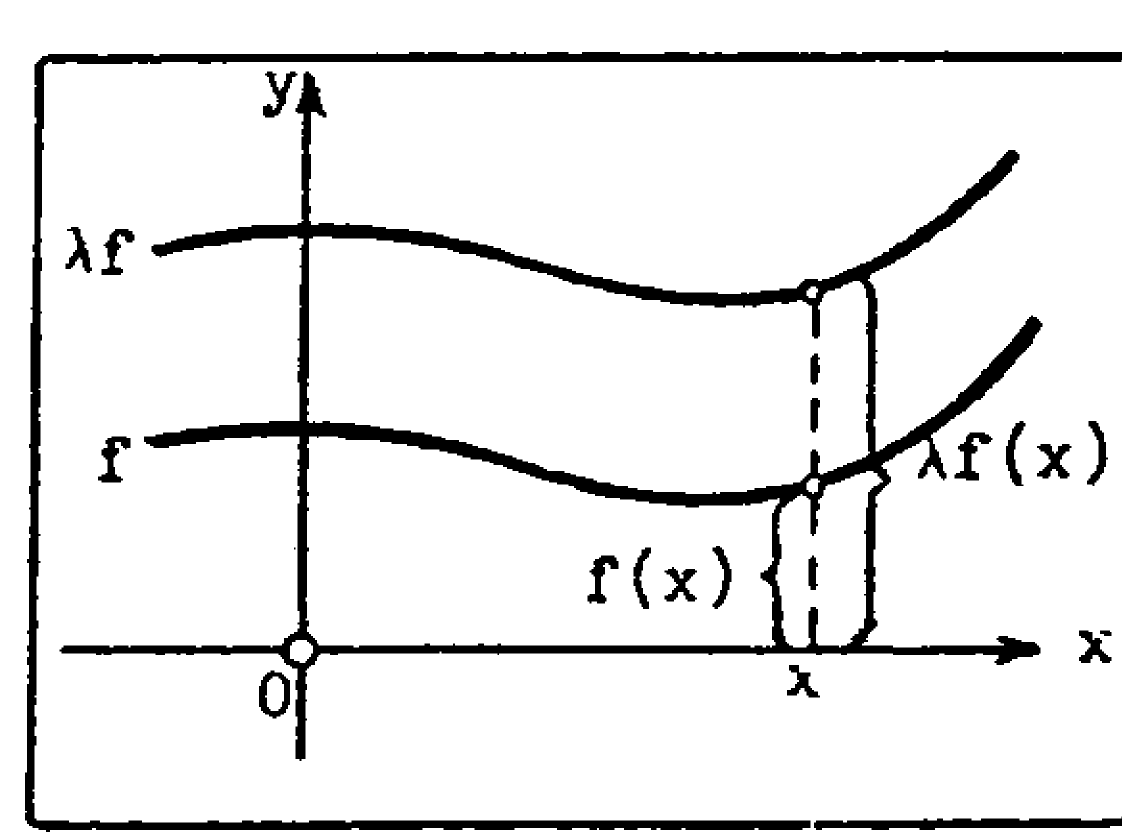


Figura 66

EJERCICIOS

1. Comprobar si los conjuntos siguientes son espacios vectoriales.
   a) El conjunto R^3 de todos los vectores geométricos.
   b) El conjunto P_n de todos los polinomios
   $$P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$
   de grado $\leq n-1$ con las operaciones de adición de polinomios y multiplicación de los mismos por los números, introducidos de un modo natural.
   c) El conjunto $M_{m\times n}$ de todas las matrices de dimensión $m\times n$.

2. Aclarar si los conjuntos siguientes son espacios vectoriales
   a) El conjunto R^1 de todos los vectores geométricos que son colineales a una recta fija. Rp. Si
   b) El conjunto de todos los vectores geométricos que satisfacen la condición $|x|>a$, donde $a>0$ es un número fijo. No
   c) El conjunto de todas las sucesiones convergentes. Rp. Si
   d) El conjunto de todas las sucesiones divergentes. Rp. No
   e) El conjunto de todos los vectores geométricos que parten del origen de coordenadas y cuyos extremos se ubican en una recta fija. Rp. Si, siempre que la recta pase por O.

En los ejercicios siguientes se presentan varios conjuntos con operaciones de adición y de multiplicación por un escalar. Determinar cuáles de estos conjuntos son espacios vectoriales. Para aquellos que no lo sean, diga que propiedades no se verifican.

3. El conjunto de todas las ternas de números reales (x,y,z) con las operaciones: $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ y $k(x,y,z)=(0,0,0)$. Rp. No, no se cumple M_5

4. El conjunto de todos los pares de números reales (x,y) con las operaciones: $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ y $k(x,y)=(2kx,2ky)$
   Rp. No, no se cumple M_2 y M_5

5. El conjunto de todos los pares de números reales de la forma (x,y), donde $x>0$ con las operaciones ordinarias en R^2.
Rp. No, no se cumple A_4 y M_1

6. El conjunto de todos los pares de números reales (x,y) con las operaciones: $(x,y)+(x',y')=(x+x'+1,y+y'+1)$ y $k(x,y)=(kx,ky)$.
Rp. No, no se cumple M_3 y M_4

7. El conjunto de todos los números reales positivos x con las operaciones $x+x'=xx'$ y $kx=x^k$.
Rp. Si

8. El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma: $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ con las operaciones matriciales ordinarias.
Rp. No, no se cumple A_1, A_4, A_5 y M_1

9. El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ con las operaciones matriciales ordinarias.
Rp. Si

10. El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma: $\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$ con las operaciones matriciales ordinarias. R. Si

1.64 SUBESPACIOS VECTORIALES

Con frecuencia, se tiene que un espacio vectorial W está contenido en otro V, y que la adición y la multiplicación por escalares del espacio vectorial W se lleva a cabo de manera igual a la de V. Cuando esto ocurre, se dice que el espacio vectorial W es *subespacio* del espacio vectorial V.

DEFINICION 20. Si W es un conjunto de uno o más vectores de un espacio vectorial V sobre K, entonces W es un subespacio de V si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

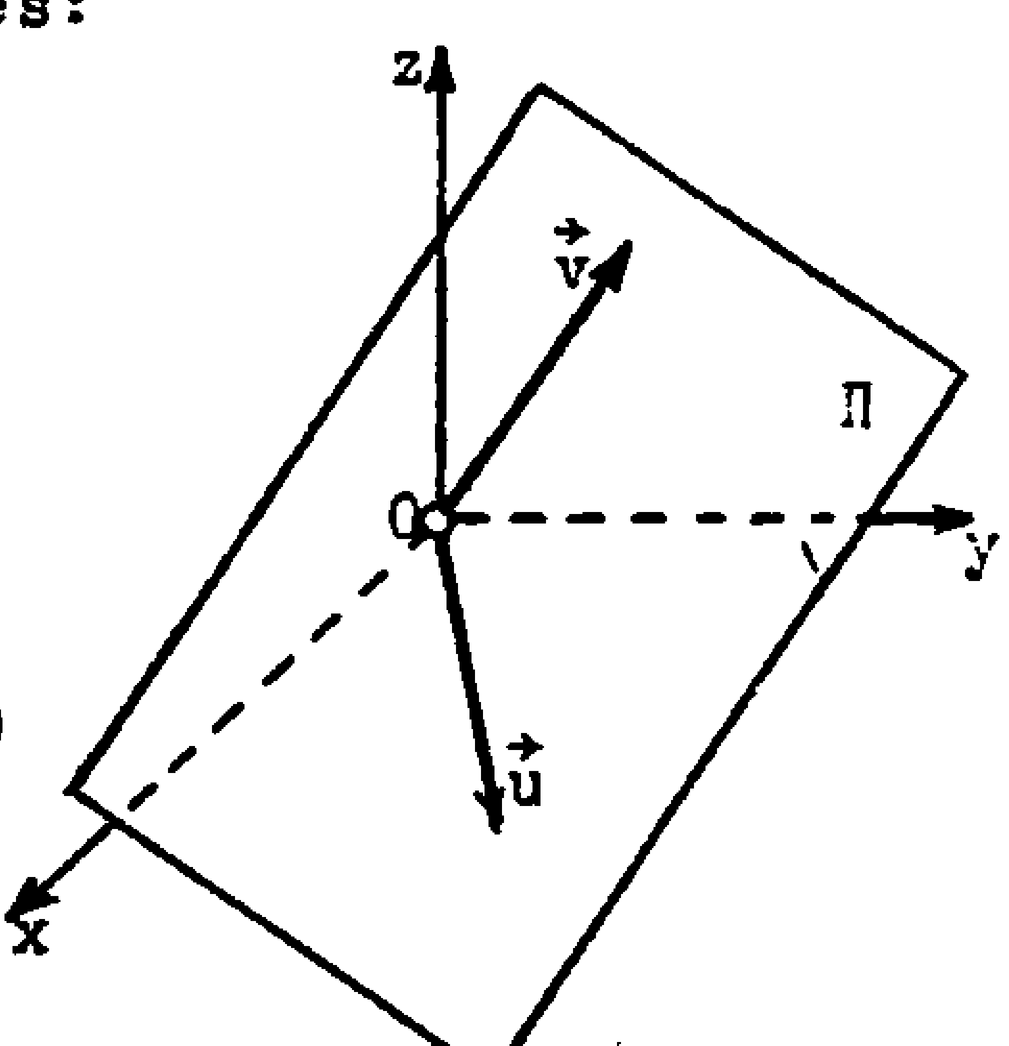
a) $W \neq \phi$, es decir, W contiene, por lo menos, un vector.
b) Si $\vec{a}\in W$ y $\vec{b}\in W \rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\in W$
c) Si $\lambda\in K$ y $\vec{a}\in W \rightarrow (\lambda\vec{a})\in W$

Decimos entonces que W es cerrado bajo la adición y cerrado bajo la multiplicación por un escalar.

Observación. Dado un espacio vectorial V, siempre se le puede considerar como subespacio de si mismo. Por lo tanto, cada espacio vectorial V contiene siempre los subespacios W_0 y V; a estos espacios se les llama *subespacios triviales* de V. Si W es un subespacio de V tal que $W \neq W_0$ ó $W \neq V$, entonces W se llama *subespacio no trivial* o *subespacio propio* de V. Si $W=\{\theta\}$, entonces W se llama el *subespacio cero*.

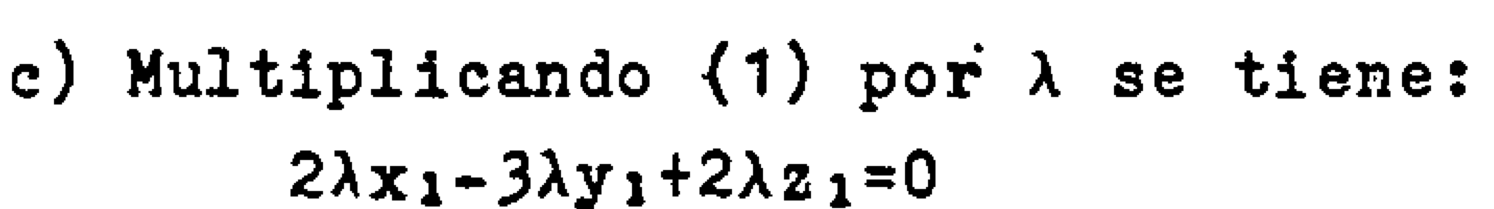
EJEMPLO 1. Sea el conjunto $W=\{(x,y,z)/2x-3y+2z=0\}$. Demostrar q' W es un subespacio propio o no trivial de R^3 y que W corresponde a un plano que pasa por el origen en el espacio tridimensional.

Demostración. En efecto, sea λ un escalar y sean $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)\varepsilon W$ y $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)\varepsilon W$. Entonces:



a) $W \neq \phi$, porque tiene al menos un elemento $\theta=(0,0,0)$, esto es:
$2(0)-3(0)+2(0)=0 \leftrightarrow 0=0$
Luego, $\theta \varepsilon W$

b) Si $\vec{a}\varepsilon W \rightarrow 2x_1-3y_1+2z_1=0$ (1)
$\vec{b}\varepsilon W \rightarrow 2x_2-3y_2+2z_2=0$
$\rightarrow \vec{a}+\vec{b} = 2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2)+2(z_1+z_2)=0$
Vemos que tiene la forma de W.
$\therefore \vec{a}\varepsilon W$ y $\vec{b}\varepsilon W \rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\varepsilon W$


c) Multiplicando (1) por λ se tiene:
$2\lambda x_1-3\lambda y_1+2\lambda z_1=0$

Tiene la forma de W, es decir, $\lambda\vec{a}$ vuelve a estar en W.

Observamos que si en W hacemos: $x=3,\ y=2,\ z=0$
$x=0,\ y=2,\ z=3$

en ambos casos se verifica la igualdad. Entonces W contiene a $\vec{u}=(3,2,0)$ y a $\vec{v}=(0,2,3)$, pero no contiene a $(1,0,1)\varepsilon R^3$. Por lo tanto, W es un subespacio propio o no trivial de R^3.
Como $\vec{u}$ no es múltiplo escalar de $\vec{v}$, W no puede corresponder a una recta que pase por O. En consecuencia, W corresponde a un plano Π que pasa por O.

DEFINICION 21. Se dice que un vector $\vec{v}$ es una *combinación lineal* de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, si es posible expresarlo en la forma:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$$

donde: λ_i, $i=1,2,\ldots n$, son escalares.

EJEMPLO 2. Sean los vectores en R^3: $\vec{a}=(3,1,-1)$ y $\vec{b}=(-2,1,3)$. Demostrar que el vector $\vec{v}=(8,1,-5)$ es una combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Demostración. En efecto, según la definición 21, deben existir escalares λ_1 y λ_2 tales que:

$\vec{v} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$

o sea: $(8,1,-5) = \lambda_1(3,1,-1) + \lambda_2(-2,1,3)$

$= (3\lambda_1-2\lambda_2, \lambda_1+\lambda_2, -\lambda_1+3\lambda_2)$

igualando las componentes correspondientes resulta:

$3\lambda_1-2\lambda_2=8$

$\lambda_1+\lambda_2=1$

$-\lambda_1+3\lambda_2=-5$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones del sistema obtenemos: $\lambda_1=2$ y $\lambda_2=-1$. Sustituyendo en la tercera ecuación vemos que se verifica la igualdad.

$$\therefore \vec{v} = 2\vec{a}-\vec{b}$$

EJEMPLO 3. Determinar si el vector $\vec{v}=(5,-1,4)$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(2,-1,3)$ y $\vec{b}=(3,5,-2)$.

Solución. Según la definición 21, deben existir escalares λ_1 y λ_2 tales que: $\vec{v} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$

o sea: $(5,-1,4) = \lambda_1(2,-1,3) + \lambda_2(3,5,-2)$

$= (2\lambda_1+3\lambda_2, -\lambda_1+5\lambda_2, 3\lambda_1-2\lambda_2)$

Igualando componentes: $2\lambda_1+3\lambda_2=5$

$-\lambda_1+5\lambda_2=-1$

$3\lambda_1-2\lambda_2=4$

El sistema de ecuaciones es inconsistente, es decir, no existen λ_1 y λ_2 que satisfagan a las tres ecuaciones.

Por lo tanto, $\vec{v}$ no es una combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

DEFINICION 22. Si $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ...,$\vec{v}_r$ son vectores de un espacio vectorial V, entonces:

a) El conjunto W de todas las combinaciones lineales de $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ es un subespacio de V.

b) W es el más pequeño de todos los subespacios que tienen como elementos a $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$, es decir, cualquier otro subespacio de V que tiene a $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ entre sus elementos, debe contener a W.

El espacio vectorial W generado por un conjunto de vectores $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r\}$ se denota mediante W=gen(S) o $\text{gen}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r\}$ y y se dirá que W es una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ o que W está generado por los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$.

Si V=gen(S) entonces se dice que el conjunto S *genera* a V, y S se llama un *conjunto de generadores* para V.

Ejemplos.

(1) El conjunto de vectores unitarios en R^n: $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ genera V.

En efecto: si
$$(1,0,,,,,0)=\vec{e}_1 \rightarrow (a_1,0,0,\ldots,0)=a_1\vec{e}_1$$
$$(0,1,0,\ldots0)=\vec{e}_2 \rightarrow (0,a_2,0,\ldots0)=a_2\vec{e}_2$$
$$(0,0,\ldots,1)=\vec{e}_n \rightarrow (0,0,0,\ldots,a_n)=a_n\vec{e}_n$$

Sumando estas igualdades resulta:
$$(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+ \ldots + a_n\vec{e}_n$$

$\rightarrow$ V es una combinación lineal de los vectores $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$
$$\therefore\ V=\text{gen}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$$

(2) Si V es el espacio de polinomios, entonces las potencias de x, genera a V.

En efecto, puesto que cada polinomio:
$$P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots +a_nx^n$$
es una combinación lineal de las potencias de x, el conjunto $\{x^0,x,x^2,x^3,\ldots,x^n\}$ genera a V.

(3) Para el conjunto $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\varepsilon R^4/x_2=0\}$ sus elementos se pueden escribir de la siguiente manera:

$$(x_1,0,x_3,x_4) = x_1(1,0,0,0)+x_3(0,0,1,0)+x_4(0,0,0,1)$$
$$= x_1\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4$$
$$S = gen\{(1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

Los vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$ y $\vec{e}_4$ constituyen el conjunto de generadores de S.

$$\therefore\ S = gen(\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$$

EJERCICIOS

1. Representar los vectores de R^2 por vectores $\overline{OP}$ del plano. Indicar gráficamente los siguientes subconjuntos de R^2 y decir si son o no son subespacios de R^2.

   a) Todos los vectores $t\vec{i}+2t\vec{j}$, donde $t\geq 0$.
   b) Todos los vectores $(1-t)\vec{i}+(2-2t)\vec{j}$, donde $t\varepsilon R$
   c) Todos los vectores $Lnt\vec{i}+Lnt^2\vec{j}$, donde $t>0$
   d) Todos los vectores $Sen(n\pi)\vec{i}+Cos(n\pi/2)\vec{j}$, donde $n=0,\pm1,\pm2$

2. Representar los vectores de R^3 por los vectores $\overline{OP}$ del espacio. Indicar gráficamente los subconjuntos siguientes de R^3 y decir si son o no son subespacios de R^3.

   a) Todos los vectores $t\vec{i}+t\vec{j}+t\vec{k}$, $t\varepsilon R$ — Rp. Si
   b) Todos los vectores $(2+t)\vec{i}+t\vec{j}+t\vec{k}$, $t\varepsilon R$ — Rp. No
   c) Todos los vectores $Sen2t\vec{i}+SentCost\vec{j}+3Sen2t\vec{k}$, $t\varepsilon R$ — Rp. No

3. En cada uno de los subconjuntos siguientes de R^4, determinar si el subconjunto es un subespacio.

   a) T: Todos los vectores $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tales que $x_1=x_2$
   b) U: Todos los $\vec{x}$ tales que $x_1=x_2$ y $x_1+x_2+x_3+x_4=0$
   c) W: Todos los $\vec{x}$ tales que: $x_1+x_2+x_3+x_4<0$

4. Utilice la definición 20 para determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de P_3.

   a) Todos los polinomios $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ para los cuales $a_0=0$. — Rp. Si
   b) Todos los polinomios $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ para los cuales $a_0+a_1+a_2+a_3=0$. — Rp. Si

Todos los polinomios $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ para los cuales a_0, a_1, a_2 y a_3 son enteros. Rp. No

5) Cuáles de los siguientes vectores son combinación lineal de $\vec{a}=(1,-1,3)$ y $\vec{b}=(2,4,0)$.
   a) $\vec{v}=(3,3,3)$ b) $\vec{v}=(4,2,6)$ c) $\vec{v}=(1,5,6)$
   Rp. a y b

6) Expresar los siguientes vectores como combinaciones lineales de $\vec{a}=(2,1,4)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$ y $\vec{c}=(3,2,5)$.
   a) $\vec{v}=(5,9,5)$ b) $\vec{v}=(2,0,6)$ c) $\vec{v}=(2,2,3)$
   Rp. a) $\vec{v}=3\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}$, b) $\vec{v}=4\vec{a}-2\vec{c}$, c) $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

7) Determinar si los vectores dados generan a R^3.
   a) $\vec{v}_1=(2,-1,3)$, $\vec{v}_2=(4,1,2)$, $\vec{v}_3=(8,-1,8)$ Rp. No
   b) $\vec{v}_1=(3,1,4)$, $\vec{v}_2=(2,-3,5)$, $\vec{v}_3=(5,-2,9)$, $\vec{v}_4=(1,4,-1)$ Rp. No
   c) $\vec{v}_1=(1,3,3)$, $\vec{v}_2=(1,3,4)$, $\vec{v}_3=(1,4,3)$, $\vec{v}_4=(6,2,1)$ Rp. Si

8) Determinar cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio generado por: $f=\text{Cos}^2x$ y $g=\text{Sen}^2x$
   a) Cos2x b) $3+x^2$ c) 1 d) Sen2x Rp. a y c

9) Sean $\vec{v}_1=(2,1,0,3)$, $\vec{v}_2=(3,-1,5,2)$ y $\vec{v}_3=(-1,0,2,1)$, cuáles de los siguientes vectores están en gen$\{v_1,v_2,v_3\}$?
   a) $(2,3,-7)$ b) $(0,0,0,0)$ c) $(1,1,1,1)$ d) $(-4,6,-13,4)$
   Rp. a, b y d

10) Hallar la ecuación del plano generado por los vectores $\vec{a}=(1,1,-1)$ y $\vec{b}=(2,3,5)$. Rp. $8x-7y+z=0$

11) Determinar si los siguientes polinomios generan a P_2.
   a) $1+2x-x^2$ c) $5+4x-x^2$
   b) $3+x^2$ d) $-2+2x-2x^2$

12) Determinar el conjunto de generadores para los siguientes conjuntos:
   a) $T=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3/x_3=2x_1\}$. Rp. $\{(1,0,2),(0,1,0)\}$
   b) $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4/x_2=x_1-x_3\}$.
   c) $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4/x_3=3x_2,\ x_4=2x_1\}$

1.68 INDEPENDENCIA LINEAL

Un conjunto de vectores $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial V se llama *linealmente dependiente* si existen los escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, no todos ceros, tales que:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \theta \qquad (1)$$

Si la ecuación (1) tiene una solución, a saber:

$$\alpha_1=0\ ,\ \alpha_2=0,\ \ldots,\alpha_n=0$$

entonces el conjunto $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ se llama *linealmente independiente*.

EJEMPLO 1. Demostrar que en el espacio R^n los vectores unitarios $\vec{e}_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots\ldots,\vec{e}_n$, son linealmente independientes (L.i)

Demostración. En efecto, si $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ son escalares tales q'

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \theta$$

$\rightarrow \alpha_1(1,0,0,\ldots,0)+\alpha_2(0,1,0,\ldots,0)+\ldots+\alpha_n(0,0,\ldots,1) = \theta$

$\rightarrow (\alpha_1,0,0,\ldots,0)+(0,\alpha_2,0,\ldots,0)+\ldots+(0,0,0,\ldots,\alpha_n) = (0,0,0,\ldots,0)$

$\rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n) = (0,0,0,\ldots,0)$

$\leftrightarrow \alpha_1=0\ ,\ \alpha_2=0\ ,\ \alpha_3=0\ ,\ \ldots\ \alpha_n=0$

$\therefore$ Los vectores $\vec{e}_i$ forman un conjunto L.i en R^n.

EJEMPLO 2. Determinar si el conjunto de vectores $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, donde $\vec{v}_1=(5,1,0,-1)$, $\vec{v}_2=(4,-1,3,4)$ y $\vec{v}_3=(2,-1,1,2)$ es L.d. ó L.i.

Solución. Si α_1,α_2 y α_3 son escalares tales que:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \theta$$

$\rightarrow \alpha_1(5,1,0,-1) + \alpha_2(4,-1,3,4) + \alpha_3(2,-1,1,2) = \theta$

$\leftrightarrow (5\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,3\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3) = (0,0,0,0)$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & (1) \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 & (2) \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 & (3) \\ -\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & (4) \end{cases}$$

De la ecuación (3): $\alpha_3=-3\alpha_2$. Si hacemos $\alpha_2=-t \rightarrow \alpha_3=3t$
Luego, en (2): $\alpha_1 = \alpha_2+\alpha_3 = -t+3t = 2t$

$$\rightarrow \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} = \{2t,-t,3t\}$$

El sistema tiene soluciones no triviales, por tanto, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ forman un conjunto linealmente dependiente.
En particular, si t=1, obtenemos:

$$2\vec{v}_1-\vec{v}_2+3\vec{v}_3 = \theta$$

TEOREMA. Sea V un espacio vectorial y sea S un subconjunto finito de V que tenga más de un elemento. Entonces S es linealmente dependiente si y sólo si algún $\vec{v}\varepsilon S$ es una combinación lineal de los demás.

Demostración. En efecto, sea $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$
Suponiendo que S es linealmente dependiente, entonces:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \theta$$

para escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, que no son todos cero.
Si $\alpha_i\neq 0 \rightarrow -\alpha_i\vec{v}_i = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$
y dividiendo entre α_i se obtiene:

$$\vec{v}_i = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_i})\vec{v}_1 + \ldots + (-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i})\vec{v}_{i-1} + (-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i})\vec{v}_{i+1} + \ldots+(-\frac{\alpha_n}{\alpha_i})\vec{v}_n$$

Por tanto, $\vec{v}_i$ es una combinación lineal de los vectores:

$$\vec{v}_1, \ldots,\vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots,\vec{v}_n \qquad (1)$$

Recíprocamente, si $\vec{v}_i$ es una combinación lineal de (1), entonces

$$\vec{v}_i = \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \alpha_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$$

Luego:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_{i-1}\vec{v}_{i-1} - \vec{v}_i + \alpha_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \theta$$

y no todos los coeficientes $\alpha_1, \ldots,\alpha_{i-1},-1,\alpha_{i+1}, \ldots,\alpha_n$ son cero. Por consiguiente, el conjunto $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ es linealmente dependiente.

Observaciones.

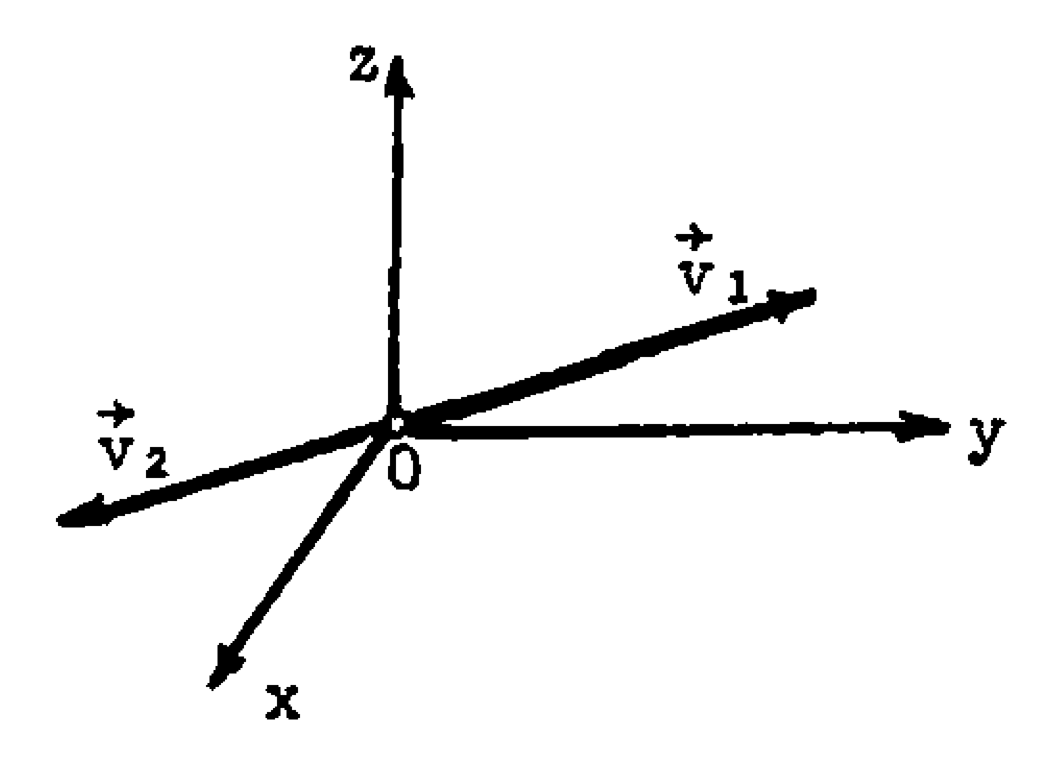
(1) Si $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores de V, entonces S es

linealmente dependiente si y sólo si un vector de S es múltiplo escalar del otro.

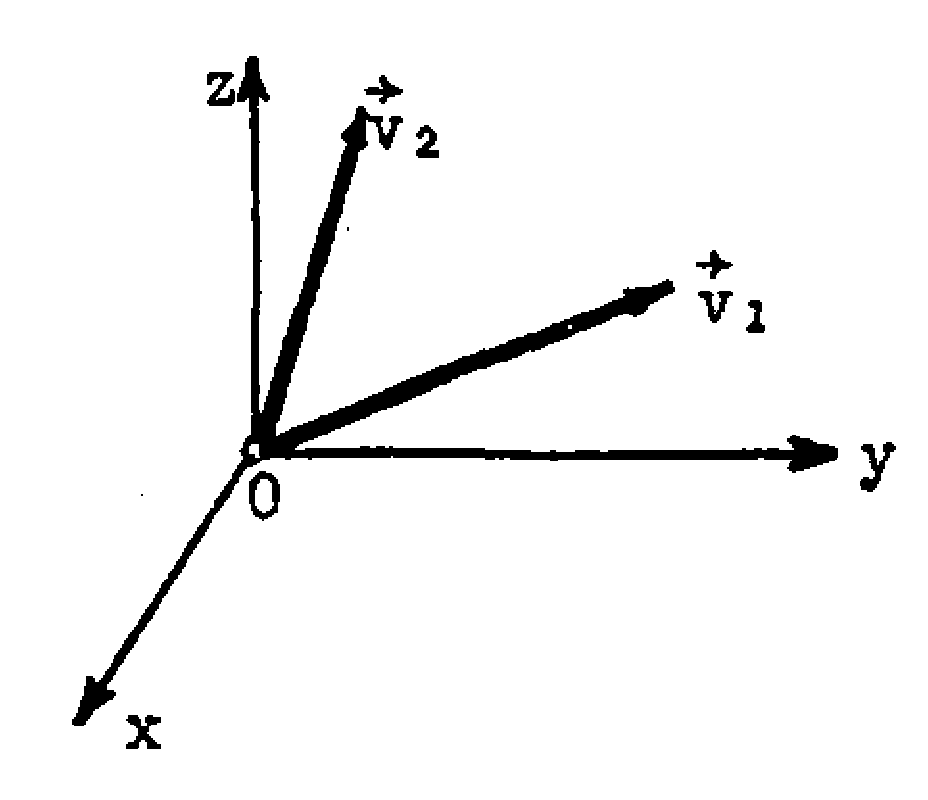
En efecto, supongamos que S es L.d. Dado que la ecuación vectorial $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2=\theta$ tiene una solución aparte de la trivial, $\alpha_1=\alpha_2=0$, esta ecuación se puede escribir como:

$$\vec{v}_1 = (-\frac{\alpha_2}{\alpha_1})\vec{v}_2 \quad ó \quad \vec{v}_2 = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_2})\vec{v}_1$$

En consecuencia, dos vectores en R^2 o en R^3 son linealmente dependientes si y sólo si pertenecen a la misma recta que pasa por el origen (figura 67).



Linealmente dependiente

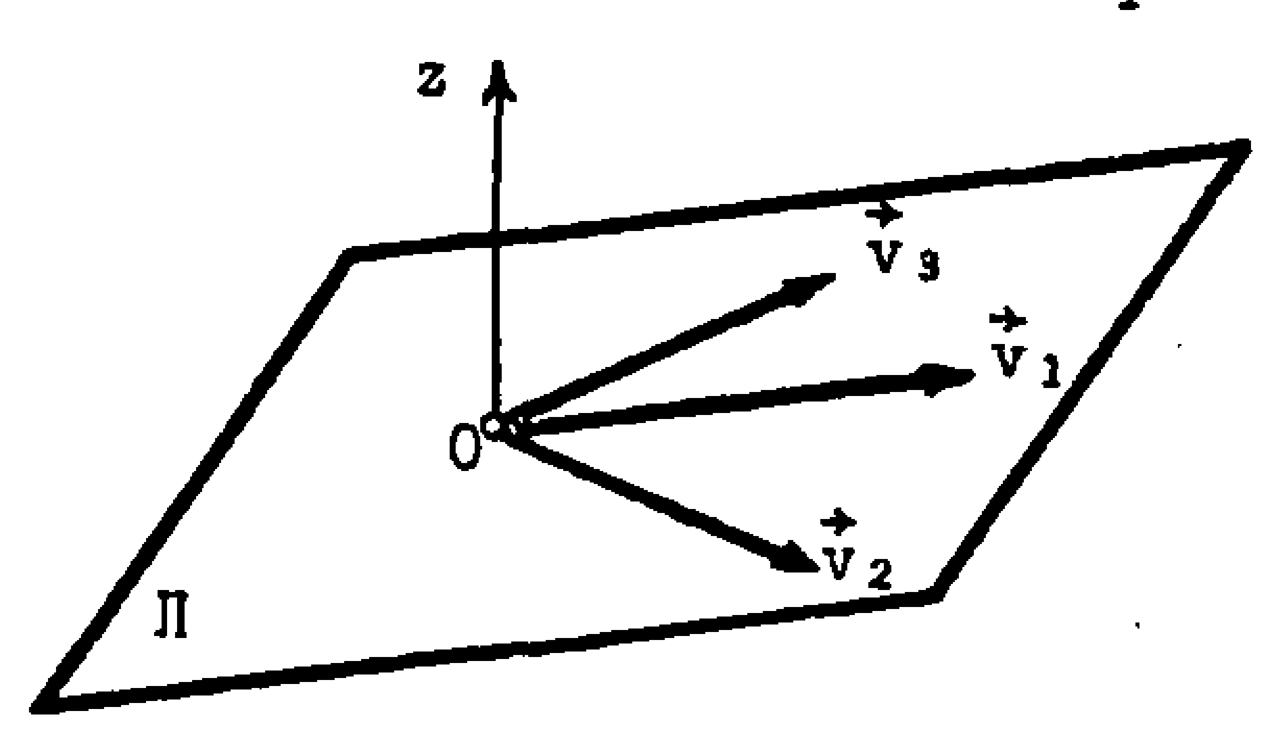


Linealmente independiente

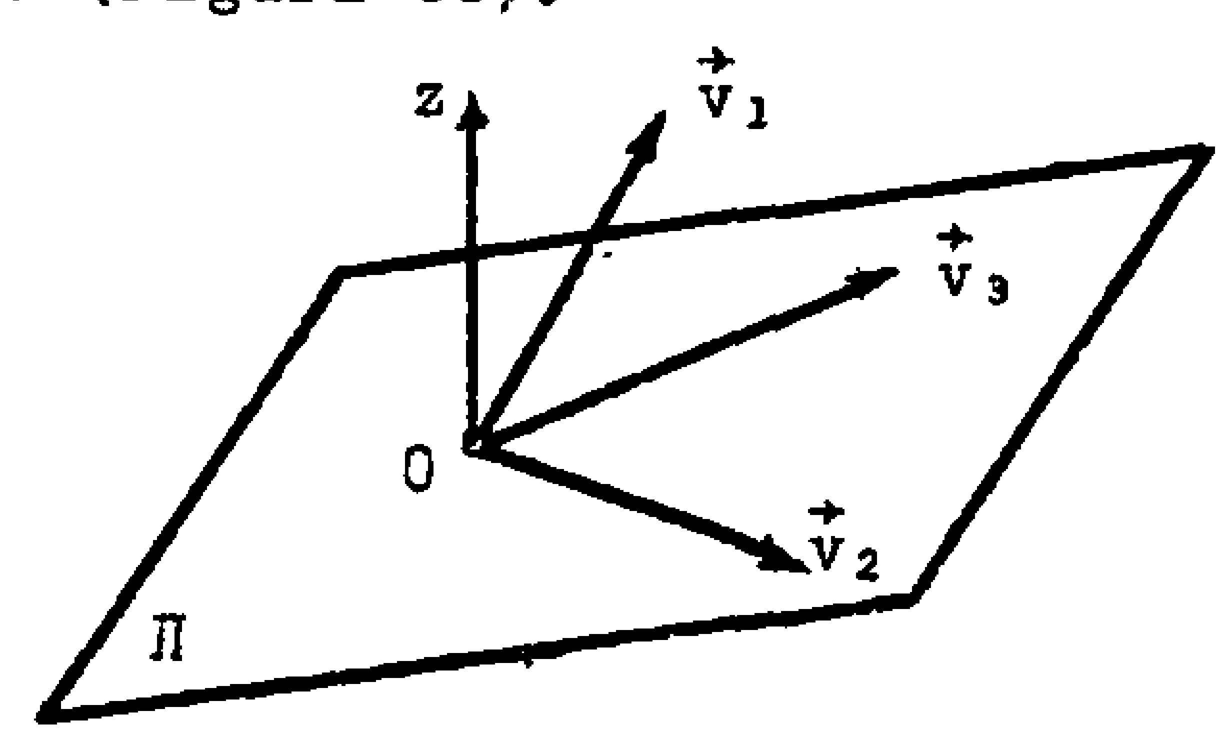
Figura 67

(2) Si $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son tres vectores de R^3, entonces el conjunto $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es L.d. si y sólo si los tres vectores pertene- al mismo plano que pasa por el origen.

En efecto, suponiendo que $\vec{v}_1$ es una combinación lineal de $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, entonces $\vec{v}_1$ pertenece al espacio generado por $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, que es precisamente el plano determinado por ellos dos. Por tanto, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ pertenecen al mismo plano (Figura 68).



Linealmente dependiente



Linealmente independiente

Figura 68

(3) Si $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son vectores en R^3, tales que: $\vec{v}_1=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{v}_2=(b_1,b_2,b_3)$ y $\vec{v}_3=(c_1,c_2,c_3)$, entonces el conjunto $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es linealmente dependiente si y sólo si:

$$(\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Esto ya se demostró anteriormente. Más adelante se generalizará este resultado para R^n.

EJEMPLO 3. Para qué valores de k los vectores $\vec{v}_1=(k,-1/2,-1/2)$, $\vec{v}_2=(-1/2,k,-1/2)$ y $\vec{v}_3=(-1/2,-1/2,k)$ forman un conjunto linealmente dependiente en R^3.

Solución. Si $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es linealmente dependiente, entonces el producto mixto $(\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3)=0$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} k & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & k & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & k \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) \begin{vmatrix} 2k & -1 & -1 \\ -1 & 2k & -1 \\ -1 & -1 & 2k \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow \quad 2k(4k^2-1)+(-2k-1)-1(1+2k)=0$$

de donde: $4k^3-3k-1=0 \leftrightarrow (2k+1)^2(k-1)=0 \leftrightarrow k=-1/2$ ó $k=1$

EJEMPLO 4. Establecer si los siguientes conjuntos de vectores no nulos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

a) $\{\vec{c}=Proy_{\vec{b}}\vec{a}, \vec{d}=Proy_{\vec{c}}\vec{b}, \vec{e}=Proy_{\vec{d}}\vec{c}\}$, tales que $\vec{a},\vec{b}\in R^3$, no paralelos.

b) $\{\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}\}$, tal que $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\in R^3$ es linealmente independ.

Solución.

a) Si $\vec{c}=Proy_{\vec{b}}\vec{a} \rightarrow \vec{c}\,||\,\vec{b} \rightarrow \vec{c}=r\vec{b}$

$\vec{d}=Proy_{\vec{c}}\vec{b} \rightarrow \vec{d}\,||\,\vec{c} \rightarrow \vec{d}=s\vec{c}$

$\vec{e}=Proy_{\vec{a}}\vec{c} \rightarrow \vec{e}\,||\,\vec{d} \rightarrow \vec{e}=t\vec{d}$

Vemos que $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ y $\vec{e}$ son paralelos entre si.

Por tanto, $\{\vec{c},\vec{d},\vec{e}\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

b) Dado que $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ es linealmente independiente, entonces:

$(abc) = (bca) = (cab) \neq 0$

Veamos a que es igual el producto mixto: $[(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})]$

$$[(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})] = (\vec{a}\times\vec{b}).[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})]$$
$$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{[(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}]\vec{c} - [(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{c}]\vec{a}\}$$
$$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{[(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}]\vec{c} - [\ 0\ ]\vec{a}\}$$
$$= [(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}][(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}]$$
$$= (abc)(abc) = (abc)^2 \neq 0$$

Por consiguiente, $\{\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}\}$ es un conjunto L.i.

EJERCICIOS

1. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en R^3 son linealmente independientes?
   a) $(2,-1,4)$, $(3,6,2)$, $(1,10,-4)$ Rp. L.i.
   b) $(3,1,1)$, $(2,-1,5)$, $(4,0,-3)$ Rp. L.i.
   c) $(1,3,3)$, $(0,1,4)$, $(5,6,3)$, $(7,2,-1)$ Rp. L.d.

2. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en R^4 son linealmente dependientes?
   a) $(1,2,1,-2)$, $(0,-2,-2,0)$, $(0,2,3,1)$, $(3,0,-3,6)$ Rp. L.i
   b) $(3,0,4,1)$, $(6,2,-1,2)$, $(-1,3,5,1)$, $(-3,7,8,3)$ Rp. L.i

3. Suponer que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son vectores en R^3 que tienen sus puntos iniciales en el origen. Determinar si los tres vectores pertenecen a un mismo plano.
   a) $\vec{v}_1=(1,0,-2)$, $\vec{v}_2=(3,1,2)$, $\vec{v}_3=(1,-1,0)$ Rp. No
   b) $\vec{v}_1=(2,-1,4)$, $\vec{v}_2=(4,2,3)$, $\vec{v}_3=(2,7,-6)$ Rp. Si

4. Suponer que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son vectores en R^3 que tienen sus puntos iniciales en el origen. Determinar si los tres vectores pertenecen a un mismo plano.
   a) $\vec{v}_1=(3,-6,9)$, $\vec{v}_2=(2,-4,6)$, $\vec{v}_3=(1,1,1)$ Rp. No
   b) $\vec{v}_1=(4,6,8)$, $\vec{v}_2=(2,3,4)$, $\vec{v}_3=(-2,-3,-4)$ Rp. Si

5. Si $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r\}$ es un conjunto de vectores L.d. en un espacio vectorial V, demostrar que $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_{r+1}\}$ también es

linealmente dependiente, donde $\vec{v}_{r+1},\dots,\vec{v}_n$ son cualesquiera otros vectores en V.

6. Para qué valores de k, los siguientes vectores forman un conjunto linealmente dependiente en R^3.
$\vec{v}_1=(1,2,k)$, $\vec{v}_2=(3,k+1,5)$, $\vec{v}_3=(k+2,6,7)$. Rp. $k=3$ ó $k=-3\pm2\sqrt{6}$

1.66 BASES Y DIMENSIONES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Si V es un espacio vectorial y $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_r\}$ es un conjunto finito de vectores en V, entonces se dice que B es una *base* de V si se cumple las condiciones siguientes:

i) B es linealmente independiente
ii) B genera a V

Observación. El conjunto B es tal que no hay ningún subconjunto propio de B que genere a V, es decir, si B' está contenido en B sin ser todo B, entonces gen(B')$\neq$V

EJEMPLO 1. Determinar si los siguientes conjuntos son bases de R^2. a) $\{(2,-3),(1,5)\}$
b) $\{(1,1),(2,1),(3,2)\}$

Solución. A simple vista los elementos de $B=\{(2,-3),(1,5)\}$ son vectores linealmente independientes (no son paralelos) Además se ve claramente que B genera a R^2 y que ningún subconjunto propio de él puede generarlo, de lo contrario R^2 constaría de los múltiplos escalares de un solo vector. En consecuencia, B es una base de R^2.

b) Aquí los elementos de $B_1=\{(1,1),(2,1),(3,2)\}$ son vectores linealmente independientes y vemos también que B_1 genera a R^2, pero no es base de R^2, puesto que el subconjunto $B_1'=\{(1,1),(2,1)\}$ genera a R^2.

EJEMPLO 2. Sean $\vec{v}_1=(2,-1,3)$, $\vec{v}_2=(1,2,1)$ y $\vec{v}_3=(0,3,-1)$. Determinar si el conjunto $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es una base de R^3.

Solución. i) Si B es L.I. debemos probar que la única solución de: $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \theta$ (1)
es: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

En efecto, $\alpha_1(2,-1,3)+\alpha_2(1,2,1)+\alpha_3(0,3,-1) = \theta$

$$\rightarrow (2\alpha_1+\alpha_2, -\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3, 3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) = (0,0,0)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & (2) \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & (3) \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 & (4) \end{cases}$$

De (2): $\alpha_2 = -2\alpha_1$. Si hacemos: $\alpha_1=t \rightarrow \alpha_2=-2t$

Sustituyendo en (4): $3t-2t-\alpha_3=0$, de donde: $\alpha_3=-t$

Luego, en (3): $-t-4t-t=0 \rightarrow t=0$

Entonces el sistema (1) tiene unicamente la solución trivial:

$$\alpha_1=0 \;,\; \alpha_2=0 \;;\; \alpha_3=0$$

Por tanto, el conjunto B es linealmente independiente.

ii) Debemos expresar un vector arbitrario (x,y,z) como una combinación lineal de los vectores en B, esto es:

$$(x,y,z) = r(2,-1,3) + s(1,2,1) + t(0,3,-1)$$
$$= (2r+s, -r+2s+3t, 3r+s-t)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2r + s = x \\ -r + 2s + 3t = y \\ 3r + s - t = z \end{cases} \qquad (5)$$

Por tanto, para demostrar que B genera a V, es necesario probar que el sistema (5) tiene una solución para cualquier selección de (x,y,z). Bastará hallar r, s y t en función de x, y, z. Resolviendo el sistema (5) para r, s y t obtenemos:

$$r = \frac{1}{2}(5x-y-3z) \;,\; s = -4x+y+3z \;,\; t = \frac{1}{2}(7x-y-5z)$$

Dando valores a a, y, z hallamos una solución para (5), luego, B genera a R^3.

En consecuencia el conjunto B es una base de R^3.

Nota. Obsérvese que el problema de determinar la dependencia o la independencia lineal se reduce, en la práctica, a resolver sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 3. Determinar si el conjunto $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es una base de R^3, donde $\vec{v}_1=(2,1,3)$, $\vec{v}_2=(-1,4,1)$ y $\vec{v}_3=(8,-5,7)$

Solución. i) Debemos probar que B es L.i. escribiendo:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \theta$$

o sea: $\alpha_1(2,1,3) + \alpha_2(-1,4,1) + \alpha_3(8,-5,7) = (0,0,0)$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \quad (1)$$
$$\alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \quad (2)$$
$$3\alpha_1 + \alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \quad (3)$$

Sumando (1)+(3) se tiene: $5\alpha_1+15\alpha_3=0 \rightarrow \alpha_1=-3\alpha_3$
Haciendo: $\alpha_3=t \rightarrow \alpha_1=-3t$
Sustituyendo en (3): $-9t+\alpha_2+7t=0 \rightarrow \alpha_2=2t$
Luego, en (2): $-3t+8t-5t=0 \leftrightarrow 0=0$
Por tanto, el sistema: $\alpha_1=-3t$, $\alpha_2=2t$ y $\alpha_3=t$, admite, aparte de la trivial, infinitas soluciones.
Así para t=1, obtenemos: $\alpha_1=-3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=1$

$$\therefore \quad -3(2,1,3)+2(-1,4,1)+(8,-5,7) = \theta$$

El conjunto B es linealmente dependiente, en consecuencia, no es una base de R^3.

DEFINICION 23. Se llama *dimensión* de un espacio vectorial V, al número de elementos que tiene una base cualquiera. Así, si el espacio vectorial tiene una base de r elementos , se denota:

$$\dim(V)=r$$

Ejemplos:

a) $\dim(R^2)=2$, puesto que $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$ es base de R^2.
b) $\dim(R^n)=n$, puesto que $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2, \ldots ,\vec{e}_n\}$ es una base de R^n.
c) Si P_5 es el espacio vectorial de los polinomios del grado no mayor que 5, entonces $\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5\}$ es una base de P_5 y $\dim(P_5)=6$
d) Si P_n es el espacio vectorial de todos los polinomios, entonces $\dim(P_n)=\infty$, puesto que $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ es base de P_n.

EJEMPLO 6. Sea $S=\{(x,y,z,w)\in R^4 / x-3y=2z+w\}$. Construir una base para el espacio solución S y hallar su dimensión.

Solución. De la ecuación dada despejamos cualquiera de las variables, por ejemplo: $w=x-3y-2z$

$$\rightarrow (x,y,z,w) = (x,y,z,x-3y-2z)$$
$$= x(1,0,0,1)+y(0,1,0,-3)+z(0,0,1,-2)$$

Luego, el conjunto $B=\{(1,0,0,1),(0,1,0,-3),(0,0,1,-2)\}$ es una ba

se del conjunto S y dim(S)=3

EJEMPLO 7. Determinar la dimensión y una base del espacio solución del sistema:

$$3x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$$
$$5x_1-x_2+x_3-x_4 = 0$$

Solución. Sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$8x_1+2x_3=0 \rightarrow x_3=-4x_1$$

Si hacemos: $x_1=t \rightarrow x_3=-4t$

Restando la primera de la segunda ecuación resulta:

$$2x_1-2x_2-2x_4=0 \rightarrow x_2+x_4=t$$

Si hacemos: $x_4=s \rightarrow x_2=t-s$

Luego: $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (t,t-s,-4t,s)$

$= t(1,1,-4,0)+s(0,-1,0,1)$

En consecuencia, la base del espacio solución es:

$B=\{(1,1,-4,0),(0,-1,0,1)\}$ y dim(S)=2

EJEMPLO 8. Determinar la dimensión del conjunto subespacio de R^4. Todos los vectores de la forma $S=\{(a,b,c,d)/d=a+b,\ c=a-b)\}$.

Solución. Tenemos: $(a,b,c,d) = (a,b,a-b,a+b)$

$= a(1,0,1,1)+b(0,1,-1,1)$

Luego, $B=\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}$ y dim(S)=2

EJEMPLO 9. Determinar una base para el subespacio de R^3: el plano que contiene a los vectores $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(1,0,-2)$ y pasa por el punto $P_1(3,-1,1)$.

Solución. La normal al plano Π es:

$$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2,7,1)$$

Si P(x,y,z) es un punto genérico de Π, entonces:

$(\vec{P}-\vec{P}_1).\vec{n} = 0 \leftrightarrow \vec{P}.\vec{n} = \vec{P}_1.\vec{n}$

$\leftrightarrow (x,y,z).(2,7,1) = (3,-1,1).(2,7,1)$

de donde obtenemos: $\Pi: 2x+7y+z=0 \rightarrow z=-2x-7y$

Luego: $(x,y,z) = (x,y,-2x-7y)$

$= x(1,0,-2)+y(0,1,-7)$

Por tanto, una base para el subespacio de R^3 es:

$$B=\{(1,0,-2),(0,1,-7)\}$$

EJEMPLO 10. Sea $F=\{f(t)=a_0+a_1t+a_2e^{2t}/t\varepsilon R,\ a_i\varepsilon R, i=0,1,2\}$. Demostrar que las funciones: $f_1(t)=3t-2$, $f_2(t)=1-e^{2t}$, $f_3(t)=2t+e^{2t}$, constituyen una base de F.

Demostración. i) Debemos probar que f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes, esto es, si:

$$\alpha_1f_1 + \alpha_2f_2 + \alpha_3f_3 = \theta \leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

En efecto:

$$\alpha_1(3t-2) + \alpha_2(1-e^{2t}) + \alpha_3(2t+e^{2t}) = \theta$$

$$\leftrightarrow (-2\alpha_1+\alpha_2) + (3\alpha_1+2\alpha_3)t + (-\alpha_2+\alpha_3)e^{2t} = (0,0,0)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

Por tanto, f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes.

ii) Probaremos que f_1, f_2 y f_3 generan a F.

En efecto, debemos expresar un elemento de F en la forma:

$$f(t) = kf_1 + rf_2 + sf_3$$

$$\rightarrow a_0+a_1t+a_2e^{2t} = k(3t-2) + r(1-e^{2t}) + s(2t+e^{2t})$$

$$= (-2k+r) + (3k+2s)t + (-r+s)e^{2t}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} -2k + r = a_0 \\ 3k + 2s = a_1 \\ -k + s = a_2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $k = -\frac{1}{7}(2a_0-a_1+2a_2)$

$r = \frac{1}{7}(3a_0+2a_1-4a_2)$, $s = \frac{1}{7}(3a_0+2a_1+3a_2)$

Por tanto. f_1, f_2 y f_3 generan al espacio F, y como además son L.i., el conjunto $\{f_1,f_2,f_3\}$ constituye una base de F.

EJEMPLO 11. Se da un espacio vectorial generado por los vectores $X_1=(2,1,3,1)$, $X_2=(1,2,0,1)$ y $X_3=(-1,1,-3,0)$. Determinar su base y dimensión.

Solución. Debemos probar primero que X_1, X_2 y X_3 son linealmente independientes, esto es, si:

$$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3 = \theta \leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

En efecto,

$$\alpha_1(2,1,3,1) + \alpha_2(1,2,0,1) + \alpha_3(-1,1,-3,0) = \theta$$
$$\leftrightarrow (2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 3\alpha_1-3\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2) = (0,0,0,0)$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_1=\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

de donde: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

Por tanto, X_1, X_2 y X_3 son linealmente independientes.

Esto significa que cualquiera de los vectores dados se puede expresar como una combinación lineal de los otros dos. Supongamos entonces que:

$$X_3 = rX_1 + tX_2$$
$$\leftrightarrow (-1,1,-3,0) = r(2,1,3,1) + t(1,2,0,1)$$
$$(-1,1,-3,0) = (2r+t, r+2t, 3r, r+t)$$

de donde, igualando componentes obtenemos: $r=-1$ y $t=1$

$$\therefore X_3 = -X_1 + X_2$$

Luego, $\mathcal{B}=\{X_1,X_2\}$ es una base del espacio vectorial dado cuya dimensión es $r=2$.

EJEMPLO 12. Hallar las coordenadas del vector $X=(1,2,1,1)$ en la base $\mathcal{B}=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$, siendo: $E_1=(1,1,1,1)$, $E_2=(1,1,-1,-1)$, $E_3=(1,-1,1,-1)$ y $E_4=(1,-1,-1,1)$.

Solución. Sea $X=x_1E_1+x_2E_2+x_3E_3+x_4E_4$, donde (x_1,x_2,x_3,x_4) son las coordenadas del vector X en la base $\mathcal{B}$.

$$\rightarrow (1,2,1,1) = x_1(1,1,1,1)+x_2(1,1,-1,-1)+x_3(1,-1,1,-1)+x_4(1,-1,-1,1)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

de donde obtenemos: $x_1=5/4$, $x_2=1/4$, $x_3=-1/4$, $x_4=-1/4$

Por tanto, $(5/4,1/4,-1/4,-1/4)$ son las coordenadas buscadas.

EJERCICIOS

1. Establecer cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son base de R^3.

   a) (3,1,-4) ; (2,5,6) , (1,4,8) Rp. Si

   b) (2,-3,1) , (4,1,1) , (0,-7,1) Rp. No

   c) (1,6,4) , (2,4,-1) , (-1,2,5) Rp. No

2. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son base de P_2

   a) $4+6x+x^2$, $-1+4x+2x^2$, $5+2x-x^2$ Rp. No

   b) $1+x+x^2$, $x+x^2$, x^2 Rp. Si

   c) $-4+x+3x^2$, $6+5x+2x^2$, $8+4x+x^2$ Rp. Si

3. En los ejercicios siguientes, determinar la dimensión y una base del espacio solución del sistema dado.

   a) $2x_1+x_2+3x_3=0$
   $x_1+2x_2 \quad =0$
   $x_2+x_3=0$
   Rp. $B=\{(0,0,0)\}$
   $\dim(S)=0$

   b) $x_1-3x_2+x_3 = 0$
   $2x_1-6x_2+2x_3= 0$
   $3x_1-9x_2+3x_3= 0$
   Rp. $B=\{(3,1,0),(-1,0,1)\}$
   $\dim(S)=2$

   c) $2x_1+x_2-x_3+3x_4 = 0$
   $3x_1-x_2+x_3-2x_4 = 0$
   Rp. $B=\{(1,13,0,-5),(0,1,1,0)\}$
   $\dim(S)=2$

4. Determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios de R^4.

   a) Todos los vectores de la forma: (a,b,c,d), donde a+b=c+d Rp. 3

   b) Todos los vectores de la forma (a,b,c,d), donde: 2a+b-c=0 , 3a-b+d=0 Rp. 2

   c) Todos los vectores de la forma (a,b,c,d), donde: d=2a-b y c=a+2b Rp. 2

5. Determinar una base para el siguiente subespacio de R^3: un plano que pasa por los puntos $P_1(2,1,-1)$ y $P_2(4,2,-2)$ y es paralelo a la recta $L:P=(3,0,1)+t(3,2,1), t\in R$.

1.67 SUMA DE SUBESPACIOS

Si U y W son subespacios de un espacio vectorial V hay dos operaciones que se pueden efectuar con U y W para obtener nuevos espacios:

a) La intersección, que se denota: $U \cap W = \{\vec{x} \ / \ \vec{x} \varepsilon U \ , \ \vec{x} \varepsilon W\}$

b) La suma, que se denota: $U+W = \{\vec{u}+\vec{w} / \vec{u} \varepsilon U \ , \ \vec{w} \varepsilon W\}$

Ambos son subespacios de V.

El subespacio U+W contiene tanto a U como a W, es decir,

$$U \subset (U+W) \quad y \quad W \subset (U+W)$$

Además si Z es también subespacio de V que contenga tanto a U como a W, entonces Z también contiene a (U+W), esto es: $(U+W) \subset Z$. Por tanto, U+W es el menor de los subespacios de V que contienen tanto a U como a W.

En efecto, supongamos que: $\vec{v}_1 \varepsilon (U+W)$ y $\vec{v}_2 \varepsilon (U+W)$, entonces existe $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \varepsilon U$ y $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \varepsilon W$ tales que:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1 \quad y \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$$

De las propiedades de la adición de vectores, se desprende que:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (\vec{u}_1 + \vec{w}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{w}_2)$$
$$= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$$

Dado que U y W son subespacios, entonces: $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \varepsilon U$ y $(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \varepsilon W$. En consecuencia: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \varepsilon (U+W)$, es decir, U+W es cerrado con la adición.

Además, si α es un escalar, entonces:

$$\alpha \vec{v}_1 = \alpha(\vec{u}_1 + \vec{w}_1) = \alpha \vec{u}_1 + \alpha \vec{w}_1$$

Puesto que U y W son subespacios $\rightarrow$ $\alpha u_1 \varepsilon U$ y $\alpha w_1 \varepsilon W$. Por lo tanto $\alpha \vec{v}_1 \varepsilon \{U+W\}$, esto es, $\{U+W\}$ es cerrado con la multiplicación por escalares. Entonces tenemos que $\{U+W\}$ es subespacio de V.

Si Z es un subespacio de V que contiene tanto a U como a W y como tal, cerrado bajo la adición, entonces debe contener a todas las sumas de la forma $\vec{u}+\vec{w}$, donde $\vec{u} \varepsilon U$ y $\vec{w} \varepsilon W$. En consecuencia Z contiene al conjunto $\{U+W\}$, es decir, $\{U+W\} \subset Z$.

La siguiente proposición muestra como puede expresarse una base para U+W en términos de una base para U y una base para W. Debemos tener presente que si U y W son subespacios, la parte común de estos subespacios, $U \cap W$, es también un subespacio.

PROPOSICION 1.7 Sean U y W subespacios del espacio vectorial de dimensión finita V. Sea B una base para $U \cap W$. Si B_1 es una extensión de B que es una base de U y B_2 es una extensión de B que es una base para W, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base para $U+W$. En particular si $U+W=\theta$, y B_1 es una base para U y B_2 una base Para W, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base para $U+W$.

Demostración. i) Debemos probar que: $U+W = \text{gen}(B_1 \cup B_2)$

En efecto, puesto que $U=\text{gen}(B_1)$ y $W=\text{gen}(B_2)$ se deduce inmediatamente que:

$$U+W = \text{gen}(B_1 \cup B_2) \qquad (1)$$

ii) Debemos probar que $B_1 \cup B_2$ es linealmente independiente.

En efecto, sean: $B = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$

$$B_1 = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}'_{n+1}, \ldots, \vec{x}'_r\}$$

$$B_2 = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}''_{n+1}, \ldots, \vec{x}''_s\}$$

Supongamos que:

$$a_1\vec{x}_1 + \ldots + a_n\vec{x}_n + a'_{n+1}\vec{x}'_{n+1} + \ldots + a'_r\vec{x}'_r + a''_{n+1}\vec{x}''_{n+1} + \ldots + a''_s\vec{x}''_s = \theta \qquad (2)$$

Puesto que B_1 es L.i., es suficiente demostrar que todos los coeficientes: $a''_{n+1}, \ldots, a''_s$ son cero. Para probar esto, sea:

$$\vec{x} = a''_{n+1}\vec{x}''_{n+1} + \ldots + a''_s\vec{x}''_s \qquad (3)$$

Debe deducirse de (2) que: $\vec{x} \in \text{gen}(B_1)=U$

Pero (3) implica que $\vec{x} \in W$, puesto que $(\vec{x}''_{n+1}, \ldots, \vec{x}''_s) \in W$. Por tanto, $\vec{x} \in (U \cap W)$.

Dado que B es una base para $U \cap W$, entonces:

$$\vec{x} = a''_{n+1}\vec{x}''_{n+1} + \ldots + a''_s\vec{x}''_s = b_1\vec{x} + \ldots + b_n\vec{x}_n$$

para coeficientes $b_1, \ldots, b_n$ apropiados.

Así: $a''_{n+1}\vec{x}''_{n+1} + \ldots + a''_s\vec{x}''_s - b_1\vec{x} - \ldots - b_n\vec{x}_n = \theta$

Sin embargo, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}''_{n+1}, \ldots, \vec{x}_s$ son L.i., por tanto:

$$a''_{n+1} = \ldots = a''_s = b_1 = \ldots = b_n = 0$$

lo cual se deseaba demostrar.

Este resultado puede interpretarse en términos de la dimensión de los espacios U y W. Si $\dim(U)=k$, $\dim(W)=m$ y $\dim(U \cap W)=n$, entonces, dado que la unión de las bases B_1 y B_2 para U y W respec

tivamente, es una base para U+W, se observa que:

$$\dim(U+W) = k+m-n$$

Corolario. Si U y W son subespacios del espacio vectorial de dimensión finita V, entonces:

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$$

En particular, si U+W=V, entonces:

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W) \leftrightarrow U \cap W = \{\theta\}$$

DEFINICION 24. Un espacío vectorial V es la *suma directa* de los subespacios U y W si se cumplen las condiciones:

i) $V = U+W$

ii) $U \cap W = \{\theta\}$

En este caso se escribe: $V = U \oplus W$

Esta definición equivale a decir que todo vector $\vec{v} \in V$ puede escribirse de manera única como $V = U+W$, donde: $\vec{u} \in U$ y $\vec{w} \in W$.

EJEMPLO 1. Dado los subespacios en R^3: $S_1=\{(x_1,x_2,x_3)/2x_1-x_2-x_3=0\}$ y $S_2=\{(x_1,x_2,x_3)/x_1-3x_2+x_3=0\}$; hallar una base para $S_1 \cap S_2$ y la $\dim(S_1+S_2)$.

Solución. En S_1: $2x_1-x_2-x_3=0 \rightarrow x_3=2x_1-x_2$

Luego: $(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,2x_1-x_2)$

$= x_1(1,0,2)+x_2(0,1,-1)$

Entonces, una base para S_1 es: $B_1=\{(1,0,2),(0,1,-1)\}$ y $\dim(S_1)=2$

En S_2: $x_1-3x_2+x_3=0 \rightarrow x_3=-x_1+3x_2$

$\rightarrow (x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,-x_1+3x_2)$

$= x_1(1,0,-1)+x_2(0,1,3)$

Una base para S_2 es: $B_2=\{(1,0,-1),(0,1,3)\}$ y $\dim(S_2)=2$

Para determinar una base para $S_1 \cap S_2$ procedemos del siguiente modo: sea $\vec{x} \in (S_1 \cap S_2) \rightarrow \vec{x} \in S_1$ y $\vec{x} \in S_2$

Si $\vec{x} \in S_1 \rightarrow \vec{x} = \alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(0,1,-1)$ (1)

$\vec{x} \in S_2 \rightarrow \vec{x} = \beta_1(1,0,-1) + \beta_2(0,1,3)$

Entonces: $\alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(0,1,-1) = \beta_1(1,0,-1) + \beta_2(0,1,3)$

$\leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_2) = (\beta_1,\beta_2,-\beta_1+3\beta_2)$

$\leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1 \; , \; \alpha_2 = \beta_2 \; , \; 2\alpha_1-\alpha_2 = -\beta_1+3\beta_2$

Sustituyendo el valor de las dos primeras en la tercera ecuación

se tiene: $2\alpha_1-\alpha_2 = -\alpha_1+3\alpha_2 \rightarrow 3\alpha_1=4\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_2 = \frac{3}{4}\alpha_1$

Sustituyendo en (1): $\vec{x} = \alpha_1(1,0,2) + \frac{3}{4}\alpha_1(0,1,-1)$

$\rightarrow \vec{x} = \alpha_1(1,\frac{3}{4},\frac{5}{4})$

Luego, una base para $S_1 \cap S_2$ es: $B_3=\{(1,\frac{3}{4},\frac{5}{4})\}$ y $\dim(S_1 \cap S_2)=1$

$\therefore \dim(S_1+S_2) = \dim(S_1)+\dim(S_2)-\dim(S_1 \cap S_2) = 2+2-1 = 3$

EJEMPLO 2. Dado los subespacios de R^3: $S_1=\{(x_1,x_2,x_3)/x_1+2x_2-x_3=0\}$ y $S_2=\{(x_1,x_2,x_3)/x_1-x_2+x_3=0\}$. Determinar si $R^3=S_1 \oplus S_2$.

Solución. Para determinar si R^3 es la suma directa de S_1 y S_3 debemos probar que $S_1 \cap S_2=\{(0,0,0)\}$

Sea $\vec{x}\varepsilon(S_1 \cap S_2) \rightarrow \vec{x}\varepsilon S_1$ y $\vec{x}\varepsilon S_2$

Si $\vec{x}\varepsilon S_1 \rightarrow x_1+2x_2-x_3=0$ (1)

$\vec{x}\varepsilon S_2 \rightarrow x_1-x_2+x_3=0$ (2)

Sumando (1) y (2) se tiene: $2x_1+x_2=0 \rightarrow x_2=-2x_1$

Haciendo: $x_1=t \rightarrow x_2=-2t$

Sustituyendo en (2): $t+2t+x_3=0 \rightarrow x_3=-3t$

Luego, $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3) = (t,-2t,-3t) = t(1,-2,-3)$

Dado que $t\varepsilon R$, el vector $\vec{x}$ no se reduce unicamente a (0,0,0), en consecuencia R^3 no es la suma directa de S_1 con S_2, esto es:

$$R^3 \neq S_1 \oplus S_2$$

EJEMPLO 3. Dados los vectores en R^4: $\vec{u}=(2,1,1,0)$, $\vec{v}=(1,3,2,-1)$, $\vec{z}=(1,1,-2,2)$ y $\vec{w}=(0,1,-1,2)$; si $S=gen(\vec{u},\vec{v})$ y $T=gen(\vec{z},\vec{w})$, hallar una base y la dimensión para $S \cap T$ y $S+T$.

Solución. Sea $\vec{x}\varepsilon(S \cap T) \rightarrow \vec{x}\varepsilon S$ y $\vec{x}\varepsilon T$

o sea: $\vec{x} = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v}$ y $\vec{x} = \beta_1\vec{z} + \beta_2\vec{w}$

$\rightarrow \alpha_1(2,1,1,0) + \alpha_2(1,3,2,-1) = \beta_1(1,1,-2,2) + \beta_2(0,1,-1,2)$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 & (1) \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 & (2) \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -2\beta_1 - \beta_2 & (3) \\ -\alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 & (4) \end{cases}$$

Restando (2)-(1) se tiene: $-\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_2$

Sumando (3)+(4) obtenemos: $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_2$

$\rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = 2\alpha_1$

Luego: $\vec{x} = \alpha_1(2,1,1,0) + 2\alpha_1(1,3,2,-1) = \alpha_1(4,7,5,-2)$
Por tanto, una base para $S \cap T$ es $B_1=\{(4,7,5,-2)\}$ y $\dim(S \cap T)=1$
Para hallar S+T debemos probar que u,v,z y w son L.i., es decir, deben existir escalares α_1, α_2, α_3 y α_4 tales que:

$$\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{z} + \alpha_4\vec{w} = \theta \quad \leftrightarrow \quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

$$\rightarrow \quad \alpha_1(2,1,1,)+\alpha_2(1,3,2,-1)+\alpha_3(1,1,-2,2)+\alpha_4(0,1,-1,2)=(0,0,0,0)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (1)$$
$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \quad (2)$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \quad (3)$$
$$- \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \quad (4)$$

Sumando (3)+(4): $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0$ (5)
Restando (1)-(2): $\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_4 = 0$ (6)
Sumando (5)+(6): $2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2=2\alpha_1$
Sustituyendo en (1) y (5) se tiene: $2\alpha_1+2\alpha_1+\alpha_3=0 \rightarrow \alpha_3=-4\alpha_1$
$\alpha_1+2\alpha_1+\alpha_4=0 \rightarrow \alpha_4=-3\alpha_1$
Vemos que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ y $\vec{w}$ son L.d., pero si hacemos $\alpha_1=0$, entonces: $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, esto es, $\vec{v}$, $\vec{z}$ y $\vec{w}$ son L.i.

$$\therefore S+T = \text{gen}(\vec{v},\vec{z},\vec{w})$$

$$\dim(S+T) = \dim(S)+\dim(T)-\dim(S \cap T) = 2+2-1 = 3$$

EJERCICIOS

1. Dado los subespacios de R^3: $S_1=\{(x_1,x_2,x_3)/x_1-2x_2+x_3=0\}$ y $S_2=\{(x_1,x_2,x_3)/x_1+x_2-2x_3=0\}$, hallar una base para $S_1 \cap S_2$ y la $\dim(S_1+S_2)$. Rp. $B=\{(1,1,1)\}$, $\dim(S_1+S_2)=3$

2. Sea $U=\text{gen}\{(2,0,1),(-3,1,0)\}$. Hallar dos subespacios W_1 y W_2 tales que $R^3=U \oplus W_1=U \oplus W_2$ y deducir que: $U \oplus W_1=U \oplus W_2$ no implica que $W_1=W_2$.

3. Dados los vectores en R^4: $\vec{u}=(1,2,-1,0)$, $\vec{v}=(1,-1,2,1)$, $\vec{z}=(0,1,-2,1)$, $\vec{w}=(2,-1,0,1)$; si $S=\text{gen}(\vec{u},\vec{v})$ y $T=\text{gen}(\vec{z},\vec{w})$, hallar una base y la dimensión para $S \cap T$ y S+T.
Rp. $B=\{(4,-1,5,3)\}$, $S+T=\text{gen}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, $\dim(S+T)=3$

2

MATRICES

2.1 INTRODUCCION

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante las técnicas usuales de sustitución y de multiplicación y suma, se dificulta en la medida en que aumenta el número de variables y se complica aún más, si es el caso que el número de variables difiere del número de ecuaciones que conforman el sistema. Dado que el conjunto solución de un sistema se obtiene operando los coeficientes y las constantes numéricas, sin necesidad de reiterar la escritura de las variables, podemos señalar que el establecimiento de ciertas relaciones aplicables a conjuntos numéricos facilitará considerablemente el proceso. En tal sentido el estudio de las matrices, como un concepto del álgebra lineal, nos ofrece la alternativa de resolver los sistemas lineales aplicando las técnicas que se describen en este capítulo.

2.2 DEFINICION. Una matriz es un arreglo rectangular de números reales ordenados en filas o columnas.

Son ejemplos de matrices los siguientes arreglos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \pi \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \text{Sen}\beta, \text{Cos}\beta, \text{Tg}\beta \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2a \\ -b \\ 3c \end{bmatrix}$$

Notación. Las matrices se denotan con letras mayúsculas, tal como A, B, C, ...,etc.

El conjunto de elementos o componentes de una matriz se encierra entre paréntesis o corchetes y en los casos en que no se use números reales específicos, se denotan con letras minúsculas subindicadas: a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , es decir:

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los subíndices de un elemento indican, el primero la fila en la que está la componente y el segundo la columna correspondiente; así, el elemento a_{32} ocupa la tercera fila y la segunda columna. En general, el elemento a_{ij} ocupa la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Nota. Se debe destacar que una matriz es un arreglo y como tal no tiene un valor numérico.

2.3 ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden o dimensión de una matriz está dado por el producto indicado m×n, donde m indica el número de filas y n el número de columnas.

Por ejemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2×3

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2×2

El conjunto de matrices de orden m×n, con coeficientes en K (K puede ser R o C), se denotará $K^{m\times n}$, es decir:

$$K^{m\times n} = \{A/A=[a_{ij}]_{m\times n}\}$$

Así, en los ejemplos anteriores: $A\varepsilon K^{2\times 3}$, $B\varepsilon K^{2\times 2}$

EJEMPLO 1. Escribir explícitamente la matriz:

a) $A = \left[a_{ij}\right]\varepsilon K^{2\times 3} / \ a_{ij} = 2i-j$

b) $B = \left[b_{ij}\right]\varepsilon K^{3\times 3} / \ b_{ij} = \min(i,j)$

c) $C = [c_{ij}] \in K^{2\times 4} / \; c_{ij} = i^2 + j$

Solución. Escribiremos las componentes de cada matriz según el ordena de la matriz y la definición dada.

a) $a_{11}=2(1)-1=1$, $a_{12}=2(1)-2=0$, $a_{13}=2(1)-3=-1$
$a_{21}=2(2)-1=3$, $a_{22}=2(2)-2=2$, $a_{23}=2(2)-3)=1$

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $b_{11}=\min(1,1)=1$, $b_{12}=\min(1,2)=1$, $b_{13}=\min(1,3)=1$
$b_{21}=\min(2,1)=1$, $b_{22}=\min(2,2)=2$, $b_{23}=\min(2,3)=2$
$b_{31}=\min(3,1)=1$, $b_{32}=\min(3,2)=2$, $b_{33}=\min(3,3)=3$

$$\therefore \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $c_{11}=1^2+1=2$, $c_{12}=1^2+2=3$, $c_{13}=1^2+3=4$, $c_{14}=1^2+4=5$
$c_{21}=2^2+1=5$, $c_{22}=2^2+2=6$, $c_{23}=2^2+3=7$, $c_{24}=2^2+4=8$

$$\therefore \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2.4 TIPOS DE MATRICES

a) Matriz Rectangular. La matriz de orden m n, con $m \neq n$, recibe el nombre de matriz rectangular. Por ejemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ es una matriz rectangular de orden 2×3

b) Matriz Fila. La matriz de orden $1\times n$ se denomina matriz fila o vector fila. Por ejemplo:

$A = (2 \; -3 \; 1 \; 5)$ es una matriz o vector fila de orden 1×4

c) Matriz Columna. La matriz de m filas y una columna recibe el nombre de matriz columna de orden $m\times 1$. Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ es una matriz columna de orden 3×1

d) Matriz Cero. Una matriz cuyos elementos son todos nulos, es decir, $a_{ij}=0, \forall i,j$, recibe el nombre de matriz

cero o nula. Por ejemplo:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ es una matriz cero de orden 2×3

e) Matriz Cuadrada. La matriz que tiene el mismo número de filas y columnas se llama matriz cuadrada. Una matriz cuadrada con n filas y n columnas se llama también matriz de orden n, y al conjunto de matrices cuadradas se le denota por K^n. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ es una matriz de orden 3 ($A \in K^3$)

Observaciones. (1) En una matriz cuadrada, la *diagonal principal* es una línea formada por los elementos: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$

(2) La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada A se llama *traza* de la matriz A.

2.5 IGUALDAD DE MATRICES

Se dice que dos matrices A y B son iguales si son del mismo orden y sus componentes correspondientes son iguales, es decir, si las matrices son idénticas. Esto es:

$$[a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n} \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ , \ \forall i,j \qquad (1)$$

Si A no es igual a B se denota: $A \neq B$

EJEMPLO 2. Dadas las matrices $A=[a_{ij}]\in K^{2\times 2} / a_{ij}=2^i-(-1)^j$ y $B = \begin{bmatrix} x-y & 1 \\ 3x-y & 3 \end{bmatrix}$, hallar los valores de x e y de modo que A=B.

Solución. Determinemos los elementos de la matriz A.

$a_{11}=2^1-(-1)^1=2+1=3$, $a_{12}=2^1-(-1)^2=2-1=1$

$a_{21}=2^2-(-1)^1=4+1=5$, $a_{22}=2^2-(-1)^2=4-1=3$

Luego, si: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 1 \\ 3x-y & 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow (x-y=3) \wedge (3x-y=5)$

Resolviendo el sistema obtenemos: x=1, y=-2

2.6 SUMA DE MATRICES

Dadas dos matrices $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ y $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, se llama suma de A y B a otra matriz $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ , } \forall i,j\varepsilon\{1,2,3,\ldots,n\}$$

Esto es:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \qquad (2)$$

EJEMPLO 3. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} 2x-1 & y \\ 3-y & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5-y & 2-x \\ x+1 & 2 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$; hallar A+C, sabiendo que A=B.

Solución. Según la ecuación (1) se tiene:

$$A = B \leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 5-y & \rightarrow \quad 2x+y=6 \\ 3-y = x+1 & \rightarrow \quad x+y=2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: x=4 , y=-2

$$\therefore A+C = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-2 & -2+5 \\ 5+4 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota. La adición de matrices es la ley de composición interna que hace corresponder a dos matrices, del mismo orden, su suma. Se denota:

$$(A,B) \rightarrow A+B$$

PROPIEDADES DE LA ADICION DE MATRICES. Si A, B y C son matrices del mismo orden, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

A_1: $\forall A,B\varepsilon K^{m\times n}$, $(A+B)\varepsilon K^{m\times n}$ Clausura

A_2: $A + B = B + A$ Conmutatividad

A_3: $A + (B + C) = (A + B) + C$ Asociatividad

A_4: $\forall A\varepsilon K^{m\times n}$, $\exists\theta_{m\times n}$ tal que: $A+\theta=\theta+A=A$ Elemento neutro aditivo

A_5: $\forall A\varepsilon K^{m\times n}$, $\exists(-A)\varepsilon K^{m\times n}$ tal que: $A+(-A) = (-A)+A = \theta$
Elemento inverso aditivo

Observaciones.

(1) Dos matrices del mismo orden se llaman *conformables* respecto de la suma algebraica.

(2) Las matrices del mismo orden o conformables respecto de la suma algebraica, siguen las mismas leyes de la adición que sujetan a los elementos que las componen. (Esta característica permite demostrar las propiedades de la adición de matrices).

2.7 DIFERENCIA DE MATRICES

Dados dos matrices A y B del mismo orden m n, la diferencia entre A y B es otra matriz C, del mismo orden, tal que:

$$C = [a_{ij}]_{m\times n} - [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

EJEMPLO 4. Si $A=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, hallar A-B.

Solución. $A-B = \begin{bmatrix} 7+1 & -2-4 & 5+2 \\ 3-1 & 0-3 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

2.8 PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Dados una matriz A y un número real k, el producto de k por A se define por:

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] \qquad (3)$$

Cada componente de A se multiplica por el escalar k.

EJEMPLO 5. Si k=-2 y $A=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, hallar el producto de k por A

Solución. $kA = \begin{bmatrix} -2(-2) & -2(2) \\ -2(-1) & -2(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

EJEMPLO 6. Calcular la combinación lineal de las matrices:
$A=\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, si $X=(1+i)A+(1-i)B$.

Solución. Recordemos que si $i=\sqrt{-1} \rightarrow i^2=-1$

$$\rightarrow X = (1+i)\begin{bmatrix}1 & i\\1 & -i\end{bmatrix} + (1-i)\begin{bmatrix}i & 1\\-i & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+i & i(1+i)\\1+i & -i(1+i)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}i(1-i) & 1-i\\-i(1-i) & 1-i\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X = \begin{bmatrix}1+i & i-1\\1+i & -i+1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}i+1 & 1-i\\-i-1 & 1-i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+2i & 0\\0 & 2-2i\end{bmatrix}$$

EJEMPLO 7. Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}8 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\4 & -3\end{bmatrix}$

Hallar X en la ecuación: $\frac{3}{2}X(X+A) = 2[X+(2B-C)]+A$.

Solución. Multiplicando por 2 ambos miembros de la ecuación dada se tiene:

$3(X+A) = 4[X+(2B-C)]+2A$, de donde: $X = A-8B+4C$

Luego, haciendo uso de (3) y (2) se tiene:

$$X = \begin{bmatrix}8 & -1\\3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-16 & -24\\8 & 16\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4 & 8\\16 & -12\end{bmatrix} \leftrightarrow X = \begin{bmatrix}-12 & -17\\27 & 8\end{bmatrix}$$

EJEMPLO 8. Resolver el sistema de ecuaciones:

$X-2Y=A$, $2X+3Y=B$, $X,Y\in K^{2\times 2}$, donde:

$A = \begin{bmatrix}6 & -3\\7 & 4\end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix}12 & 8\\-7 & 8\end{bmatrix}$

Solución. Multiplicando por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda, se tiene:

$$3X - 6Y = 3A$$
$$4X + 6Y = 2B$$

de donde: $X = \frac{1}{7}(3A+2B)$, $Y = \frac{1}{7}(B-2A)$

$$3A+2B = \begin{bmatrix}18 & -9\\21 & 12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}24 & 16\\-14 & 16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}42 & 7\\7 & 28\end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix}6 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}$$

$$B-2A = \begin{bmatrix}12 & 8\\-7 & 8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-12 & 6\\-14 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 14\\-21 & 0\end{bmatrix} \rightarrow Y = \begin{bmatrix}0 & 2\\-3 & 0\end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Si A y $B\in K^{m\times n}$, y p y q son números reales, entonces:

E_1: $p(qA) = (pq)A$ — Asociatividad escalar

E_2: $(p+q)A = pA + qA$ — Distributividad respecto a la suma de escalares.

E_3: $p(A+B) = pA + pB$ — Distributividad respecto a la suma de matrices.

EJERCICIOS

1. Escribir explícitamente las siguientes matrices:

a) $A = [a_{ij}] \in K^{3\times 2} / a_{ij} = i+2j$

b) $B = [b_{ij}] \in K^{3\times 3} / b_{ij} = 2^i - j$

c) $C = [c_{ij}] \in K^{3\times 4} / c_{ij} = \max(i,j)$

d) $D = [d_{ij}] \in K^{4\times 3} / d_{ij} = 2^i - (-1)^j$

2. Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} -2/3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Si A=B, hallar A+3C. Rp. $4I_2$

3. Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix} 2x+1 & 2 & z-1 \\ x+2 & -1 & 2y \\ y-1 & 8 & x-2z \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 3-2y & 2 & x+y \\ z+3 & -1 & z-2x \\ z-5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

Si A=B, hallar el valor de xyz. Rp. -12

4. Si $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$. Resolver la ecuación:

$2(X+B) - 3[A-2(B+X)]+C$. Rp. $X=\begin{bmatrix} -9 & 10 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

5. Si $A=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3(X-2A)=5(B-C)+2(X-A-B)$ Rp. $X=\begin{bmatrix} 29 & -4 \\ -6 & 28 \end{bmatrix}$

b) $3(X-A+B)=2[X-2(B+C)]-(X+C)$ Rp. $X=\begin{bmatrix} 6 & 10.5 \\ -22 & -12 \end{bmatrix}$

6. Si $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ 8 & 4 & -2 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 12 & 5 & -6 \\ -1 & 14 & 10 \end{bmatrix}$, resolver la ecuación: $2(X-2C)=3X-C-2(A+2B-X)$. Rp. $X=\begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ -6 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

7. Resolver el siguiente sistema: $2X+3Y=A$, $5X-2Y=B$, $X,Y\in K^{2\times 2}$, donde: $A=\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 16 & -6 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}$ Rp. $X=\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

2.9 MULTIPLICACION DE MATRICES

Con el propósito de comprender mejor la multiplicación de dos matrices veamos el siguiente ejemplo.

Un fabricante de muebles produce tres modelos de escritorios, que llevan tiradores de metal y chapas especificadas por la siguiente tabla.

Modelos / Partes	A	B	C
Nº de tiradores	8	6	4
Nº de chapas	3	2	1

Llamaremos a este arreglo, matriz de *partes* x *modelos*.

Si el fabricante recibe pedidos en el mes de Agosto 15 del modelo A, 24 del modelo B y 17 del modelo C; y en el mes de setiembre: 25 del modelo A, 32 del modelo B y 27 del modelo C.
Los datos quedan descritos en el siguiente cuadro:

Mes / Modelo	Agosto	Setiembre
A	15	25
B	24	32
C	17	27

Llamaremos a este arreglo, matriz de *modelo* x *mes*.

Si el fabricante desea saber de cuántos tiradores y chapas debe disponer cada mes para poder atender los pedidos, debe encarar el problema del siguiente modo:
Para determinar el número de tiradores requeridos en el mes de Agosto se sumarían el producto de cada elemento de la primera fila de la matriz *partes* x *modelos* por el correspondiente elemento de la primera columna de la matriz *modelo* x *mes*, esto es:

$$8(15) + 6(24) + 4(17) = 332$$

Para establecer el número de chapas requeridos en el mes de Agosto se sumarían el producto de cada elemento de la segunda fi-

la de la matriz *partes* x *modelos* por el correspondiente elemento de la primera columna de la matriz *modelo* x *mes*, esto es:

$$3(15) + 2(24) + 1(17) = 110$$

En el mes de Setiembre el número de tiradores se obtendría sumando el producto de cada elemento de la primera fila de la matriz *partes* x *modelos* por el correspondiente elemento de la segunda columna de la matriz *modelo* x *mes*, esto es:

$$8(25) + 6(32) + 4(27) = 500$$

Y para el número de chapas se sumarían el producto de cada elemento de la segunda fila de la matriz *partes* x *modelo* por el correspondiente elemento de la segunda columna de la matriz *modelo* x *mes*, esto es:

$$3(25) + 2(32) + 1(27) = 166$$

Con los resultados obtenidos podemos hacer el siguiente arreglo:

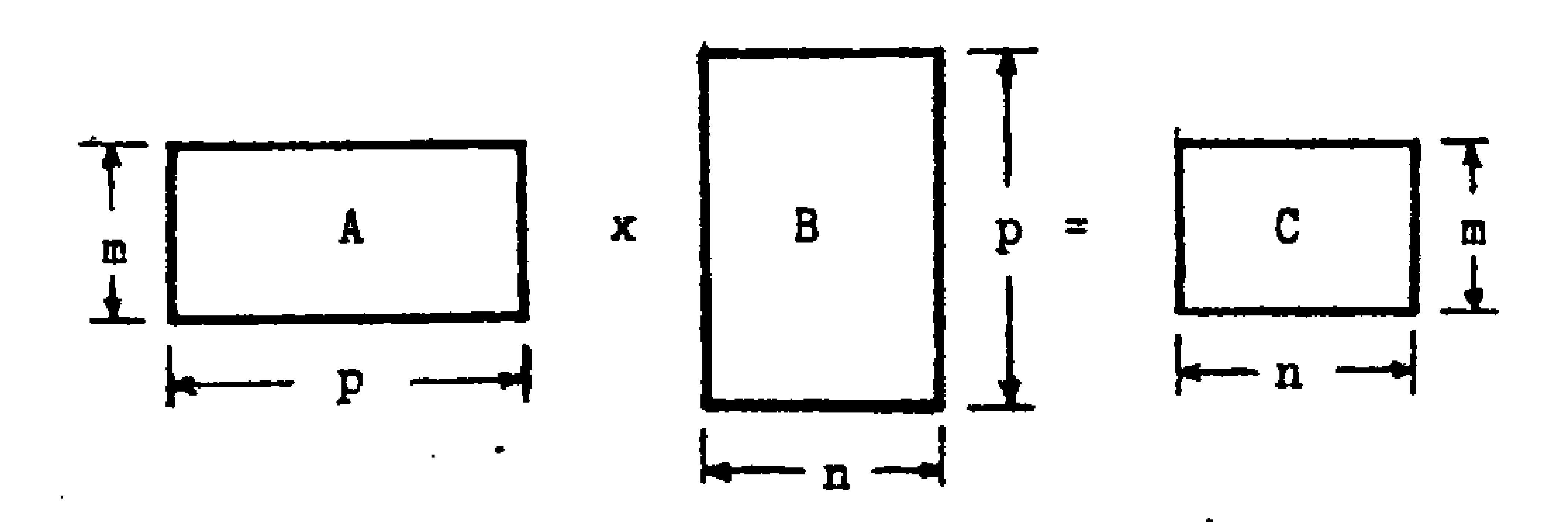
Partes \ Mes	Agosto	Setiembre
N° de tiradores	332	500
N° de chapas	110	166

Haciendo uso de la notación matricial, los datos y resultado obtenido nos expresará la multiplicación de matrices del siguiente modo:

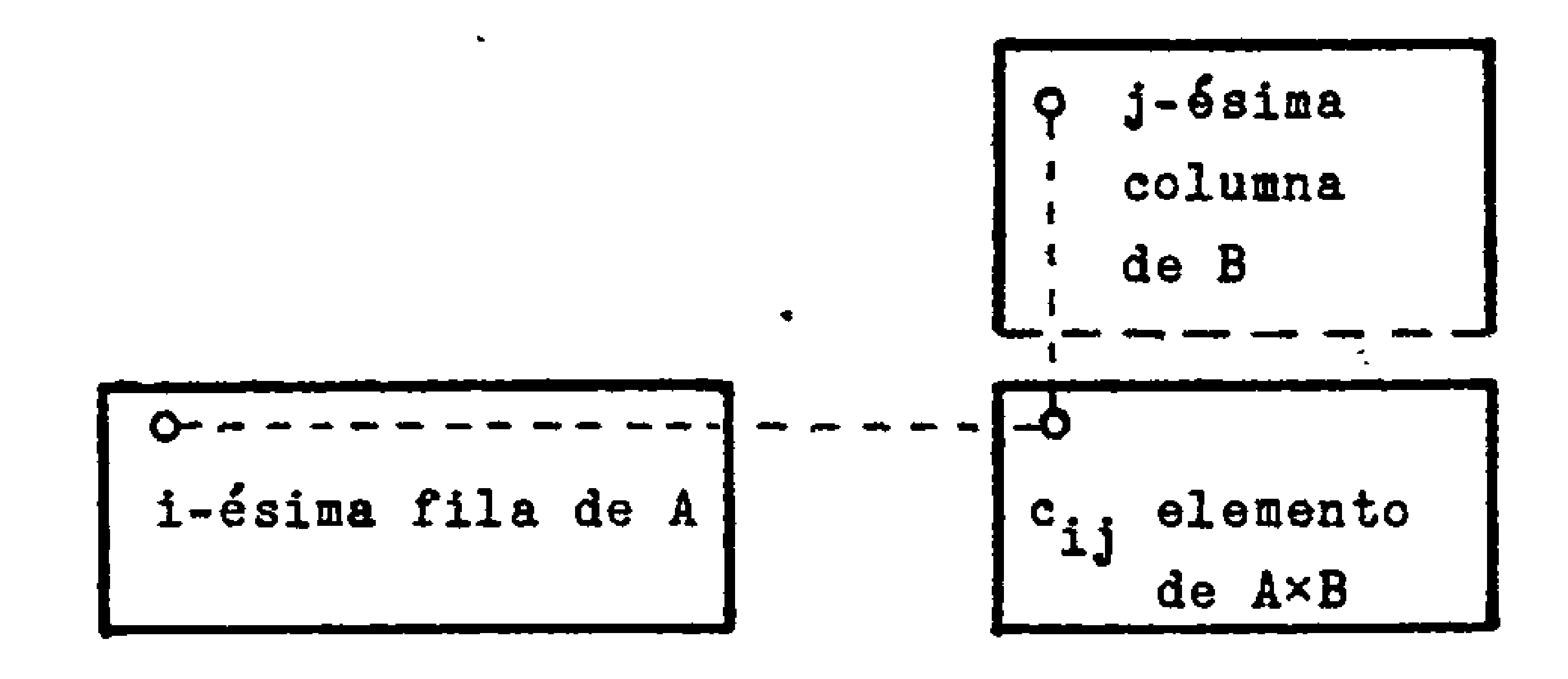
$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 24 & 32 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 332 & 500 \\ 110 & 166 \end{bmatrix}$$

Observamos de inmediato que el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda, cuando esto ocurre se dice que las matrices son *conformables para la multiplicación*.

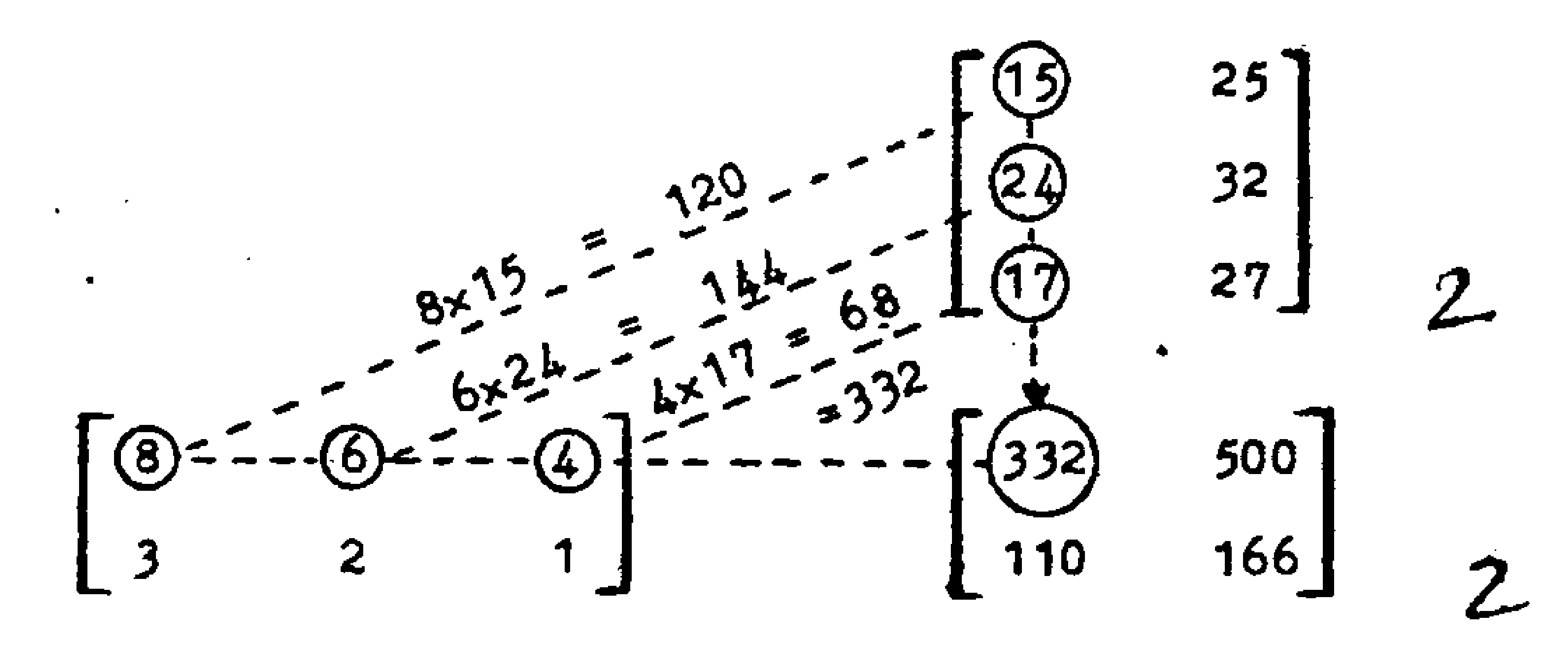
Mediante rectángulos que satisfagan la condición de que el largo del primero sea igual al ancho del segundo podemos representar el producto efectuado en la forma siguiente:



Para facilitar la comprensión del producto realizado delineamos el siguiente diagrama:



En consecuencia, una forma práctica para efectuar la multiplicación de matrices se presenta en el esquema siguiente:



DEFINICION 2.1 Si $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ y $B=[b_{ij}]_{p\times n}$, el producto A×B, en este orden, es la matriz $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ cuyos elementos se obtienen de los elementos de A y B siguiendo el siguiente desarrollo:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \tag{4}$$

Por esta definición cada elemento ij de C es la suma de los productos formados al multiplicar cada elemento de la i-ésima fila de A por los elementos correspondientes de B, esto es:

$$\text{i-ésima fila de A} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \overset{\text{j-ésima columna de B}}{\begin{bmatrix} b_{ij} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}} = c_{ij}$$

o bien:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj} \ , \ i=1,2,3,\ldots,m \quad ; \quad j=1,2,3,\ldots,n \qquad (5)$$

Observaciones.

(1) Si $A \in K^{m\times p}$ y $B \in K^{p\times n}$, las columnas de A y las filas de B son vectores de R^p; entonces el elemento c_{ij} de la matriz C es el producto escalar de la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B.

(2) El producto AB está definido si el número de columnas de A es igual número de filas de B. Si el producto AB está definido se dice que A es *conformable* con B para la multiplicación. No significa esto que B sea necesariamente conformable con A respecto de la multiplicación, toda vez que BA puede o no estar definido.

EJEMPLO 1. Si $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, hallar: a) AB , b) BA

Solución. Dado que A tiene dos columnas y B dos filas, entonces A es conformable con B y el producto AB está definido. Empleando el método del producto escalar se tiene:

$$\text{a) } AB = \begin{bmatrix} (2,3).\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & (2,3).\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} & (2,3).\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ (1,2).\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & (1,2).\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} & (1,2).\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(1)+3(4) & 2(-2)+3(1) & 2(3)+3(2) \\ 1(1)+2(4) & 1(-2)+2(1) & 1(3)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

b) En este caso B tiene tres columnas y A dos filas, luego B no es conformable con A respecto de la multiplicación y por tanto BA no está definido.

Recordando el desarrollo inicial para establecer la multiplicación de matrices, es evidente que el último esquema constituye un procedimiento muy eficaz para calcular el producto de dos o más matrices.

EJEMPLO 2. Si $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 12 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar la matriz: $D=(2A - \frac{1}{3}B)C$

Solución. Sea $E = 2A - \frac{1}{3}B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = C$$

$$-3\times 4 = -12 \qquad 9\times 2 = 18 \qquad d_{11} = 6$$

$$E = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ⑥ & 12 & -6 \\ 24 & -6 & 30 \\ -2 & -7 & 5 \end{bmatrix} = D$$

2.10 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE MATRICES

Si A, B y C son matrices de dimensiones compatibles (conformables) respecto de la suma y producto, entonces se tiene:

M_1: $A(BC) = (AB)C$ — Asociatividad

M_2: $A(B+C) = AB + BC$
$(A+B)C = AC + BC$ — Distributividad

M_3: $AB \neq BA$ — No Conmutatividad

M_4: $AB = 0 \not\to A=0$ ó $B=0$

M_5: $AB = AC \not\to B=C$

M_6: $\exists I \in K^n$ con la propiedad de que para cualquier $A \in K^n$ se

verifica que: AI = IA (I es la matriz identidad)

Demostración de: M1: A(BC) = (AB)C

En efecto:

Sean $A\in K^{p\times m}$, $B\in K^{m\times n}$ y $C\in K^{n\times r}$ definidas por:

$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$ y $C=[c_{kt}]$

$$\text{Si } BC = [d_{jt}] \rightarrow d_{jt} = \sum_{k=1}^{n}(b_{jk})(c_{kt})$$

$$\text{y } AB = [e_{ik}] \rightarrow e_{ik} = \sum_{j=1}^{m}(a_{ij})(b_{jk})$$

En consecuencia, si $A(BC) = [f_{it}]$ y $(AB)C = [g_{it}]$, entonces para cada par de índices i,t se tiene que:

$$f_{it} = \sum_{j=1}^{m}(a_{ij})(d_{jt}) = \sum_{j=1}^{m}(a_{ij})\sum_{k=1}^{n}(b_{jk})(c_{kt})$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(a_{ij})(b_{jk})(c_{kt})$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}[(a_{ij})(b_{jk})](c_{kt})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(a_{ij})(b_{jk})](c_{kt})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(e_{ik})(c_{kt})$$

$$\therefore\ f_{it} = g_{it} \leftrightarrow A(BC) = (AB)C$$

EJEMPLO 3. Si A, B y C son matrices conformables para la adición y multiplicación, demostrar que AB+AC = A(B+C).

Demostración. En efecto, la demostración requiere que las matrices B y C sean conformables respecto de la adición y las matrices A,B y A,C respecto de la multiplicación.

Sean entonces: $A=[a_{ik}]$, $B=[b_{kj}]$, $C=[c_{kj}]$

De la hipótesis se sigue que:

$$AB + AC = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}) + \sum_{k=1}^{n}(a_{ik})(c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(a_{ik})(b_{kj} + c_{kj})$$

$$= ([a_{ik}])([b_{kj} + c_{kj}])$$

$$\therefore \; AB + AC = A(B + C)$$

EJEMPLO 4. Sea la matriz $B=\begin{bmatrix} Cosx & -Senx \\ Senx & Cosx \end{bmatrix}$, Si $A=B^2$, hallar el valor de $a_{11}a_{22}$, para $x=2\pi/3$.

Solución. $A = B^2 = \begin{bmatrix} Cosx & -Senx \\ Senx & Cosx \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Cosx & -Senx \\ Senx & Cosx \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} Cos^2x-Sen^2x & -2SenxCosx \\ 2SenxCosx & Cos^2x-Sen^2x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Cos2x & -Sen2x \\ Sen2x & Cos2x \end{bmatrix}$$

Luego: $a_{11}a_{22}=(Cos2x)(Cos2x) = Cos^2(2\pi/3) = (-1/2)^2 = 1/4$

EJEMPLO 5. Dadas las matrices: A de orden $m\times n$, B de orden $n\times p$ y C de orden $r\times q$. Qué condiciones satisfacen p, q y r para que las matrices sean compatibles (conformables) respecto de los productos que se indican y cuál es el orden de cada una de las matrices siguientes:

a) ABC b) ACB c) A(B+C)

Solución. a) Sea ABC = D $\leftrightarrow$ $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} \cdot C_{r\times q} = D_{??}$

El producto AB está definido puesto que el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Luego, para que D esté definido se debe cumplir que, $p=r$, entonces:

Número de filas de D = número de filas de A

Número de columnas de D = Número de columnas de C

Por lo tanto, D es una matriz de orden $m\times q$

b) Sea ACB = E , entonces:

$$A_{m\times n} \cdot C_{r\times q} \cdot B_{n\times p} = E_{??}$$

El producto ACB es conformable $\leftrightarrow$ n=r y q=n
y el orden de la matriz ACB es $E_{m\times p}$

c) Sea A(B+C) = F , entonces:

$$A_{m\times n}(B_{n\times p} + C_{r\times q}) = F_{??}$$

Para que sea posible la suma B+C se debe cumplir que n=r y p=q. Luego, si B+C=G $\rightarrow$ $A_{m\times n}(G_{n\times q}) = F_{??}$

Por tanto, el orden de la matriz F es: m×q

EJEMPLO 6. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Si E=ABC, hallar: $S=e_{11}+e_{23}+e_{32}$

Solución. Sea D = AB

$$\rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ 8 & 4 & -11 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Si E=DC, entonces cada elemento e_{ij} de la matriz E es el producto interno de la fila i de la matriz D por la columna j de la matriz C, esto es:

$$e_{11} = d_{1j}c_{i1} = (5,6,-6).(3,-1,2) = 15-6-12 = -3$$

$$e_{23} = d_{2j}c_{i3} = (8,4,-11).(1,5,2) = 8+20-22 = 6$$

$$e_{32} = d_{3j}c_{i2} = (-1,6,3).(6,4,1) = -6+24+3 = 21$$

$$\therefore \quad S = 24$$

EJEMPLO 7. Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostrar que AB=AC. Qué puede concluir de esta igualdad?

Demostración.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB = AC$$

La igualdad no implica necesariamente que B sea igual a C.

EJEMPLO 8. Hallar la matriz $A\epsilon K^{2\times 2}$ tal que: $a_{22}=5$ y $A^2=\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{bmatrix}$

Solución. Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & 5 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+5b \\ ac+5c & bc+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{bmatrix}$$

de donde: $a^2+bc = 7$ (1)

$ab+5c = 7 \rightarrow b = \frac{7}{a+5}$ (2)

$ac+5c = 21 \rightarrow c = \frac{21}{a+5}$ (3)

$bc+25 = 28 \rightarrow bc=3$ (4)

Sustituyendo (4) en (1) se tiene: $a^2+3=7 \rightarrow a^2=4 \leftrightarrow a=2$ ó $a=-2$

En (2) y (3): Para $a=2 \rightarrow b=1$, $c=3$; si $a=-2 \rightarrow b=7/3$, $c=7$

La segunda alternativa no satisface $bc=3$, por tanto:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 9. La traza de una matriz cuadrada A se define como:

$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii})$ (Suma de los elementos de la diagonal principal). Si $A=\begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{bmatrix}$, hallar: a) Tr(A+B)

b) Tr(AB) y c) Tr(BA).

Solución. a) $A+B = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2+i & 5+i \end{bmatrix} \rightarrow Tr(A+B)=5+i$

b) $AB = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1-i \\ 2+4i & 4+8i \end{bmatrix} \rightarrow Tr(AB)=-2+4+8i = 2+8i$

c) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4i & 9i \\ 2+i & 3+4i \end{bmatrix} \rightarrow Tr(BA)=-1+4i+3+4i=2+8i$

Podemos observar que: $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$ y $Tr(AB)=Tr(BA)$

EJEMPLO 10. Demostrar que: $(\lambda A)B = \lambda(AB)$

Demostración. Sea $C = \lambda A \rightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij} \rightarrow c_{ik} = \lambda a_{ik}$

$$\text{Luego: } (\lambda A)B = CB = \sum_{k=1}^{n}(c_{ik})(b_{kj})$$

$$\rightarrow (\lambda A)B = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{ik})(b_{kj}) = \lambda \sum_{k=1}^{n}(a_{ik})(b_{kj}) = \lambda(AB)$$

EJEMPLO 11. Hallar la matriz P=ABCD, donde:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & -1 & 3\\1 & 4 & -1\\0 & 0 & 2\\3 & 1 & 0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\2 & 1 & -2 & 2\\1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Solución. Tenemos: $A_{3\times2} \cdot B_{2\times5} \cdot C_{5\times3} \cdot D_{3\times4} = P_{3\times4}$

Siendo el producto compatible, efectuamos primero el producto CD=E, luego BE=F y finalmente AF=P

$$D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\2 & 1 & -2 & 2\\1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & -1 & 3\\1 & 4 & -1\\0 & 0 & 2\\3 & 1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 0\\2 & -1 & 6 & -3\\8 & 4 & -8 & 7\\2 & 0 & 2 & 0\\5 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix} = E_{5\times4}$$

$$B = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4 & -1 & 8 & -3\\0 & -3 & 12 & -7\end{bmatrix} = F_{2\times4}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4 & -1 & 8 & -3\\4 & 2 & -4 & 4\\8 & 1 & 4 & 1\end{bmatrix} = P_{3\times4}$$

EJEMPLO 12. Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 10 & 1\\8 & 6 & -4 & 2\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\0 & 2 & 4\\1 & 6 & -2\\4 & 1 & 1\end{bmatrix}$ y $D=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\2 & 3 & 3\\1 & 4 & -2\end{bmatrix}$. Si P=ABCD, hallar el valor de la suma: $S = 2p_{12}+p_{13}-2p_{23}$

Solución. Sean los productos: AB=E y CD=F

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 10 & 1 \\ 5 & 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -10 & 24 & 0 \\ 26 & 18 & 14 & 11 \end{bmatrix} = E \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 10 & 21 & -2 \\ 10 & 10 & 22 \\ 11 & 3 & 1 \end{bmatrix} = F$$

Luego, si P=EF , entonces:

$p_{12} = e_{1j}f_{i2} = (-1,-10,24,0).(-6,21,10,3) = 36$

$p_{13} = e_{1j}f_{i3} = (-1,-10,24,0).(-3,-2,22,1) = 551$

$p_{23} = e_{2j}f_{i3} = (26,18,14,11).(-3,-2,22,1) = 205$

$$\therefore S = 2(36)+(551)-2(205) = 213$$

EJEMPLO 13. Hallar todas las matrices, conmutativas con la matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solución. Sean las matrices $B\in K^{3\times 3}$ tales que: $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$$\rightarrow AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+d & 3b+c & 3c+f \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow BA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & a+3b & b+3c \\ 3d & d+3e & e+3f \\ 3g & g+3h & h+3i \end{bmatrix}$$

Dado que A y B son conmutativas $\rightarrow$ AB=BA , luego:

$3a+d = 3a \rightarrow d=0$; $3b+e=a+3b \rightarrow e=a$; $3c+f = b+3c \rightarrow f=b$

$3d+g = 3d \rightarrow g=0$; $3e+h=d+3e \rightarrow h=d=0$; $3f+i = e+3f \rightarrow i=e=a$

$3g = 3g$; $3h = g+3h \rightarrow h=0$; $3i = h+3i \rightarrow h=0$

En consecuencia: $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, donde $a,b,c\in R$

EJEMPLO 14. Si $A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a\in R$, hállese una fórmula para A^n y y luego demostrar su validez por inducción.

Solución. $A^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \quad A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Para demostrar, por inducción, que la fórmula es verdadera supongamos que: $P(n)=A^n$

Entonces, si $n=1 \rightarrow P(1)=A$, en efecto: $A^1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ es (V)

Supongamos que para $n=h$, $P(h)$ es (V), esto es: $A^h = \begin{bmatrix} a^h & ha^{h-1} \\ 0 & a^h \end{bmatrix}$

es verdaddero.

Debemos probar que para $n=h+1$, $A^{h+1} = \begin{bmatrix} a^{h+1} & (h+1)a^h \\ 0 & a^{h+1} \end{bmatrix}$ es (V)

En efecto, valiéndonos de la hipótesis inductiva:

$$A^hA = A^{h+1} = \begin{bmatrix} a^h & ha^{h-1} \\ 0 & a^h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{h+1} & (h+1)a^h \\ 0 & a^{h+1} \end{bmatrix}$$

En consecuencia, hemos demostrado que:

$$P(1) \text{ es V} \wedge P(h) \text{ es V} \rightarrow P(h+1) \text{ es V}$$

EJEMPLO 15. Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz nula θ.

Solución. Sean las matrices $A \in K^{2\times 2}$ tales que: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\text{Si } A^2=\theta \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde: $a^2+bc = 0$

$ab+bd = 0 \rightarrow b(a+d)=0 \leftrightarrow b=0$ ó $d=-a$

$ac+dc = 0 \rightarrow c(a+d)=0 \leftrightarrow c=0$ ó $d=-a$

$bc+d^2 = 0$

Si en la segunda y tercera ecuación: $b=0$ y $c=0$ tendriamos nuevamente la matriz nula, entonces: $d=-a$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ donde } a,b,c \in R$$

EJEMPLO 16. Demostrar la propiedad: $\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij})$

Demostración. En efecto, desarrollando la primera sumatoria desde i=1 hasta i=m, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}) = (\sum_{j=1}^{n}a_{1j}) + (\sum_{j=1}^{n}a_{2j}) + (\sum_{j=1}^{n}a_{3j}) + \dots + (\sum_{j=1}^{n}a_{mj})$$

$$= (a_{11}+a_{12}+a_{13}+ \dots +a_{1n}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23}+ \dots +a_{2n}) + (a_{31}+a_{32}+a_{33}+ \dots +a_{3n}) + \dots\dots + (a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \dots + a_{mn})$$

$$= \sum_{i=1}^{m}a_{i1} + \sum_{i=1}^{m}a_{i2} + \sum_{i=1}^{m}a_{i3} + \dots + \sum_{i=1}^{m}a_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij})$$

EJEMPLO 17. Demostrar que Tr(AB)=Tr(BA)

Demostración. En efecto, sean las matrices conformables respecto de la multiplicación:

$$A_{n\times m} = |a_{ij}| \quad y \quad B_{m\times n} = |b_{ij}|$$

de modo que si:

$$A_{n\times m}.B_{m\times n} = C_{n\times n} \rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik})(b_{kj}) \rightarrow c_{ii} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

y

$$B_{m\times n}.A_{n\times m} = D_{m\times m} \rightarrow d_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(b_{ik})(a_{kj}) \rightarrow d_{kk} = \sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}$$

Luego: $Tr(AB) = Tr(C) = \sum_{i=1}^{n}(c_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ik})$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{ik})$$

Según la propiedad del ejemplo anterior:

$$Tr(AB) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}) = \sum_{k=1}^{n}(d_{kk}) = Tr(D)$$

$$\therefore Tr(AB) = Tr(BA)$$

EJERCICIOS

1. Calcular los productos:

   a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ Rp. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ Rp. $\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}$

2. Hallar a, b, c y d para que satisfagan la ecuación:

   $$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

   Rp. $a=1$, $b=6$
   $c=0$, $d=-2$

3. Si $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, calcular: $x+y+z$ Rp. 6

4. Si $\begin{bmatrix} 2 & b & 1 & d \\ a & -2 & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$

   Hallar el valor de $S=a+b+c+d$ Rp. 0

5. Si $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, hallar $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que: $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Rp. $x\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

6. Demostrar que $A(B+C) = AB + AC$

7. Hallar una matriz X de orden 2×1 tal que: $AX = 3X$, donde:
   $A=\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 3 & -2i \end{bmatrix}$. Rp. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, hallar el valor de A^2-4A Rp. $5I_2$

9. Comprobar que las identidades algebraicas $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ y $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ no son ciertas para las matrices:

   $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. Si $A^2=B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$ y $BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$; hallar: a) $(A+B)^2$ y b) $(A+B)(A-B)$. Rp. a) $\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & -2\end{pmatrix}$

11. Sean $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\-15 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 2\\-15 & 7\end{pmatrix}$ y $f(x,y)=x^2-xy+y^2$.

 a) Verificar que A y B conmutan.
 b) Evaluar $f(A,B)$. Rp. $\begin{pmatrix}-31 & 14\\-105 & 46\end{pmatrix}$

12. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, hallar la suma de los elementos de A^5. R. 28

13. Si $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\1 & 2 & 1\\-1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, hallar A^2. Rp. I_3

14. Si $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\-2 & -2 & -2\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, hallar A^{10}. Rp. 512A

15. Sean $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, hallar AB^2. Rp. B

17. Para la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{pmatrix}$, hallar $(-A)^3$ Rp. θ

18. Si $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & -1 & 2\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, hallar la matriz $M=A^3-2A^2$. Rp. 9A

19. Si $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3\\-5 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1 & -7\\-2 & 1 & 3 & 4\\3 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0 & -6\\-1 & 2 & 4 & 5\\4 & 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

 Demostrar que $AB=AC$ (aunque $B\neq C$).

20. Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 7\\1 & 8 & 9\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\2 & 6 & 1\\1 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

 Si $P=ABC$, hallar la suma: $S=p_{11}+p_{12}+p_{23}$. Rp. 282

21. Hallar todas las matrices, conmutables con la dada.

 a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ Rp. $B=\begin{pmatrix}a & 2b\\-3b & a+3b\end{pmatrix}$ $a,b\in R$

b) $A=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ Rp. $B=\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$

22. Si $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y P=ABC, hallar el valor de la suma: $S=p_{11}+p_{22}+p_{33}$ Rp. -3

23. Hállense todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz identidad I_2.

Rp. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a, b \in R$, donde $a^2+bc=1$

24. Determinar una fórmula para cada una de las siguientes potencias, y luego demostrarlo por inducción.

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in Z^+$ Rp. $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} Cos\alpha & -Sen\alpha \\ Sen\alpha & Cos\alpha \end{pmatrix}^n$, $n \in Z^+$ Rp. $\begin{pmatrix} Cosn\alpha & -Senn\alpha \\ Senn\alpha & Cosn\alpha \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in Z^+$ Rp. $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in Z^+$ Rp. $\begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{1}{2}n(n-3) \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar A^n. Rp. $2A^{n-1}$

25. Una Compañia tiene 4 fábricas, cada una emplea administradores, supervisores y trabajadores calificados en la forma siguiente:

	Fab. 1	Fab. 2	Fab. 3	Fab. 4
Administrad.	1	2	1	1
Supervisores	4	6	3	4
Trabajadores	80	96	67	75

Si los administradores ganan \$350 a la semana, los supervisores

res \$275 y los trabajadores \$200, cuál es la nómina de cada fábrica? Rp. [\$17,450 \$21,550 \$14,575 \$16,450]

MATRICES CUADRADAS ESPECIALES

Consideraremos en las secciones siguientes las matrices cuadradas que presentan ciertas características que las tipifican, entre otras, destacaremos las siguientes:

2.11 MATRIZ SIMETRICA. Dada una matriz $A=[a_{ij}]\varepsilon K^n$, si ocurre que $[a_{ij}]=[a_{ji}]$, $\forall i,j$ diremos que A es una matriz simétrica. Si designamos con A' a la matriz $[a_{ji}]$ y si es el caso que A=A', la matriz A es simétrica y también, para una constante λ cualquiera, λA es simétrica

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}2&2&4\\2&-6&0\\4&0&8\end{pmatrix}$, se tiene que: $A'=\begin{pmatrix}2&2&4\\2&-6&0\\4&0&8\end{pmatrix}$

Como A=A', entonces A es una matriz simétrica y también

$\lambda A = (1/2)A = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&-3&0\\2&0&4\end{pmatrix}$ es simétrica.

PROPOSICION 2.1 Si A es una matriz cuadrada de orden n, la matriz A+A' es simétrica.

Demostración. Sea la matriz $A=[a_{ij}]$, entonces $A'=[a_{ji}]$, si llamamos $B=[b_{ij}]$ a la matriz A+A' probaremos que B es simétrica.

En efecto, el elemento de la fila i y la columna j de A es a_{ij} y el correspondiente de A' es a_{ji}, por lo tanto:

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} \qquad (1)$$

El elemento de la fila j y columna i de A es a_{ji} y el correspondiente de A' es a_{ij}, de modo que:

$$b_{ij} = a_{ji} + a_{ij} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que: $b_{ij} = b_{ji}$

En consecuencia, B=A+A' es una matriz simétrica.

2.12 MATRIZ ANTISIMETRICA. Una matriz cuadrada $A=[a_{ij}]$ para la cual $A'=[a_{ji}]=-A$, recibe el nombre de matriz *antisimétrica* o *hemisimétrica*.

En una matriz cuadrada A antisimétrica se verifica que:

$$[a_{ij}] = [-a_{ji}],\ \forall i,j$$

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ocurre que: $A'=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $A'=-A$, entonces A es una matriz antisimétrica.

Observación. En una matriz antisimétrica los elementos de la diagonal principal deben ser cero.

PROPOSICION 2.2 Si A es una matriz cuadrada de orden n, la matriz $A-A'$ es antisimétrica.

Demostración. En efecto, considerando que $(A+B)'=A'+B'$ se tiene que:

$$(A-A')' = A'-(A')' = A'-A = -(A-A')$$

Por lo tanto, $A-A'$ es antisimétrica.

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $A'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Luego, $A-A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ y $(A-A')' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

de donde: $(A-A')' = -(A-A')$, por tanto, $A-A'$ es antisimétrica.

PROPOSICION 2.3 Toda matriz cuadrada A se puede descomponer en la suma de una matrix simétrica $A_s= \frac{1}{2}(A+A')$ y otra antisimétrica $A_a= \frac{1}{2}(A-A')$.

Demostración. En efecto, una matriz A se puede escribir como:

$$A = A + \frac{1}{2}A' - \frac{1}{2}A' = \frac{1}{2}(A+A') + \frac{1}{2}(A-A') \qquad (1)$$

Ahora bien: $\frac{1}{2}(A+A')' = \frac{1}{2}(A+A')$ y $\frac{1}{2}(A-A')' = -\frac{1}{2}(A-A')$

Si escribimos: $A_s = \frac{1}{2}(A+A')$ y $A_a = \frac{1}{2}(A-A')$, entonces A_s es simétrica y A_a es antisimétrica. En consecuencia, hemos expresado

así la matriz cuadrada A como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica, esto es, en (1):

$$A = A_s + A_a$$

Por ejemplo:
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$A \quad = \quad A_s \quad + \quad A_a$$

2.13 MATRIZ IDENTIDAD. Una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son todos uno y los otros elementos son todos cero, recibe el nombre de *matriz identidad o matriz unidad*. Se denota generalmente con I_n, esto es:

$$I_n = [\delta_{ij}] \rightarrow ij = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Además: $Tr(I_n)=n$, $(I_n)'=I_n$, $AI=IA=A$

Por ejemplo, la matriz identidad de tercer orden es: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 1. Si A, B, C y D son matrices del mismo orden tales q' $BC=CB=I$, $AD=DA=I$, hallar usando propiedades:

a) (AB)(CD) b) $(A+B)^2$ c) (A+D)(A-D)

Solución. a) $(AB)(CD) = A[B(CD)]$ (M_1)
$= A[(BC)D]$ (M_1)
$= A[ID]$ (Condición)
$= AD$ (M_6)
$\therefore\ (AB)(CD) = I$

b) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B$ (M_2)
$= A^2+BA+AB+B^2$ (M_2)

c) $(A+D)(A-D) = (A+D)A - (A+D)D$ (M_2)
$= A^2+ DA - AD - D^2$ (M_2)
$= A^2+ I - I - D^2$ (Condición)
$= A^2-D^2$

EJEMPLO 2. Si A y $B=\alpha A+\beta I$ son matrices del mismo orden, donde y β son escalares, demostrar que A y B conmutan.

Demostración. Debemos probar que: AB=BA

En efecto:

$$\begin{aligned} AB &= A(\alpha A + \beta I) \\ &= \alpha AA + \beta AI \\ &= (\alpha A + \beta I)A = BA \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Hallar el valor del polinomio f(A) de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ si } f(x)=3x^2-4.$$

Solución. Si $f(x)=3x^2-4 \rightarrow f(A)=3A^2-4I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow f(A) = 3\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4. Dada la fórmula $e^z = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z^n}{k!})$, $\forall z\varepsilon C$. Definimos:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{A^n}{k!}), \ \forall A$$

a) Demostra que: $e^I = eI = e$

b) Hallar e^A si $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución. a) En efecto, haciendo uso de la definición para A=I

$$\text{se tiene: } e^I = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{I^n}{k!}) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{I}{k!}) = I\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k!})$$

Haciendo z=1 en la fórmula dada: $e^1 = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k!})$

$$\therefore e^I = I(e) = e$$

b) Desarrollando el segundo miembro de la definición se tiene:

$$e^A = \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^{\infty}}{\infty!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta$$

Luego: $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2$

$$\therefore\ e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.14 MATRIZ DIAGONAL Una matriz cuadrada de la forma $D=[k_i d_{ij}]$, en la que k_i puede variar según i, se llama matriz diagonal. Se representa usualmente por:

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, d_{33}, \ldots, d_{nn})$$

y tiene la propiedad de que:

$$D^n = diag(d_{11}^n, d_{22}^n, d_{33}^n, \ldots, d_{nn}^n)$$

Por ejemplo: $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = diag(3,-2,4)$

$$\rightarrow D^2 = diag(9,4,16)\ ;\ D^3 = diag(27,-8,64)$$

2.15 MATRIZ ESCALAR Una matriz cuadrada $E=[k\delta_{ij}]=kI_n$, para cualquier constante k, recibe el nombre de matriz escalar.

Así la matriz: $E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ en la que $E=4I_3$ es una matriz escalar.

EJEMPLO 4. Sea $D=[d_{ij}]$ tal que: $d_{ij}=i$, si $i=j$ y $d_{ij}=0$, si $i\neq j$ y $A=[a_{ki}]$ tal que: $a_{ki}=i$, si $i=k$ y $a_{ki}=a$, si $i\neq k$, donde A, $D\varepsilon K^n$. Hallar AD^n, $n\varepsilon Z^+$.

Solución. D es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal varían según i, esto es:

$$D = diag(1,2,3,\ldots,n)$$

$$\rightarrow D^n = diag(1,2^n,3^n,\ldots,n^n)$$

A es una matriz cuyos elementos de la diagonal principal varían según i y los demás elemento son todos a, esto es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots\cdots & a \\ a & 2 & a & \cdots\cdots & a \\ a & a & 3 & \cdots\cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots\cdots & n \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ AD^n = \begin{pmatrix} 1 & a2^n & a3^n & \cdots\cdots & an^n \\ a & 2^{n+1} & a3^n & \cdots\cdots & an^n \\ a & a2^n & 3^{n+1} & \cdots\cdots & an^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a2^n & a3^n & \cdots\cdots & n^{n+1} \end{pmatrix}$$

2.16 MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR. La matriz cuadrada A cuyos elementos situados debajo de la diagonal principal son todos cero, se llama *matriz triangular superior*. Esto es, $a_{ij}=0$, si $i>j$.

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

2.17 MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR. Una matriz cuadrada A cuyos elementos situados por encima de la diagonal principal son todos cero, se llama *matriz triangular inferior*. Esto es, $a_{ij}=0$, si $i<j$.

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

2.18 MATRIZ PERIODICA. Dada la matriz cuadrada A, si para un número entero y positivo p, ocurre que $A^{p+1}=A$, se dice que A es una matriz de período p.

EJEMPLO 5. Si A es una matriz cudrada y periódica tal que $A^5=A$, hallar el periodo y calcular A^{99}

Solución. Según la definición, si $A^{p+1}=A^5 \rightarrow p+1=5 \leftrightarrow p=4$ es el periodo de la matriz.

Multiplicando sucesivamente, por si misma, la matriz A se tiene

$$\underbrace{A \times A \times A \times A \times}_{A^5=A} \underbrace{A \times A \times A \times A \times A}_{A^9=A} \times \ldots\ldots$$

Vemos que: $A^9 = A^{4\times2+1} = A$

$A^{13} = A^{4\times3+1} = A$

$\vdots$

$A^{p+1} = A^{4m+1} = A$

Ahora bien: $A^{99} = A^2(A^{97})$, pero: $A^{97} = A^{4\times24+1} = A$

$$\therefore\ A^{99} = A^2(A) = A^3$$

EJEMPLO 6. Si $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{25}

Solución. $A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^3 = A^2A = IA = A$, entonces $p+1=3 \leftrightarrow p=2$ es el periodo de la matriz.

Por tanto: $A^{25} = A^{2\times12+1} = A$

EJEMPLO 7. Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, hallar A^{100}

Solución. $A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

Entonces: $A^4 = A^3A = -IA = -A$

$A^5 = A^4A = (-A)A = -A^2$

$A^6 = A^5A = (-A^2)A = -A^3 = I$; $A^7=A^6A = IA = A$

Luego, $p+1=7 \leftrightarrow p=6$ es el periodo de la matriz A.

$A^{100} = A^3(A^{97})$, pero $A^{97} = A^{6\times16+1} = A$

$$\therefore\ A^{100} = A^3A = A^4 = -A$$

Observaciones.

(1) Si p=1, esto es: $A^{1+1} = A^2 = A$, entonces la matriz A se llama *idempotente*.

EJEMPLO 8. Establecer si la matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ es idempotente.

Solución. $$A^2 = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix} = A$$

Por tanto, la matriz A es idempotente.

EJEMPLO 9. Si $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$, hallar A^5B^7.

Solución. $$A^2 = \begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix} = A \quad \text{(Idemp.)}$$

Luego: $A^5 = (A^2)^2A = (A)^2A = AA = A^2 = A$

$$B^2 = \begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix} = B \quad \text{(Idempotente)}$$

Luego: $B^7 = B(B^2)^3 = B(B)^3 = B^2B^2 = B^2 = B$

Por tanto: $$A^5B^7 = \begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \theta$$

(2) Una matriz A, para la cual $A^p=\theta$, siendo p un número entero y positivo, se llama *nilpotente* de índice p.

EJEMPLO 10. Determinar si la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$ es nilpotente.

Solución. $$A^2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \theta$$

Por tanto, A es una matriz nilpotente de índice p=3.

(3) Una matriz A, tal que, $A^2=I$ se llama *involutiva*

EJEMPLO 11. Determinar si la matriz $A=\begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ es involutiva.

Solución. $A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Por tanto, la matriz A es involutiva.

EJEMPLO 12. Si A es una matriz involutiva

a) Demostrar que $\frac{1}{2}(I+A)$ y $\frac{1}{2}(I-A)$ son idempotentes.

b) Calcular la matriz $P = \frac{1}{2}(I+A)(I-A)$

Solución. a) Sea $B = \frac{1}{2}(I+A) \rightarrow B^2 = \frac{1}{4}(I+A)(I+A) = \frac{1}{4}(I^2+IA+AI+A^2)$

$= \frac{1}{4}(I+A+A+I) = \frac{1}{2}(I+A)$

Luego: $B^2=B \rightarrow \frac{1}{2}(I+A)$ es idempotente

Sea $C = \frac{1}{2}(I-A) \rightarrow C^2 = \frac{1}{4}(I-A)(I-A) = \frac{1}{4}(I^2-IA-AI+A^2)$

$= \frac{1}{4}(I-A-A+I) = \frac{1}{2}(I-A)$

Luego, $C^2=C \rightarrow \frac{1}{2}(I-A)$ es idempotente.

b) $P = \frac{1}{2}(I-A)(I+A) = \frac{1}{2}(I^2+IA-AI-A^2) = \frac{1}{2}(I+A-A-I) = \theta$

EJEMPLO 13. Si A y B son matrices involutivas y $AB=BA=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

hallar la traza de la matriz $X=(A+B)^2$.

Solución. $X = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 = A^2+2AB+B^2$

Dado que A y B son matrices involutivas $\rightarrow A^2=B^2=I$

Luego: $X = 2I+2AB= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

$\therefore Tr(X) = 8+4-8 = 4$

2.19 MATRIZ TRANSPUESTA

Dada una matriz A de orden m×n, se llama *matriz transpuesta* de A, se anota A^t, a la matriz de orden n×m cuyos elementos se obtienen intercambiando las filas por columnas.

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, la transpuesta es $A^t=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

PROPIEDADES.. Si A^t y B^t son, respectivamente, las transpuestas de las matrices A y B, conformables respecto de la adición y multiplicación, y λ un escalar cualquiera; entonces se cumplen las siguientes propiedades:

T_1: $(A^t)^t = A$

T_2: $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

T_3: $(A+B)^t = A^t + B^t$

T_4: $(AB)^t = B^tA^t$

T_5: $(I_n)^t = I_n$

EJEMPLO 14. Demostrar la propiedad T_4: $(AB)^t = B^tA^t$

Demostración. En efecto, sean:

$A = [a_{ij}]$ una matriz de orden m×n

$B = [b_{ij}]$ una matriz de orden n×p

Si hacemos AB=C, entonces $C=[c_{ij}]$ es una matriz de orden m×p.
El elemento de la fila i y la columna j de AB es:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik})(b_{kj})$$

que también pertenece a la fila j y columna i de $(AB)^t$.

Luego, si $(AB)^t=C^t \rightarrow c_{ji} = \sum_{k=1}^{n}(a_{jk})(b_{ki})$ (1)

Supongamos que $B^t=[x_{ik}]$ tal que $[x_{ik}]=[b_{ki}]$

y $A^t=[y_{kj}]$ tal que $[y_{kj}]=[a_{jk}]$

Entonces: $B^tA^t = \sum_{k=1}^{n}(x_{ik})(y_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(b_{ki})(a_{jk}) = \sum_{k=1}^{n}a_{jk}.b_{ki}$

Comparando con (1) se concluye que:

$$(AB)^t = B^tA^t$$

EJEMPLO 15. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $(AB)^t+X = 2(B^t+A)$, hallar la traza de la matriz X.

Solución. De la ecuación dada se tiene: $X = 2A+2B^t-B^tA^t$

Un elemento cualquiera de la matriz X es:

$x_{ij} = 2a_{ij} + 2b_{ji} - (b_{jk})(a_{ki})$

$\rightarrow x_{11} = 2a_{11}+2b_{11}-(b_{1k})(a_{k1})=2(1)+2(1/2)-(1/2,0,0).(1,4,-3)= 2.5$

$x_{22} = 2a_{22}+2b_{22}-(b_{2k})(a_{k2})=2(0)+2(1/5)-(0,1/5,0).(2,0,1) = 0.4$

$x_{33} = 2a_{33}+2b_{33}-(b_{3k})(a_{k3})=2(-2)+2(1)-(0,0,1).(1,5,-2) = 0$

$$\therefore \text{Tr}(X) = 2.9$$

EJEMPLO 16. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & -8 \end{pmatrix}$.

Si $(A^t+B)^t = 2(X-A^t)+3B$, hallar la suma de las componentes de la tercera fila de la matriz X.

Solución. Según las propiedades T_3 y T_1 se tiene:

$(A^t)^t+B^t=2X-2A^t+3B \rightarrow X = \frac{1}{2}(A+B^t+2A^t-3B)$

Luego: $x_{31} = \frac{1}{2}(a_{31}+b_{13}+2a_{13}-3b_{31}) = \frac{1}{2}(2+1+10-15) = -1$

$x_{32} = \frac{1}{2}(a_{32}+b_{23}+2a_{23}-3b_{32}) = \frac{1}{2}(-4+0+6-18) = -8$

$x_{33} = \frac{1}{2}(a_{33}+b_{33}+2a_{33}-3b_{33}) = \frac{1}{2}(2-8+4+24) = 11$

$$\therefore x_{31}+x_{32}+x_{33} = 2$$

EJEMPLO 17. Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C=(AB)^t-B$; hallar el valor de la suma $S=c_{21}+c_{31}+c_{23}$

Solución. Si $C=(AB)^t-B \rightarrow c_{ij} = (a_{jk})(b_{ki}) - b_{ij}$

$\rightarrow$ $c_{21} = (a_{1k}).(b_{k2})-b_{21} = (0,-1,3).(3,1,-1)-(-2) = -2$

$c_{31} = (a_{1k}).(b_{k3})-b_{31} = (0,-1,3).(0,-2,4)-(0) = 14$

$c_{23} = (a_{3k}).(b_{k2})-b_{23} = (3,2,1).(3,1,-1)-(-2) = 12$

$\therefore S=24$

EJEMPLO 18. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 10 & 5\\ 4 & 5 & 21\end{pmatrix}$, hallar la matriz triangular inferior B, tal que: $BB^t=A$

Solución. Sea $B=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & c & 0\\ d & e & f\end{pmatrix} \rightarrow B^t=\begin{pmatrix}a & b & d\\ 0 & c & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}$

Si $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & c & 0\\ d & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & d\\ 0 & c & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 & ab & ad\\ ab & b^2+c^2 & bd+ce\\ ad & bd+ce & d^2+e^2+f^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 10 & 5\\ 4 & 5 & 21\end{pmatrix}$

Entonces: $a^2=4$, $ab=2$, $ad=4$
$ab=2$, $b^2+c^2=10$, $bd+ce=5$
$ad=4$, $bd+ce=5$, $d^2+e^2+f^2=21$

de donde obtenemos: $a=2$, $b=1$, $c=3$, $d=2$, $e=1$, $f=4$

$$\therefore B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

2.20 MATRIZ HERMITIANA.

Una matriz cuadrada y compleja A se denomina hermitiana si es igual a la transpuesta de su conjugada.
Una matriz compleja es aquella que tiene como elementos a los números complejos. Por ejemplo, una matriz compleja es:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3+1 & i\\ 3-i & 3 & 1-i\\ -i & 1+i & 2\end{pmatrix}$$

y su conjugada, que se denota $\overline{A}$, es:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix}1 & 3-i & -i\\ 3+i & 3 & 1+i\\ i & 1+i & 2\end{pmatrix} \rightarrow (\overline{A})^t = \begin{pmatrix}1 & 3+i & i\\ 3-i & 3 & 1-i\\ -i & 1+i & 2\end{pmatrix} = A$$

Vemos que $A=(\overline{A})^t$, luego, A es una matriz hermitiana.

Observación. En una matriz hermitiana los elementos de la diagonal principal son números reales.

2.21 MATRIZ INVERSA. Si $A \in K^n$, se dice que A es inversible si existe una matriz B tal que AB=I ó BA=I, para los que B recibe el nombre de ***matriz inversa*** de A y se denota: $B=A^{-1}$. Del mismo modo, la matriz A es la inversa de B y se escribe: $A=B^{-1}$.

PROPIEDADES. Si A y B son matrices cuadradas de orden n, inversibles, entonces:

PI_1: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

PI_2: $(A^{-1})^{-1} = A$

PI_3: Si $AB = BA = I \rightarrow B=A^{-1}$

PI_4: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

PI_5: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

EJEMPLO 19. Demostrar la propiedad PI_4: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostración. Por definición de matriz inversa debemos probar que: a) $(AB)(B^{-1}A^{-1})=I$ y b) $(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$

En efecto:

a) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A$ (M_1)

$= A(\ I\ )A^{-1}$ (PI_1)

$= AA^{-1}$ (M_6)

$= I$ (PI_1)

b) $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$ (M_1)

$= B^{-1}(\ I\ )\ B$ (PI_1)

$= B^{-1}B$ (M_6)

$= I$ (PI_1)

En consecuencia, de a) y b) se concluye que:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

EJEMPLO 20. Demostrar la propiedad $PI_5: (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Demostración. En efecto, según $PI_1: AA^{-1}=I$ y por $T_5: I^t=I$

$$(AA^{-1})^t = I^t = I$$

$$(A^{-1})^t A^t = I \qquad (T_4)$$

Multiplicando por $(A^t)^{-1}$ se tiene:

$$(A^{-1})^t \underbrace{A^t\,(A^t)^{-1}}_{I} = I(A^t)^{-1}$$

$$\therefore\ (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

EJEMPLO 21. Demostrar que la inversa de una matriz, si existe, es única.

Demostración. En efecto, supongamos que existe dos matrices B y C, tales que: $A^{-1}=B$ y $A^{-1}=C$, siendo $B \neq C$.

Entonces, por definición: $AB = I = BA$

$$AC = I = CA$$

De estas dos igualdades se deduce que: $AB = AC$

o sea: $AB-AC = \theta \rightarrow A(B-C) = \theta$

[illegible] existe A^{-1}, entonces: $A \neq \theta \rightarrow B-C=\theta \leftrightarrow B=C$

Lo que contradice la hipótesis.

En consecuencia, la inversa de una matriz es única.

EJEMPLO 22. Si $M=I-X(X^tX)^{-1}X^t$ con $X=[x_{i1}]_{n\times 1}$, simplificar al máximo la suma: $S=I+M+M^2+M^3+\ \dots +M^p$, donde $p \in Z^+$.

Solución. $M^2 = [I-X(X^tX)^{-1}X^t][I-X(X^tX)^{-1}X^t]$

$$= \underbrace{I-X(X^tX)^{-1}X^t}_{M} - X(X^tX)^{-1}X^t + [X(X^tX)^{-1}X^t][X(X^tX)^{-1}X^t]$$

$$= M - X(X^tX)^{-1}X^t + X[(X^tX)^{-1}X^tX](X^tX)^{-1}X^t$$

$$= M - X(X^tX)^{-1}X^t - X[\ I\ ](X^tX)^{-1}X^t$$

de donde: $M^2 = M \rightarrow M^3 = MM^2 = M(M) = M^2 = M$

$$\rightarrow M^4 = MM^3 = M(M) = M^2 = M \rightarrow M^p = M$$

$$\therefore\ S = I + M + M + M + \ \dots\dots + M = I + pM$$

2.22 INVERSA DE UNA MATRIZ TRIANGULAR

Si A es una matriz triangular inferior y X su inversa, como por definición AX=I, entonces

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por la multiplicación e igualdad de matrices, el producto de la primera fila de A por la primera columna de X es 1, esto es:

$$(a_{11},0,0,\ldots,0).(x_{11},x_{21},\ldots,x_{n1})=1 \text{ , de donde: } x_{11} = a_{11}^{-1}$$

Ahora, efectuando el producto interno de la primera fila de A con las columnas restantes de X y aplicando la igualdad, resulta que:

$$x_{12} = x_{13} = \ldots\ldots = x_{1n} = 0$$

Al multiplicar la segunda fila de A' con la segunda columna de X, esto es:

$$(a_{21},a_{22},\ldots,0).(0,x_{22},\ \ldots\ ,x_{n2})=1, \text{ de donde: } x_{22} = a_{22}^{-1}$$

De igual manera, del producto interno de la segunda fila de A por las otras columnas de X se concluye que:

$$x_{21} = x_{23} = \ldots\ldots = x_{2n} = 0$$

Reiterando el proceso hasta la n-ésima fila de A podemos concluir que si una matriz triangular inferior A es inversible, entonces:

(1) Todos los elementos de la diagonal principal deben ser diferente de cero.

(2) La inversa A^{-1} es también una matriz triangular inferior.

(3) Los elementos de la diagonal principal de A^{-1} son los números:

$$a_{11}^{-1},\ a_{22}^{-1},\ \ldots\ldots\ ,\ a_{nn}^{-1}$$

Por lo tanto, la ecuación matricial anterior se convierte en:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & a_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Por analogía establecemos que si A es una *matriz triangular superior*, entonces A tiene una inversa si y sólo si no existen ceros en la diagonal principal, A^{-1} es una matriz triangular superior y para calcular A^{-1} se debe resolver la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & a_{22}^{-1} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Las ecuaciones (6) y (7) nos permite deducir la inversa de una matriz diagonal (Triangular superior e inferior), esto es:

Si $D=\text{diag}(a_{11},a_{22},a_{33}, \dots\dots, a_{nn})$, entonces:

$$D^{-1} = \text{diag}(a_{11}^{-1},a_{22}^{-1},a_{33}^{-1}, \dots , a_{nn}^{-1}) \quad (8)$$

EJEMPLO 23. Determinar, si existe, la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución. La matriz A es inversible, puesto que no hay ceros en la diagonal principal. Por la ecuación (6) resolvemos la ecuación matricial: $AA^{-1}=I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_{21} & 1/2 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular x_{21} se efectúa el producto escalar de la segunda fila de A por la primera columna de A^{-1}, esto es:

$$(-1,2,0).(1,x_{21},x_{31})=0 \text{ , de donde: } x_{21}=1/2$$

A continuación se efectúa el producto escalar de la tercera fila de A por la primera columna de A^{-1}, esto es:

$$(1,2,3).(1,1/2,x_{31})=0 \text{ , de donde: } x_{31}=-2/3$$

Finalmente se calcula el producto escalar de la tercera fila de A por la segunda columna de A^{-1}, es decir:

$$(1,2,3).(0,1/2,x_{32})=0 \text{ , de donde: } x_{32}=-1/3$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 24. Si $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, hallar la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz: $M=3A^{-1}-2B^{-1}$.

Solución. Como las matrices A y B son triangulares se tiene:

$$m_{11} = 3a_{11}^{-1} - 2b_{11}^{-1} = 3(1/3)-2(1/2) = 0$$

$$m_{22} = 3a_{22}^{-1} - 2b_{22}^{-1} = 3(1/2)-2(1/5) = 11/10$$

$$m_{33} = 3a_{33}^{-1} - 2b_{33}^{-1} = 3(1/5)-2(-1/2) = 8/5$$

$$\therefore \quad Tr(M) = 2.7$$

EJEMPLO 25. Si B es la inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$, hallar el valor de la suma: $S=b_{21}+b_{32}+b_{33}$

Solución. A es una matriz triangular inferior, luego, por la ecuación (6) se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & -1 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1/5 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto escalar de la segunda fila de A por la primera columna de B se tiene:

$$(4,-1,0,0).(1/2,b_{21},b_{31})=0 \ , \text{ de donde: } b_{21}=4/5$$

Del producto escalar de la tercera fila de A por la segunda columna de B se tiene:

$$(3,4,5,0).(0,-1,b_{32},b_{42})=0 \ , \text{ de donde: } b_{32}=4/5$$

De la matriz B obtenemos: $b_{33}=1/5$

$$\therefore \quad S = 3$$

EJEMPLO 26. Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz triangular superior de orden n, tal que $a_{ij}=1$ si $i\leq j$. De la matriz $B=A^3$, hallar la suma de los elementos b_{ij} para los cuales:

a) $i=2$, $j=n$ b) $i=3$, $j=n-3$ c) $i=j$

Solución. Según la definición construimos la matriz triangular:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

Al efectuar el producto $AA=A^2$, obtenemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & \frac{1}{2}(n-1)n & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & 1 & 3 & 6 & \cdots & \frac{1}{2}(n-2)(n-1) & \frac{1}{2}(n-1)n \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & \frac{1}{2}(n-3)(n-2) & \frac{1}{2}(n-2)(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Luego, para: $i=2$, $j=n$ $\rightarrow$ $b_{2n} = \frac{1}{2}(n-1)n$

$i=3$, $j=n-3$ $\rightarrow$ $b_{3(n-3)} = \frac{1}{2}(n-4)(n-3)$

$i=j$ $\rightarrow$ $b_{ij} = 1$

$\therefore$ $S = \frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}(n-4)(n-3) + 1 = n^2-4n+7$

EJERCICIOS

1. Para la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, verificar que $A^2-2A-5I=\theta$

2. Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2-5A+7I=\theta$

3. Se dice que una matriz A es ortogonal, si su inversa es igual a su transpuesta, es decir, $A^{-1}=A^t$. Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} \text{Cosx} & -\text{Senx} \\ \text{Senx} & \text{Cosx} \end{pmatrix}$ es ortogonal. (Sug. Probar que $AA^t=A^tA=I$)

4. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que $A^2=2A-I$ y hallar A^n. R. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, hallar X en: $(AB)^t+X = 2(B^t+A)$. Rp. $X=\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$

6. Hallar el valor del polinomio f(A) de la matriz A.

   a) $f(x)=x^2-3x+1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Rp. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $f(x)=3x^2-2x+5$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ Rp. $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$

   c) $f(x)=8x^3+2x^2+x-3$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Rp. $\begin{pmatrix} 26 & 127 \\ 254 & 661 \end{pmatrix}$

   d) $f(x)=x^3-3x^2-2x+4$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ Rp. $\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$

7. Sean: $f(x)=x^2-x+3$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Evaluar f(A+B). Rp. $\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 35 & 10 \end{pmatrix}$

8. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ y la ecuación $\frac{1}{2}(X-3A)=(A^t-2B)^t+A^t$; hallar la suma de las componentes de la segunda fila y la suma de las componentes de la tercera columna de la matriz X. Rp. 2 y 23

9. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, despejar X de la ecuación $(A+B+X)^t=2(A^t-B)$ Rp. $\begin{bmatrix} -2 & 15 & -13 \\ 14 & -3 & 7 \\ -8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

10. Sean las matrices $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $C=(1,-2,3)$. Si $B^tA=C$ hallar el valor de $S=x+y+z$. Rp. S=2

11. Para la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, comprobar que $A^3=I_3$

12. Si $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcular A^{20}. Rp. I

13. Demostrar que las matrices $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ son idempotentes y permutables.

14. Sean $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Demostrar q' las matrices dadas son idempotentes y además permutables dos a dos, dando en cada caso la tercera.

15. Mostra que $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ es una matriz nilpotente de índice 2.

16. Mostrar que $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ son involutivas.

17. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Verificar que: $A^2=B^3=C^4=I_3$

18. Si A y B son matrices involutivas y $AB=BA=\begin{bmatrix}-5 & -8 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, hallar la traza de la matriz $M=(A+B)^2$. Rp. 4

19. Si $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 2 & 4\\ 0 & 2 & -2\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}2 & 1.5 & 1.5\\ 5 & 2 & 2\\ 2 & 7.5 & -3.5\end{bmatrix}$. Hallar la matriz $M=(AB)^t-2C$. Rp. $2I_3$

20. Si $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 0\\ 1 & -5 & -2\end{bmatrix}$ y $C=(BA)^t+2A$. Hallar la suma de los elementos de la segunda fila de la matriz C. Rp. 16

21. Se dice que una matriz A es ortogonal si $A^{-1}=A^t$. Comprobar la matriz $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$ es ortogonal. $(AA^t=A^tA=I)$

22. En una página deteriorada de un antiguo texto se encuentra que la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 0 & y\\ 0 & 0 & z\end{bmatrix}$ y del producto A^2A^t sólo se puede leer la última columna $\begin{bmatrix}\cdot & \cdot & -6\\ \cdot & \cdot & 2\\ \cdot & \cdot & -1\end{bmatrix}$. Hallar x+y+z. Rp. 4

23. Demostrar que la matriz $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ satisface la ecuación: $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

24. Demostrar que si $f(X,A)=X^tAX$, $\lambda,\beta\in C$, entonces: $f(\lambda X+\beta Y,A) = \lambda f(X,A)+\beta f(Y,A)$

25. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$, hallar A^n. Comprobar la fórmula obtenida por inducción. Rp. $\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1} & \frac{n}{2}(n-1)a^{n-2}\\ 0 & a^n & na^{n-1}\\ 0 & 0 & a^n\end{bmatrix}$

26. Si A y B son matrices cuadradas de orden n y A posee inversa demostrar que: $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$.

27. Si $A=BC$, $A+B=I$, hallar $AC-C$. Rp. $-A$

28. Si $A=\begin{pmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica, hallar A^2.

Rp. $\begin{pmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

29. Demostrar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ es periódica y determinar su periodo. Rp. $p=2$

30. Si B es la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar $(b_{13})(b_{23})(b_{34})$

Rp. 1/9

31. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $C=(AB)^t+A$, hallar la suma $S=c_{21}+c_{32}+c_{33}$ Rp. 11

32. Sea $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar la suma de las componentes de la diagonal principal de la matriz A^{-1}. Rp. 1/4

En los ejercicios siguientes determinar, si existen, las inversas de las matrices dadas.

33. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

34. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

35. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

36. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 7/2 & -5/6 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

2.23 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Dada una matriz de cualquier rango, se pueden desarrollar algunas operaciones simples con las filas y columnas sin cambiar el rango de la matriz. El propósito fundamental es el desarrollo de matrices para simplificar algunos cálculos y también alcanzar resultados teóricos significativos para un mejor estudio de las matrices. Destacaremos las transformaciones siguientes:

2.23.1 TRANSFORMACION ELEMENTAL FILA O COLUMNA

Sea $A \in K^{m \times n}$ una matriz cuyas filas son $F_1, F_2, \ldots, F_m$ y y cuyas columnas son: $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Sellama *transformación elementa fila* a tres tipos de operaciones que denotaremos por: F_{ij} , $F_i(\lambda)$ y $F_j^i(\lambda)$ para significar:

(1) $F_{ij}A$: Intercambio de dos filas de A.

(2) $F_i(\lambda)A$: Multiplicación de la fila F_i de A por un escalar $\lambda \neq 0$

(3) $F_j^i(\lambda)A$: Multiplicación de la fila j de A por un escalar $\lambda \neq 0$ y sumando la fila F_i. Esta operación se representa por el vector fila: $\lambda F_j + F_i$.

Las transformaciones elementales columna son análogas a las transformaciones elementales fila y los tres tipos de operaciones se denota por:

(1) $C_{ij}A$: Intercambio de dos columnas de A

(2) $C_i(\lambda)A$: Multiplicación de una columna de A por un escalar $\lambda \neq 0$.

(3) $C_j^i(\lambda)A$: Multiplicación de la columna j de A por un escalar $\lambda \neq 0$ y sumando luego la columna C_i. Esta operación se representa por el vector columna $\lambda C_j + C_i$.

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ se tiene:

(1) Intercambio de la primera y segunda filas:

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Multiplicando por -2 la segunda fila:

$$F_2(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2(3) & -2(0) & -2(-4) & -2(-1) \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) Multiplicando por 2 la segunda fila y luego sumando la primera fila:

$$F_2^1(2) = \begin{bmatrix} 2(3)+1 & 2(0)+1 & 2(-4)+0 & 2(-1)+2 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.23.2 MATRIZ ESCALONADA

Una matriz $A \in K^{m \times n}$, cuya estructura es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & d & \cdots & x \\ 0 & 0 & 1 & e & f & \cdots & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \text{ filas no nulas} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} s \text{ filas nulas} \end{matrix}$$

se dice que es escalonada reducida si las condiciones siguientes se satisfacen:

1. El primer elemento no nulo de cada una de las r filas no nulas es la unidad.
2. Si existen s filas cuyos elementos son ceros, estas se encuentran en la parte inferior de la matriz.
3. En cada una de las r filas no nulas, el número de ceros que preceden a la unidad crece aritméticamente de fila a fila.
4. Todas las columnas que contienen el primer elemento diferente

de cero, de alguna fila, tienen ceros en todas las posiciones restantes.

Si una matriz cumple las propiedades 1, 2 y 3, se dice que está en forma *escalonada*.

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&4&1&2\\0&0&0&1&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices escalonadas.

$$\begin{bmatrix}1&5&1&2\\0&1&3&4\\0&0&1&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&-1&3&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

2.23.3 MATRICES EQUIVALENTES

Dos matrices A y B se denominan *equivalentes* si una de ellas se deduce de la otra mediante una sucesión finita de transformaciones elementales de línea (fila o columna).

El siguiente ejemplo nos muestra que toda matriz de orden m×n puede ser reducida mediante operaciones elementales fila (columna) a una matriz en forma escalonada por filas (columnas).

EJEMPLO 1. Reducir a la forma escalonada por filas la matriz

$$A=\begin{bmatrix}2&5&3\\1&2&2\\3&4&1\\2&3&2\end{bmatrix}.$$

Solución. A:

$$\xrightarrow{F_{12}}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&5&3\\3&4&1\\2&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1^2(-2)}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\3&4&1\\2&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1^3(-3)}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&-2&-5\\2&3&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1^4(-2)}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&-2&-5\\0&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2^4(1)}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&-2&-5\\0&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2^3(2)}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&-2\\0&0&-7\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3(-1/7)}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&-2\\0&0&1\\0&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3^4(3)}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=B$$

En la primera iteración F_{12} se intercambió la segunda fila por la primera con el objeto de que aparezca el 1 en la nueva primera fila y que servirá de pivot, para que en las sucesivas iteraciones aparezcan ceros debajo del 1. Así en la segunda iteración $F_1^2(-2)$ se multiplicó la primera fila por -2 y luego se sumó la segunda fila. En la cuarta iteración $F_1^4(-2)$ ya tenemos tres ceros debajo del 1 de la primera fila y aparece en la segunda fila (0,1,-1) el elemento 1 que servirá de nuevo pivot para transformar en ceros los elementos que están debajo de él. La quinta y sexta iteración muestran este proceso. En la sétima iteración se multiplicó por -1/7 la tercer fila para obtener (0,0,1). Finalmente, mediante esta fila pivot y la octava iteración se logra ceros en la última fila.
En este ejemplo se ha logrado una forma escalonada, sin embargo, la matriz equivalente B obtenida, de este modo, no es única, toda vez que es posible efectuar operaciones elementales columna y obtener otra forma escalonada.

Nota. Una matriz cuadrada $A \in K^n$ escalonada es una matriz triangular superior, pero no todas las matrices triangulares superiores son matrices escalonadas.
Anteriormente hemos visto que una matriz triangular era inversible si y sólo si todos los términos de la diagonal principal no son cero; esta característica es también válida para las matrices escalonadas cuadradas.
Veremos a continuación las ventajas que ofrece la reducción de una matriz cuadrada en otra que tenga forma escalonada.

2.23.4 RANGO DE UNA MATRIZ

El rango de una matriz es igual al número de filas no nulas que quedan en la última iteracion de las sucesivas transformaciones elementales que se hacen con la matriz.
Se deduce que para hallar el rango de una matriz es suficiente transformarla a su forma escalonada. Como dos matrices equivalentes tienen el mismo rango, el rango de dicha matriz será igual al rango de la matriz escalonada. Si designamos por r el número de filas no nulas de la matriz escalonada, entonces el rango de

de la matriz se denota:

$$\rho(A)=r$$

EJEMPLO 2. Hallar el rango de la matriz $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -4\\1 & 4 & -5\\3 & 1 & 7\\0 & 1 & -2\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}$

Solución. Realizando sucesivamente las transformaciones elementales tendremos:

$$A:\ \xrightarrow{F_{12}}\begin{bmatrix}1 & 4 & -5\\0 & 2 & -4\\3 & 1 & 7\\0 & 1 & -2\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1^3(-3)}\begin{bmatrix}1 & 4 & -5\\0 & 2 & -4\\0 & -11 & 22\\0 & 1 & -2\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1^5(-2)}\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 2 & -4\\0 & -11 & 22\\0 & 1 & -2\\0 & -5 & 10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2(1/2)}\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 1 & -2\\0 & -11 & 22\\0 & 1 & -2\\0 & -5 & 10\end{bmatrix}\xrightarrow[F_2^5(5)]{F_2^3(11)}\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2^4(-1)}\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

La última matriz escalonada B tiene 2 filas no nulas, luego:

$$\rho(B) = \rho(A) = 2$$

EJEMPLO 3. Hallar el rango de la matriz $A=\begin{bmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\75 & 94 & 53 & 132\\75 & 94 & 54 & 134\\25 & 32 & 20 & 48\end{bmatrix}$

Solución. Por el método de las transformaciones elementales se tiene:

$$A:\ \xrightarrow[F_2^3(-1)]{F_1^4(-1)}\begin{bmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\75 & 94 & 53 & 132\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[F_{34}]{F_1^2(-3)}\begin{bmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 1 & 3 & 5\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2^3(-1)]{F_2^1(-6)}\begin{bmatrix}25 & 25 & 5 & 25\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[F_3^4(-1)]{F_1(1/25)}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1/5 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

La última matriz escalonada tiene tres filas no nulas, por tanto

$$\rho(B) = \rho(A) = 3$$

2.23.5 MATRICES ELEMENTALES .. La matriz que resulta de aplicar una transformación elemental de línea (fila o columna) a la matriz identidad I_n recibe el nombre

de *matriz elemental de línea*. Los símbolos que se emplean para una transformación elemental de línea que origina una matriz identidad se muestran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4. Dada la matriz $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, las matrices elementales que podemos obtener, entre otras, son:

$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Intercambio de la primera y segunda filas.

$E_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ Multiplicación de la tercera fila de la matriz diagonal por a.

$E_3^2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Multiplicación de la tercera fila por a y sumando a la segunda fila.

Se establece la posibilidad de ejecutar, de manera indirecta, una operación elemental en las filas de una matriz de m×n si, primero, se ejecuta la misma operación en las filas de la matriz identidad I_n y, después, se premultiplica la matriz A (se multiplica a la izquierda de A) por la matriz elemental resultante. Una ilustración del enunciado anterior es el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si la primera fila de A se suma dos veces a la tercera fila, se obtiene la matriz: $F_1^3(2)A = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Al efectuar la misma operación en las correspondientes filas de la matriz identidad I_3, la matriz elemental resultante es:

$$E_1^3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $E_1^3(2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = B$

El resultado anterior nos sugiere la siguiente definición:

DEFINICION 2.2 Si existe una secuencia de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_m$, tales que:

$$E_m.E_{m-1}. \ldots .E_2.E_1.A = B$$

se dice entonces que A es *equivalente por filas* a B, y se escribe:

$$A \overset{f}{=} B$$

EJEMPLO 6. Hallar una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Solución. Las operaciones elementales con filas que deben efectuarse son:

(1) Intercambiar la primera y segunda fila

$$F_{12} \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(2) Restar la primera fila de la tercera:

$$F_1^3(-1) \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

(3) Multiplicar la segunda fila por -2 y sumar la tercera fila:

$$F_2^3(-2) \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -4\end{pmatrix} = B$$

que es una matriz escalonada equivalente por filas a A.
Las matrices elementales, obtenidas de I_3, para las operaciones con filas son, respectivamente:

$$E_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad E_1^3(-1) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad E_2^3(-2) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora bien, las operaciones para encontrar B por medio de estas matrices elementales son:

$$E_{12}.A = F_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$E_1^3(-1).F_{12} = F_1^3(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2^3(-2).F_1^3(-1) = F_2^3(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = B$$

$$\therefore \quad E_2^3(-2).E_1^3(-1).E_{12}.A = B$$

Como resulta laborioso escribir el producto de matrices correspondientes a cada operación de fila, es conveniente utilizar una notación abrviada empleando una flecha, sobre el cual se indica la matriz elemental adecuada, en base a la cual, las operaciones se representarian como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1^3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^3(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2.23.5 INVERSA DE UNA MATRIZ POR EL METODO DE LAS MATRICES ELEMENTALES (Método de Gauss-Jordan)

El método de Gauss-Jordan consiste en lo siguiente:
Para la matriz dada A de orden n, se construye una matriz rectangular $\Gamma A=(A|I)$ de orden n×2n, añadiendo a la derecha de A una matriz unidad. Luego, haciendo uso de las transformaciones elementales sobre las filas, se reduce la matriz ΓA a la forma $(I|B)$, lo que es siempre posible, si A es inversible. En este caso $B=A^{-1}$. No es preciso conocer de antemano si A es inversible. Se puede deducir fácilmente si A es inversible durante las sucesivas transformaciones elementales para hallar la matriz $(I|B)$. Si uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz escalonada E en $(E|B)$ es cero, entonces A no es inversible.

EJEMPLO 7. Determinar si $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ es inversible. Si así lo fuera, calcular su inversa.

Solución. Primero efectuamos las operaciones con filas para reducir A a una matriz escalonada E. Comenzamos formando la matriz $\Gamma A = (A|I)$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1^3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dado que A ha sido reducida a la matriz escalonada $E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

que no tiene cero en la diagonal principal, la matriz A es inversible Continuando con las operaciones elementales con filas, necesarias para reducir la matriz A a la identidad, se tiene:

$$\xrightarrow{F_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^1(1/2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2(1/2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^2(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (A|B)$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 8. Hallar A^{-1} para la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Solución. Formamos la matriz $A=(A|I)$ y empleando el método de Gauss-Jordan tendremos:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1(1/3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1^3(-2)]{F_1^2(-4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2(3/7)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2^3(1/3)]{F_2^1(-2/3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3(7/24)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3^2(-2/7)]{F_3^1(-1/7)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right) = B$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 9. Determinar, si existe, la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución. Sea la matriz: $\Gamma A=(A|I)$

$$\rightarrow\ (A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1^3(1)]{F_1^2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^3(1)} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{E}\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right.\right)$$

Como la matriz escalonada E tiene un cero en su diagonal principal, la matriz A no es inversible.

EJEMPLO 10. Se sabe que la matriz $X=[x_{ij}]$ satisface la ecuación $AX=B$, en donde: $A = 2B-I = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

Mostrando en primer lugar que A es inversible, determinar los elementos x_{24} y x_{43} de la matriz X.

Solución. Para determinar si A es inversible formamos la matriz $\Gamma A=(A|I)$ y mediante las operaciones elementales tendremos:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 22 & -6 & -26 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & 5 & 20 & -13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{13}}{\overset{F_3(-1)}{\longrightarrow}}\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -17 & 5 & 20 & -13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & -6 & -26 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4^3(-5)}{\overset{F_4^2(4)}{\longrightarrow}}\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1^2(1)} \\ \xrightarrow{F_1^3(-2)} \\ \xrightarrow{F_1^4(-4)} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2^4(1)}{\overset{F_2^3(1)}{\longrightarrow}}\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_3^1(2)} \\ \xrightarrow{F_3^2(2)} \\ \xrightarrow{F_3^4(-1)} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \underbrace{0 \;\; 0}_{} & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$E$$

La matriz escalonada E no tiene cero en la diagonal principal, luego, la matriz A es inversible.

$$\therefore \quad \underset{F_4(-1)}{\overset{F_4^1(1)}{\longrightarrow}}\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) = A^{-1}$$

Multiplicando por A^{-1} ambos miembros de la ecuación dada se tiene: $A^{-1}AX = A^{-1}B \leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$\text{Si } A=2B-I \rightarrow B = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 23 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 6 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

En consecuencia: $x_{24} = a_{2j}^{-1}b_{i4} = (2,3,1,2).\frac{1}{2}(17,-13,-1,4) = 1$

$$x_{43} = a_{4j}^{-1}.b_{i3} = (1,0,-2,-6).\frac{1}{2}(-26,20,3,-5) = -1$$

EJEMPLO 11. Resolver la ecuación matricial AXB=C, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Solución. Multiplicando por A^{-1} (izquierda de X) ambos miembros de la ecuación matricial se tiene:

$$A^{-1}AXB = A^{-1}C \rightarrow XB = A^{-1}C \qquad (1)$$

Multiplicando por B^{-1} (derecha de X) ambos extremos de la ecuación (1) obtenemos: $XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

Para hallar las inversas de A y B por el método de Gauss-Jordan, construimos las matrices rectangulares: $\Gamma A=(A|I)$ y $\Gamma B=(B|I)$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(1/5)]{F_1(1/3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & -2/5 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1^2(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/15 & -1/3 & 1/5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2(-15)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2^1(1/3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(1/7)]{F_1(1/5)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6/5 & 1/5 & 0 \\ 1 & 8/7 & 0 & 1/7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -2/35 & -1/5 & 1/7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2(-35/2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -5/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2^1(-6/5)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 7/2 & -5/2 \end{array}\right) \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Entonces: $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

de donde: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS

Reducir cada una de las siguientes matrices a una matriz escalonada mediante una sucesión finita de operaciones elementales con filas. (Las soluciones que se dan no son únicas)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Rp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ Rp. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 10 & 0 \\ 6 & -6 & 12 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ Rp. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Mediante una sucesión finita de operaciones elementales con filas, demostrar que:

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & abc \\ 0 & 1 & 0 & -(ab+bc+ca) \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \end{pmatrix}$$

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, probar que $A \overset{f}{=} B$

En los ejercicios siguientes, hallar el rango de la matriz dada empleando el método de las transformaciones elementales

6. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ R. 2

7. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ R. 3

8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ R. 3

9. $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$ R. 2

10. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$ R. 3

11. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$ R. 2

Resolver las ecuaciones matriciales:

12. $AX = B$, si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

13. $XA = B$, si $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

14. AX = B , si $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix}6&4&5\\2&1&2\\3&3&3\end{pmatrix}$

15. XA = B , si $A=\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

16. La matriz $X=[x_{ij}]$ satisface la ecuación XA=B, en donde:

$A=7B+I=\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$. Mostrar que A es inversible y hallar la suma: $S=x_{23}+x_{31}$. Rp. S=1

Hallar las inversas de las siguientes matrices, empleando el método de las transformaciones elementales.

17. $A=\begin{pmatrix}1&a&x&-z\\0&1&b&y\\0&0&-1&c\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&x-ab&abc+ay-cx+2\\0&1&b&-bc-y\\0&0&-1&c\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\frac{1}{4}A$

19. $A=\begin{pmatrix}3&3&-4&-3\\0&6&1&1\\5&4&2&1\\2&3&3&2\end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&5&12&19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&3&1&4\\2&7&6&-1\\1&2&2&-1\end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&3&-7&20\\-7&-3&5&-10\\9&3&-3&3\\3&3&-3&6\end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&\cdots&0\\0&1&1&0&\cdots&0\\0&0&1&1&&0\\0&0&0&1&&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&\cdots&(-1)^{n-1}\\0&1&-1&1&\cdots&(-1)^{n-2}\\0&0&1&-1&\cdots&(-1)^{n-3}\\\vdots&\vdots&&&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix}0&1&2&2\\1&1&2&3\\2&2&2&3\\2&3&3&3\end{pmatrix}$ Rp. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&3&-3&2\\3&-4&4&-2\\-3&4&-5&3\\2&-2&3&-2\end{pmatrix}$

2.24 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Recordando que la resolución de una ecuación implica la búsqueda de ecuaciones equivalentes más simples en las que resulta fácil determinar la raiz ó raíces, la aplicación de este criterio a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales sugiere que, el método para hallar el conjunto solución de un sistema lineal consiste básicamente en reemplazar el sistema dado por otro equivalente en el que se pueda calcular fácilmente las raíces. En tal sentido las transformaciones elementales aplicadas a las matrices simplifican el desarrollo de estas y como tal, nos ofrecen la posibilidad de una ventajosa aplicación para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

En un sistema de la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (1)$$

Con las constantes reales de las ecuaciones (1) se puede establecer el siguiente arreglo de m×n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

al que llamaremos *matriz de coeficientes* del sistema (1).
A los vectores:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

llamaremos, respectivamente, *vector columna de las incógnitas* o *vector solución* y *vector columna de los términos independientes.*

Por lo que el sistema (1) puede representarse del siguiente modo

$$AX = B$$

Al adjuntar el vector columna B a la matriz A, se determina una matriz de $m\times(n+1)$, que designaremos por A', a la cual llamaremos *matriz aumentada o ampliada* del sistema (1) y se escribirá del siguiente modo:

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Por ejemplo, la matriz aumentada del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \text{, es: } A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Teniendo en consideración que las filas de una matriz aumentada corresponden a las ecuaciones del sistema asociado, el método para resolver el sistema, empleando matrices, se sustenta en la idea básica de reducir la matriz aumentada a la forma que sea suficientemente sencilla (forma escalonada reducida) como para poder alcanzar la solución del sistema por simple inspección o, en su defecto, luego de posteriores etapas que simplifiquen el problema.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento a seguir en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1. Suponiendo en cada uno de los casos siguientes que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales de la forma (1) se ha llevado, mediante operaciones en las filas, a la forma escalonada reducida que se muestra a continuación, hallar la solución de los sistemas:

$$\text{a) } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \qquad \text{b) } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Solución. a) El sistema de ecuaciones correspondientes es:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 &= 7 \\ x_2 \qquad &= 3 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Por simple inspección: $x_2=3$, $x_3=-2$, y en $x_1+x_3=7$, resulta $x_1=9$

$$\therefore\ S=\{x_1,x_2,x_3\}=\{9,3,-2\},\ \text{o bien: } X=(9,3,-2)$$

b) El sistema de ecuaciones correspondientes es:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 2x_4 &= 3 \\ x_2 \qquad - x_4 &= -4 \\ x_3 + 5x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Cuando es el caso que cada una de las incógnitas x_1, x_2 y x_3 inician una ecuación, se les llama *variables principales.* Dejando las variables principales, en términos de x_4, se obtiene:

$$x_1=3-2x_4\ ,\ x_2=-4+x_4\ ,\ x_3=2-5x_4$$

Asignando a x_4 un valor arbitrario t, se tiene un número infinito de soluciones. El conjunto solución queda definido por las fórmulas:

$$x_1=3-2t\ ,\ x_2=-4+t\ ,\ x_3=2-5t\ ,\ x_4=t$$

o bien: $X=(3-2t,-4+t,2-5t,t)^t$

EJEMPLO 2. Resolver por transformaciones elementales el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1-5x_2+2x_3 &= -2 \\ 4x_1+6x_2-x_3 &= 23 \\ 2x_1+7x_2+4x_3 &= 24 \end{aligned}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -1 & 23 \\ 2 & 7 & 4 & 24 \end{array}\right)$

Para transformar una matriz aumentada a la forma escalonada reducida se procede del siguiente modo:

Paso 1. Localizar en el extremo izquierdo la columna que no consta exclusivamente de ceros. (Señalado con asterisco)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overset{*}{2} & -5 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -1 & 23 \\ 2 & 7 & 4 & 24 \end{array}\right)$$

Paso 2. Intercambiar, si es necesario, la primera fila con otra fila, de tal manera que el elemento que está al comien-

za de la columna señalada con asterisco sea diferente de cero. (En este caso como $2 \neq 0$ no es necesario intercambiar filas).

Paso 3. Si el primer elemento de la columna señalada con asterisco es a, entonces, multiplicar la primera fila por 1/a, de modo que el primer elemento sea 1, esto es:

$$\xrightarrow{F_1(1/2)} \begin{pmatrix} \overset{*}{1} & -5/2 & 1 & \vdots & -1 \\ 4 & 6 & -1 & \vdots & 23 \\ 2 & 7 & 4 & \vdots & 24 \end{pmatrix}$$

Paso 4. Sumar múltiplos adecuados de la primera fila a las filas que le siguen, de tal forma que en la columna señalada con asterisco, todos los elementos a excepción del primero sean cero.

$$\begin{matrix} \xrightarrow{F_1^2(-4)} \\ \xrightarrow{F_1^3(-2)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 16 & -5 & \vdots & 27 \\ 0 & 12 & 2 & \vdots & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3^2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 4 & -7 & \vdots & 1 \\ 0 & 12 & 2 & \vdots & 26 \end{pmatrix}$$

Paso 5. Destacar la primera fila de la matriz con una línea de puntos y reiterar el proceso a la submatriz resultante, desde el paso 1. Proseguir del mismo modo hasta conseguir que la matriz completa se presente en forma escalonada. Esto es:

$$\begin{matrix} \xrightarrow{F_2(1/4)} \\ \xrightarrow{F_3(1/2)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & \vdots & -1 \\ \hdashline 0 & 1 & -7/4 & \vdots & 1/4 \\ 0 & 6 & 1 & \vdots & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2^3(-6)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & \vdots & -1 \\ \hdashline 0 & 1 & -7/4 & \vdots & 1/4 \\ 0 & 0 & 23/2 & \vdots & 23/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3(2/23)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & \vdots & -1 \\ \hdashline 0 & 1 & -7/4 & \vdots & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3^2(7/4)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & \vdots & -1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz completa a tomado la forma escalonada.

Paso 6. Empezamos por la última fila, y avanzando hacia arriba, sumar múltiplos adecuados de esta fila a las filas que están encima de ella, hasta conseguir que la matriz completa se transforme a la forma escalonada reducida.

$$\xrightarrow{F_3^1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2^1(5/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Como la última matriz tiene forma escalonada reducida, la solución del sistema es:

$$x_1=3\ ,\ x_2=2\ ,\ x_3=1 \ \rightarrow\ X=(3,2,1)^t$$

Nota. El procedimiento esquemático empleado para resolver un sistema de ecuaciones lineales, se conoce con el nombre de *eliminación de Gauss-Jordan*.

EJEMPLO 3. Resolver mediante la eliminación de Gauss, el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es: $\left(\begin{array}{cccc|c} \overset{*}{1} & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right)$

Siguiendo los pasos descritos en el ejemplo 2 para transformar la matriz aumentada a la forma escalonada, se tiene:

$$\xrightarrow[F_1^3(-2)]{F_1^2(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & \underset{*}{1} & 4 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^3(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3^2(-2)]{F_3^1(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^1(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema de ecuaciones correspondiente a esta última matriz escalonada es:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 11x_3 \qquad &= 10 \\ x_2 + 4x_3 \qquad &= -2 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones para las variables principales, se tiene:

$$x_1=10+11x_3\ ,\ x_2=-2-4x_3,\ x_4=0$$

Finalmente asignando un valor arbitrario t para la variable no principal x_3, esto es, $x_3=t$, se tiene:

$$x_1=10+11t\ ,\ x_2=-2-4t\ ,\ x_3=t\ ,\ x_4=0$$

Decimos entonces que el sistema tiene un número infinito de solu

ciones. Por lo tanto, la notación vectorial de la solución del sistema es:

$$X=(10+11t,-2-4t,t,0)^t$$

EJEMPLO 4. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & 5 \end{array}\right]$

Reduciendo la matriz a su forma escalonada tenemos:

$$\xrightarrow[F_1^3(-1)]{F_1^2(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & -10 & -12 & -12 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2^3(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

La última fila corresponde a la ecuación:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6 \leftrightarrow 0=6$$

Lo que es absurdo, por tanto, el sistema es incompatible y carece de solución.

Observación. Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones se dice que el sistema es *inconsistente*.

Si por lo menos hay una solución, entonces se dice que es *consistente*

EJEMPLO 5. Suponer que la dieta mínima vital es 72 unidades de proteinas, 104 unidades de carbohidratos y 88 unidades de minerales. Una nutricionista dispone empaquetados tres tipos de alimentos A, B y C, que por paquete contienen:

	Proteinas	Carbohidratos	Minerales
A	1	2	4
B	4	4	2
C	2	4	3

Es decir, un paquete del alimento A contiene 1 unidad de proteinas, 2 de carbohidratos y 4 de minerales. Se debe entregar a ca-

da comensal una dieta mínima en un número entero de paquetes. Cuántos paquetes de cada tipo de alimentos constituye la dieta mínima?

Solución. Sean: x, y, z el número de paquetes de los tres tipos de alimentos A, B y C respectivamente. Entonces, x paquetes del alimento A, 4y paquetes del alimento B y 2z paquetes del alimento C constituyen 72 unidades de proteinas, que se ri- por la ecuación:

$$x + 4y + 2z = 72$$

Análogamente, según la tabla, planteamos el sistema de ecuaciones para carbohidratos y minerales:

$$2x + 4y + 4z = 104$$
$$4x + 2y + 3z = 88$$

La matriz aumentada del sistema es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 72 \\ 2 & 4 & 4 & 108 \\ 4 & 2 & 3 & 88 \end{array}\right)$

Efectuando las transformaciones elementales por filas se tiene:

$$\xrightarrow[F_1^3(-4)]{F_1^2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & -4 & 0 & -40 \\ 0 & -14 & -5 & -200 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2^3(-7/2)]{F_2^1(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 32 \\ 0 & -4 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & -5 & -60 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3(-1/5)]{F_2(-1/4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^1(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

En consecuencia, la dieta mínima está constituida por 8 paquetes del tipo A, 10 paquetes del tipo B y 12 paquetes del tipo C.

EJEMPLO 6. Una fábrica posee 5 máquinas que se utilizan en la producción de cuatro artículos diferentes A, B, C y D. El número de horas de cada máquina es usada en la producción de una unidad de cada uno de los cuatro productos es dada por la siguiente tabla:

Hallar el número de unidades que se deben producir de cada uno de los productos en una semana de 5 dias, sabiendo que cada máquina se usa 8 horas diarias.

Máquina \ Producto	A	B	C	D
1ra	7	2	4	3
2da	4	4	4	5
3ra	10	0	4	7
4ta	9	4	2	11
5ta	10	5	1	13

Solución. Designemos por x_1, x_2, x_3 y x_4 el número de unidades de cada artículo A, B, C y D respectivamente, que se producen durante una semana de 5 dias.
Según la tabla, la 1ra máquina dedica 7 horas en la producción de una unidad del producto A, 2 horas en la producción de una unidad del artículo B, etc. Como en una semana cada máquina trabaja $5\times8=40$ horas, entonces la producción semanal de la primera máquina se rige por la ecuación:

$$7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 40$$

Dado que las máquinas deben trabajar simultáneamente, entonces la producción semanal estará dada por la solución simultánea de las 5 ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 40 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 40 \\ 10x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= 40 \\ 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 40 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 + 13x_4 &= 40 \end{aligned}$$

Sea la matriz aumentada del sistema: $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & 4 & 3 & 40 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 40 \\ 10 & 0 & 4 & 7 & 40 \\ 9 & 4 & 2 & 11 & 40 \\ 10 & 5 & 1 & 13 & 40 \end{array}\right)$

Después de aplicar las transformaciones sucesivas: $F_3^5(-1)$, $F_4^3(-1)$ $F_1^4(-1)$, F_{13} y $F_2^3(-2)$, la matriz aumentada se reduce a:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 40 \\ -1 & -6 & -4 & -7 & -40 \\ 2 & 2 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^4(-2)]{F_1^2(-4),\ F_1^3(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 20 & -4 & 21 & 40 \\ 0 & -10 & -2 & -11 & -40 \\ 0 & 10 & -6 & 16 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{25}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-4&2&-4&0\\0&5&-3&6&0\\0&-10&-2&-11&-40\\0&10&-6&16&0\\0&20&-4&21&40\end{array}\right]\xrightarrow[F_2^1(1)]{F_2^3(2),\ F_2^4(-2),\ F_2^5(-4)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&0\\0&5&-3&6&0\\0&0&-8&1&-40\\0&0&0&4&0\\0&0&8&-3&40\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4(1/4)]{F_4^5(3/4),\ F_4^3(-1/4)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&0\\0&5&-3&6&0\\0&0&-8&0&-40\\0&0&0&1&0\\0&0&8&0&40\end{array}\right]\xrightarrow[F_5(1/8)]{F_4^2(-6),\ F_4^1(-2),\ F_3(-1/8)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&0&0\\0&5&-3&0&0\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3^1(1)]{F_3^5(-1),\ F_3^2(3)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\0&5&0&0&15\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_2^1(-1)]{F_2(1/5)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

de donde obtenemos: $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=0$
En consecuencia, la producción óptima semanal de la fábrica necesita que se fabrique 2 unidades del producto A, 3 del produto B, 5 del producto C y ninguna del producto D.

2.25 RANGO DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sea dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas del tipo general:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \qquad (1)$$

o bien, en la forma matricial:

$$AX = B \qquad (2)$$

donde $A=[a_{ij}]$ de orden m×n, $X=[x_i]$ de orden n×1 y $B=[b_i]$ de orden m×1. Se denomina solución del sistema (1) todo vector columna de n componentes de X que convierte la ecuación matricial (2) en una

igualdad. Anteriormente hemos visto que un sistema se denomina *consistente o compatible*, si tiene por lo menos una solución, de lo contrario se denomina *inconsistente o incompatible.*

Para que el sistema (1) sea consistente es necesario y suficiente que se verifique:

$$\rho(A) = \rho(A') \qquad (3)$$

donde $A'=(A|B)$ es la matriz aumentada o ampliada del sistema (1)

Suponiendo que $\rho(A)=\rho(A')=r$, es decir, el sistema es consistente, entonces puede ocurrir:

a) Que el sistema (1) tenga una solución única. Esto sucede cuando el número de incógnitas n del sistema es igual al rango de la matriz aumentada. Esto es, si el sistema tiene n incógnitas, tendrá solución única si y sólo si:

$$\rho(A) = \rho(A') = r = n$$

b) Que el sistema (1) tenga más de una solución. En este caso el número de incógnitas del sistema es mayor que el rango de la matriz aumentada. Es decir, el sistema (1) tendrá más de una solución, si y sólo si:

$$\rho(A) = \rho(A') = r < n$$

Dado que $r<n$, entonces las $n-r$ incógnitas toman valores arbitrarios, y a las que se les denomina *valores libres o parámetros*.

Si ocurre que $\rho(A) \neq \rho(A')$, entonces el sistema (1) es inconsistente.

EJEMPLO 7. Investigar la consistencia y hallar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solución. Reduciendo la matriz aumentada $(A|B)$ a su forma escalonada se tiene:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-3)]{F_1^2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2^3(-5)]{F_2^1(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3(1/18)} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} & \begin{matrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right] = E'$$

Observamos que las matrices escalonadas E y E' tienen tres filas no nulas (r=3), entonces $\rho(E)=\rho(E')=3$, y como $A \overset{f}{\sim} E$, $A' \overset{f}{\sim} E'$ se tiene que: $\rho(A)=\rho(A')=3$, además el número de incógnitas del sistema es n=3; por tanto, el sistema dado tiene solución única.
Para determinar esta solución transformamos la última matriz a su forma escalonada reducida:

$$\xrightarrow[F_3^2(5)]{F_3^1(7)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$, de donde: $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$

Por tanto, el vector columna solución es: $X=(3,2,1)^t$

EJEMPLO 8. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ x - 3y - 2z &= 3 \\ 2x - y + z &= -2 \end{aligned}$$

Solución. Investigaremos la consistencia del sistema reduciendo la matriz aumentada (A|B) a su forma escalonada.

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1^3(-2)]{F_1^2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3(-1/5)]{F_2(-1/5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4/5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2^3(-1)} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{E} & \begin{matrix} -1 \\ -4/5 \\ 4/5 \end{matrix} \end{array}\right] = E'$$

Como $\rho(E)=2$ y $\rho(E')=3$, entonces: $\rho(A) \neq \rho(A|B)$.
En consecuencia, el sistema es inconsistente.

EJEMPLO 9. Resolver:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Solución. Reduciendo la matriz aumentada (A|B) a su forma escalonada se tiene:

$$(A|B)=\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\6&-3&2&4&5&3\\6&-3&4&8&3&9\\4&-2&1&1&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[F_1^4(-2)]{F_1^2(-3),\ F_1^3(-3)}\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&-1&-2&-4&-3\\0&0&1&2&-6&3\\0&0&-1&-3&-4&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4(-1)]{F_2(-1)}\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&1&2&4&3\\0&0&1&2&-6&3\\0&0&1&3&4&3\end{array}\right]\xrightarrow[F_2^4(-1)]{F_2^1(-1),\ F_2^3(-1)}\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&0&0&-1&-1\\0&0&1&2&4&3\\0&0&0&0&-10&0\\0&0&0&1&0&0\end{array}\right]$$

(la parte izquierda de la última matriz se designa por E)

Como $\rho(E)=\rho(A|B)$ $\rightarrow$ $\rho(A)=\rho(A|B)=4$, por tanto el sistema es consistente. Además $\rho(A)<n$, entonces hay más de una solución y el número de variables libres o parámetros es: $n-r=5-4=1$

Reduciendo la última matriz a su forma escalonada reducida tenemos:

$$\xrightarrow[F_4^2(-2)]{F_3(-1/10)}\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&0&0&-1&-1\\0&0&1&0&4&3\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_3^1(1)]{F_3^2(-4)}\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&3\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\end{array}\right]$$

Si designamos a $x_1=s$ como la variable libre, entonces

$$2s-x_2=-1\ ,\ x_3=3\ ,\ x_4=0\ ,\ x_5=0$$

Luego, el vector columna solución es: $X=(s,2s-1,3,0,0)^t$

EJEMPLO 10. Si el sistema dado:

$$\begin{aligned}2x+3y-z+w&=b_1\\x+5y-z-2w&=b_2\\-x+2y+2z-3w&=b_3\\3x+y-3z+4w&=b_4\end{aligned}$$

es consistente, hallar $b=(b_1,b_2,b_3,b_4)^t=rU+sV$, donde r y s son parámetros libres y U y V son matrices columnas fijas. Si elegimos $b=(1,-1,-2,3)^t$ sigue siendo el sistema consistente?

Solución. Transformando la matriz aumentada (A|B) a su forma escalonada se tiene:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & b_1 \\ 1 & 5 & -1 & -2 & b_2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & b_3 \\ 3 & 1 & -3 & 4 & b_4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3(-1)]{F_{13}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & -b_3 \\ 1 & 5 & -1 & -2 & b_2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & b_1 \\ 3 & 1 & -3 & 4 & b_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1^2(-1)\\F_1^3(-2)\\F_1^4(-3)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & -b_3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 & b_2+b_3 \\ 0 & 7 & 3 & -5 & b_1+2b_3 \\ 0 & 7 & 3 & -5 & b_4+3b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2^3(-1)\\F_2^4(-1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & -b_3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 & b_2+b_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b_1-b_2+b_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2b_3-b_2+b_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3^4(-1)} \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{E}\right|\left.\begin{array}{c} -b_3 \\ b_2+b_3 \\ b_1-b_2+b_3 \\ -b_1+b_3+b_4 \end{array}\right) = E'$$

Vemos que $\rho(A)=\rho(E)=3$ y $\rho(E')=4$, luego, para que el sistema sea consistente se debe tener que $\rho(A)=\rho(A|B)$, est es:

$$-b_1+b_3+b_4=0 \rightarrow b_1=b_3+b_4$$

Por tanto: $b = (b_3+b_4, b_2, b_3, b_4)^t$

$$= b_2(0,1,0,0)^t + b_3(1,0,1,0)^t + b_4(1,0,0,1)^t$$

donde b_2, b_3 y b_4 son los parámetros libres.

Si hacemos $b_2=0 \rightarrow r=b_3$ y $s=b_4$ ó $r=b_4$ y $s=b_3$

Luego, $b=rU+sV = r(1,0,1,0)^t + s(1,0,0,1)^t$ ó

$$= s(1,0,1,0)^t + r(1,0,0,1)^t$$

Si $b_3=0 \rightarrow r=b_2$ y $s=b_4$ ó $r=b_4$ y $s=b_2$

Entonces: $b = r(0,1,0,0)^t + s(1,0,0,1)^t = s(0,1,0,0)^t+r(1,0,0,1)^t$

Si $b_4=0 \rightarrow r=b_2$ y $s=b_3$ ó $s=b_3$ y $r=b_2$

$$\rightarrow b = r(0,1,0,0)^t + s(1,0,1,0)^t = s(0,1,0,0)^t + r(1,0,1,0)^t$$

Cualquiera de las seis posibilidades es correcta.

Si elegimos $b=(1,-1,-2,3)^t$, en donde: $b_1=1$, $b_3=-2$, $b_4=3$, vemos que satisface la relación: $b_1=b_3+b_4$.

Por tanto, el sistema sigue siendo consistente.

EJEMPLO 11. Investigar la consistencia y hallar la solución general del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Solución. Reduciendo la matriz aumentada $(A|B)$ a su forma escalonada se tiene:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^4(-2)]{F_1^2(-3),\ F_1^3(-3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4(-1)]{F_3^2(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^1(-1)]{F_{24}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2^3(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3(-1)]{F_3^2(3)} \left(\underbrace{\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{E} \middle| \begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) = E'$$

Notamos que $\rho(E)=\rho(E')=3 \rightarrow \rho(A)=\rho(A|B)=3$, luego, el sistema es consistente. Además, como $n>r$, hay más de una solución y el número de variables libres es: $n-r=5-3=2$.

De la última matriz obtenemos: $2x_1-x_2-x_5=-1$, $x_3+4x_5=3$, $x_4=0$

Si designamos por $x_1=t$, $x_2=s$ a las variables libres, entonces:

$$2t-s-x_5=-1 \rightarrow x_5=1+2t-s$$
$$x_3=3-4(1+2t-s)=-1-8t+4s$$

Por tanto, la solución general del sistema está dada por el vector columna:

$$X = (t,s,-1-8t+4s,0,1+2t-s)^t$$

EJEMPLO 12. Dado el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + (4a+2)x_3 &= 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 5x_3 &= 2 \\ 3x_1 + ax_2 + 7x_3 &= b \end{aligned}$$

Hallar los valores de a y b, para que el sistema tenga solución

única.

Solución. Reduciendo la matriz aumentada (A|B) a su forma escalonada tenemos:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4a+2 & 1 \\ 2 & a & 5 & 2 \\ 3 & a & 7 & b \end{array}\right] \xrightarrow[F_1^4(-3)]{F_1^2(-1)\; F_1^3(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & b-3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2^4(-a)]{F_2^3(-a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & b-3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3^4(-1)} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1-4a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{E} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ b-3 \end{matrix} \end{array}\right] = E'$$

El sistema tendrá solución única si y sólo si $\rho(E)=\rho(E')=n=3$
Luego, para que $\rho(E)=3$ se debe tener que: $1-4a^2\neq 0 \leftrightarrow a \neq \pm 1/2$
y para que $\rho(E')=3$ es necesario que $b-3=0 \leftrightarrow b=3$.
En consecuencia, el sistema tiene solución única:

$$\leftrightarrow b=3 \text{ y } a\in R-\{-1/2, 1/2\}$$

EJEMPLO 13. Una Agencia de Turismo está organizando una excursión y ha cursado una invitación a los alumnos del curso de MC1 (Complementos de Matemáticas 1), mediante las especificaciones siguientes:

i) Se tienen cupos para alumnos matriculados en MC1 por primera vez (Grupo A), segunda vez (Grupo B), tercera vez (Grupo C) y cachimbos invitados (Grupo D).

ii) Si participan de la excursión los cuatro grupos podrían asistir 70 personas.

iii) Si dejan de asistir los alumnos del grupo A, se podría duplicar el cupo para los del grupo B manteniendo el resto de los cupos y podrían participar 90 personas.

iv) Si dejan de asistir los alumnos del grupo C, se podría duplicar el cupo para los del grupo A, triplicar el cupo para los grupo B, manteniendo el cupo del grupo D y en este caso podrían participar 90 personas. Se pide:

a) Analizar la compatibilidad del sistema.

b) Calcular el mayor número de cachimbos que se pueden invitar.

Solución. Según las especificaciones de la invitación, planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 70 \\ 0 + 2B + C + D &= 90 \\ 2A + 3B + 0 + D &= 90 \end{aligned}$$

a) Para analizar la compatibilidad del sistema debemos reducir la matriz aumentada (A|B) a su forma escalonada, esto es:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1^3(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -50 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3^1(-1)]{F_3^2(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 190 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -50 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{23}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 120 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 190 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3(1/5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 120 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 38 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^1(-3)]{F_3^2(2)} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{matrix}}_{E} & \begin{matrix} 6 \\ 26 \\ 38 \end{matrix} \end{array}\right) = E'$$

Vemos que $\rho(E)=\rho(E')=3 \rightarrow \rho(A)=\rho(A|B)=3$. Por tanto, el sistema es compatible o consistente, además, como el número de incógnitas ($n=4$) es mayor que el rango entonces existe más de una solución y el número de variables libres es $n-r=4-3=1$.

De la última matriz:

$$\begin{aligned} A + \tfrac{1}{5}D &= 6 \rightarrow D=5(6-A) \\ B + \tfrac{1}{5}D &= 26 \rightarrow D=5(26-B) \\ C + \tfrac{3}{5}D &= 38 \rightarrow D=\tfrac{5}{3}(38-C) \end{aligned}$$

La designación de D como la variable libre prmite ver claramente que: $A \leq 6$, $B \leq 26$, $C \leq 38$

b) El mayor número de cachimbos que se puede invitar ocurre cuando el grupo B deja de asistir, esto es, si $B=0$, entonces:

$$D = 5(26-0) = 130$$

2.26 SISTEMAS HOMOGENEOS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es *homogéneo* si todos los términos constantes son cero, es decir, si el sistema tiene la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales es consistente, dado que: $x_1=0$, $x_2=0$, ..., $x_n=0$ es siempre una solución.
Esta solución se conoce como *solución trivial*; si existe otras soluciones, a estas se llaman *soluciones no triviales*.
A simple vista es posible asegurar que un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales, si es el caso que el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones.

EJEMPLO 14. Resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 17x_3 + 5x_4 = 0 \end{array}$$

Solución. Transformando la matriz escalonada (A|0) a la forma escalonada se tiene:

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -9 & 17 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-4)]{F_1^2(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2^3(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^1(2)} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{E} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array}\right) = E'$$

Dado que $\rho(E)=\rho(E')=2$ y el número de incógnitas ($n=4$) es mayor que el rango, entonces existe infinitas soluciones. El número de variables libres es $n-r=4-2=2$
El sistema de ecuaciones correspondientes a la matriz E' es:

$$x_1 - 7x_3 - x_4 = 0$$
$$x_2 - 5x_3 - x_4 = 0$$

Si designamos a las variables libres por: $x_3=t_1$, $x_4=t_2$, el conjunto solución del sistema es:

$$x_1=7t_1+t_2,\ x_2=5t_1+t_2,\ x_3=t_1,\ x_4=t_2$$

y la notación vectorial, solución general del sistema, está representado por el vector columna:

$$X = (7t_1+t_2, 5t_1+t_2, t_1, t_2)^t$$
$$= t_1(7,5,1,0)^t + t_2(1,1,0,1)^t$$

Observación. Sea $S \subset K^n$ un conjunto de todas las soluciones de un sistema homogéneo. Cualquier base en el conjunto S consiste de n-r vectores $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$. Un sistema de vectores columna $E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$, correspondiente al conjunto citado en la base canónica, se denomina *sistema fundamental de soluciones*. La solución general del sistema homogéneo tiene por expresión:

$$X = t_1E_1 + t_2E_2 + \ldots + t_{n-r}E_{n-r}$$

donde $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$ son constantes arbitrarios o parámetros. Así, de la solución general del ejemplo anterior podemos hallar el sistema fundamental de las soluciones básicas:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con la utilización del sistema fundamental, la solución general del ejemplo puede ser escrita en la forma:

$$X = t_1E_1 + t_2E_2$$

EJEMPLO 15. Resolver la ecuación matricial AX=X, donde X es una matriz columna y $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -18 \end{pmatrix}$

Solución. Si $AX=X \rightarrow (A-I)X = \theta$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se trata de resolver un sistema homogéneo. En este caso bastará hallar el rango de la matriz (A-I) reduciéndola a su forma escalonada, esto es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1^4(-3)]{F_1^2(-3)\;,\;F_1^3(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4(1/2)]{F_2(-1)\;,\;F_3(-1/3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2^1(-1)]{F_2^3(-1)\;,\;F_2^4(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E'$$

Vemos que $\rho(E')=\rho(A-I)=2<4$ (número de incógnitas), entonces el sistema tiene infinitas soluciones y existen $n-r=4-2=2$ variables libres. De la última matriz formamos el sistema:

$$x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 0$$
$$x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0$$

Designando por $x_3=t_1$ y $x_4=t_1$ a las variables libres, entonces:

$$x_1 = 8t_1-7t_2 \;,\; x_2 = -6t_1+5t_2$$

Por tanto, la solución general de la ecuación matricial está dada por el vector columna:

$$X = (8t_1-7t_2,-6t_1+5t_2,t_1,t_2)^t$$
$$= t_1(8,-6,1,)^t + t_2(-7,5,0,1)^t$$
$$= t_1E_1 + t_2E_2$$

EJEMPLO 16. Determinar el valor del parámetro a, para los cuales el sistema dado tiene soluciones no triviales y hállese estas soluciones.

$$x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0$$
$$4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

Solución. Reduciendo la matriz de los coeficientes a su forma escalonada se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1^3(-2)]{F_1^2(-4)} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1-4a & -1 \\ 0 & 1-2a & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3^2(-2)} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1-2a & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2(-1/3)} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1-2a & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^3(2a-1)} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}(a+1) \end{bmatrix} = E'$$

Para que el sistema tenga soluciones no triviales es necesario que $\rho(E')=2$, ya que el número de incógnitas del sistema es $n=3$.

Luego, si $\rho(A)=2 \rightarrow -\frac{2}{3}(a+1)=0 \leftrightarrow a=-1$

$$E' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^1(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde: $x_1 + \frac{5}{3}x_3 = 0 \quad , \quad x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$

Si designamos $x_3=t_1$ como la variable libre, entonces:

$x_1=(-5/3)t_1$, $x_2=(1/3)t_1$. Por tanto: $X=t_1(-5/3,1/3,1)^t= t_1E_1$

EJEMPLO 17. Resolver el sistema: $X^tA=X^t$, donde:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ -1 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 8 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$ y X es una matriz columna.

Solución. Si $X^tA=X^t \rightarrow (X^tA)^t=(X^t)^t \rightarrow A^tX=X \rightarrow (A^t-I)X = \theta$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como se trata de un sistema homogéneo calculamos el rango de:

$$A^t-I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1^4(-3)]{F_1^2(-2),\ F_1^3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2^4(-2)]{F_2^3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E'$$

Como $\rho(E')=2<4$ (número de incógnitas) hay infinitas soluciones y el número de variables libres es $n-r=4-2=2$.

De E' formamos el sistema: $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$; $-x_3 + x_4 = 0$

Haciendo: $x_2=t_1$ y $x_4=t_2$ $\rightarrow$ $x_1 = -2t_1-t_2$ y $x_3=t_2$

$$\therefore X = (-2t_1-t_2, t_1, t_2, t_2)^t$$
$$= t_1(-2,1,0,0)^t + t_2(-1,0,1,1)^t = t_1E_1 + t_2E_2$$

EJERCICIOS

1. En los ejercicios siguientes, suponiendo que la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales se ha llevado, mediante transformaciones por filas, a la forma escalonada que se indica; resolver el sistema.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Rp. $X=(4,3,2)^t$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Rp. $X=(2-3s, 4+s, 2-s, s)^t$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ Rp. $X=(-4-4s, 5+5s, -1-2s, s)^t$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Rp. $X=(-1-5s-5t, s, 1-3t, 2-4t, t)^t$

Resolver los sistemas siguientes mediante transformaciones elementales.

2. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$ Rp. $X=(2,-1,1)^t$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$ Rp. $X=(-1,3,-2)^t$

4. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -10 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$ Rp. $X=(-1,5,-2)^t$

5. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 8x_1 - x_2 - 3x_3 &= 26 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$ Rp. $X=(3,4,-2)^t$

6. $$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 &= 62 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 15 \end{aligned}$$ Rp. $X=(-1,2,3)^t$

Investigar la compatibilidad y hallar, si es posible, la solución general de los siguientes sistemas.

7. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_4 &= -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22 \end{aligned}$$ Rp. $X=(-1,3,-2,2)^t$

8. $$\begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8 \end{aligned}$$ Rp. $X=(s,-13+3s,-7,0)^t$

9. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$$ Rp. Inconsistente

10. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= -14 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 17 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 18 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= -26 \end{aligned}$$ Rp. $X=(2-s,3+2s,-5+2s,s)^t$

11. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 14 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -15 \end{aligned}$$ Rp. $X=(2,3,-1,-2)^t$

Investigar la compativilidad y hallar la solución general de los siguientes sistemas:

12. $\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{array}$ Rp. $X=(-1,3,-2,2)^t$

13. $\begin{array}{l} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{array}$ Rp. $X=(s,-13+3s,-7,0)^t$

14. $\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{array}$ Rp. $X=(3,2,4,-1)^t$

Investigar la consistencia y hallar la solución general en función del valor del parámetro λ.

15. $\begin{array}{l} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{array}$

Rp. Si $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0$, entonces: $X = \frac{1}{\lambda+3}(1,1,1,1)^t$
Si $\lambda=3$ Inconsistente
Si $\lambda=1 \to X=(1-t_1-t_2,-t_3,t_1,t_2,t_3)^t$

16. $\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{array}$

Rp. Si $\lambda=8 \to X=(t_1,4+2t_1-2t_2,3-2t_2,t_2)^t$
Si $\lambda\neq 8 \to X=(0,4-2t_1,3-2t_1,t_1)^t$

17. $\begin{array}{l} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 1 \end{array}$

Rp. Si $\lambda=-3$ Inconsist.
Si $\lambda=0 \to X=(1-t_1-t_2,t_1,t_2)^t$

Hállese el sistema fundamental de soluciones y la solución general de los siguientes sistemas:

18. $\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{array}$ Rp. $X=t_1(1,0,-5/2,7/2)^t + t_2(0,1,5,-7)^t$

19. $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0$
$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0$
$9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_5 = 0$

Rp. $X = t_1(1,0,0,-9/4,3/4)^t + t_2(0,1,0,-3/2,1/2)^t + t_3(0,0,1,-2,1)^t$

20. $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$
$5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0$
$7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0$

Rp. $X = t_1(-3,2,1,0,0)^t + t_2(-5,3,0,0,1)^t$

21. Determinar los valores del parámetro a, para los cuales el sistema tiene soluciones no triviales y hállese estas soluciones.
$a^2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$
$ax_1 - x_2 + x_3 = 0$
$8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$

Rp. $a=2$, $X=t_1(1,0,-2)^t$
$a=-4$, $X=t_2(1,-24/5,4/5)^t$

22. Una fábrica posee tres máquinas A, B y C, las cuales trabajan en un día, durante 15, 22 y 23 horas, respectivamente. Se producen tres artículos X, Y y Z en estas máquinas, en un día, como sigue: una unidad de X está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas, en C durante 1 hora; una unidad de Y está en A durante 2 horas, en B durante 2 horas, en C durante 3 horas; una unidad de Z está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas, en C durante 2 horas. Si las máquinas se usan a máxima capacidad, durante un día, hallar el número de unidades de cada artículo que es posible producir.

Rp. X=3, Y=4, Z=4

23. Se realizó un estudio, en un establo, sobre la descendencia de las vacas según el color del pelaje y se obtuvo el siguiente resultado:
Vacas blancas alumbran terneras blancas, negras o marrones en un 60%, 20% y 20% respectivamente.
Vacas negras lo hacen en un 40%, 20% y 10% respectivamente.
Vacas marrones lo hacen en un 40%, 20% y 40% respect.
Si en dicho establo la población actual es de 50% blancas, 30% negras y el resto marrones, cuál será la distribución de vacas respecto al pelaje? a) después de dos generaciones b) hace una generación.

DETERMINANTES

3.1 DEFINICION. Determinante es un número real o escalar asociado a una matriz cuadrada A, que se denota por:

$$|A| \quad , \quad det(A) \quad , \quad D(A)$$

El determinante de una matriz es un sólo número real y su cálculo depende del orden de la matriz cuadrada en particular. Así, para una matriz cuadrada A de orden 2, este número se define como:

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (1)$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(2)-1(-3) = 8+3 = 11$$

El cálculo del determinante de una matriz de orden 3 es un tanto más complicada, pues su valor se define como:

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}a_{33}$$

Se calcula así: Uno de los tres sumandos que figuran en el segundo miembro con el signo más es un producto de elementos de la diagonal principal de la matriz A; cada uno de los otros dos sumandos es un producto de elementos situados en la paralela a dicha diagonal y un elemento opuesto del rincón de la matriz (Figura 1) y los sumandos que figuran en el segundo miembro con el signo menos se construye de modo igual, pero esta vez respecto a la segunda diagonal (Figura 2).

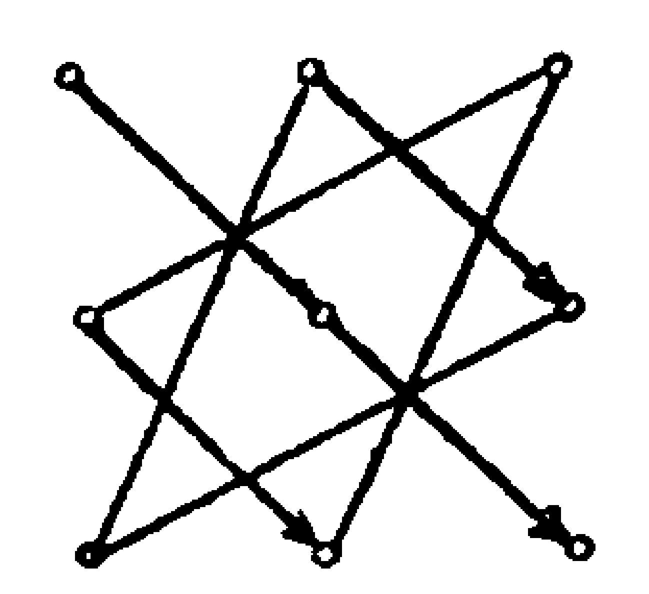


Figura 1

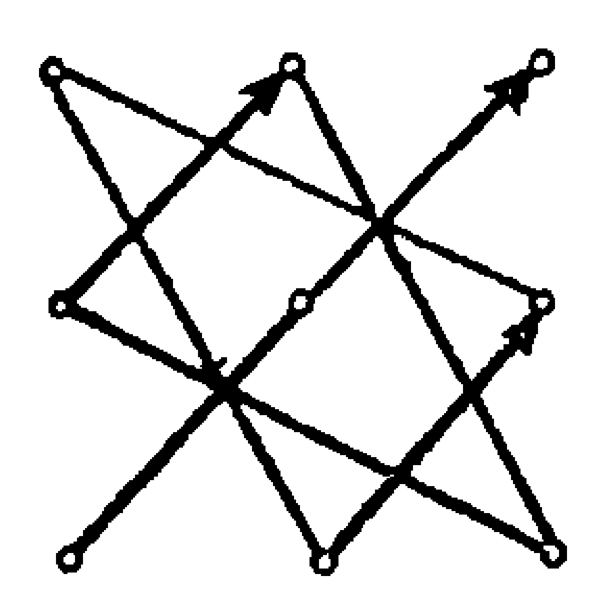


Figura 2

Por ejemplo, si $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, su determinante es:

$$D(A)=(2)(4)(-2)+(1)(-4)(3)+(-1)(-3)(5)-(3)(4)(5)-(-3)(-4)(2)-(-1)(1)(-2)$$

$$\therefore\ D(A)=-16-12+15-60-24-2=-91$$

Hemos visto que el cálculo del determinante de una matriz de orden 3 se hace un tanto laborioso y podemos pensar que la obtención del determinante de una matriz de orden n ofrece ciertas dificultades; por lo que, es conveniente estudiar previamente algunas propiedades del determinante considerado como una función sobre el conjunto de matrices de orden 2.

3.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

PROPIEDAD 1. Si A es una matriz cuadrada que tiene una línea (fila o columna) compuesto exclusivamente de ceros, entonces el determinante de la matriz es cero.

En efecto, si $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow D(A) = (a_{11})(0)-(0)(a_{12}) = 0$

PROPIEDAD 2. (Paridad de las filas y columnas de un determinante) El valor de un determinante no varía si este se *transpone*, es decir, si se cambia cada una de sus filas por la columna del mismo número.

En efecto, sea A una matriz cuadrada y A^t su transpuesta.

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow D(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ y $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\rightarrow D(A^t) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\therefore D(A) = D(A^t)$$

PROPIEDAD 3. Si dos líneas (filas o columnas) de una matriz A son idénticas, entonces el determinante de la matriz es cero.

En efecto, si $A=\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \rightarrow D(A)=(a)(b)-(b)(a) = 0$

PROPIEDAD 4. Sean A y B dos matrices de orden n

a) Si B es la matriz que resulta de multiplicar una línea de A por un escalar k, entonces:

$$D(B) = kD(A)$$

En efecto, si $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces:

$$D(B) = ka_{11}a_{22} - ka_{21}a_{12} = k(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(B) = kD(A)$$

Según esta propiedad, un factor común de todos los elementos de una línea de un determinante puede ser separado como factor del determinante.

b) Si B es la matriz que resulta de intercambiar dos líneas de A entonces, $D(B) = -D(A)$.

En efecto, si $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow D(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

y $B=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} \rightarrow D(B) = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$

$$\therefore D(B) = -D(A)$$

c) Si B es la matriz que se obtiene de A al trasladar una de sus líneas p lugares, entonces:

$$D(B) = (-1)^p D(A)$$

d) Si B es la matriz que resulta cuando un múltiplo de una línea de A se le suma a otra línea, entonces:

$$D(B) = D(A)$$

En efecto, si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow D(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

y $B=\begin{pmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow D(B) = a_{11}a_{22} + ka_{12}a_{22}-a_{21}a_{12}-ka_{12}a_{22}$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Esta propiedad es muy útil para calcular determinantes de matrices de cualquier orden.

e) Si los elementos de una línea de un determinante son iguales a la suma de p términos, el determinante se puede expresar como la suma de p determinantes.

En efecto: $\begin{vmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+c_{11})a_{22} - (a_{21}+c_{21})a_{12}$

$$= a_{11}a_{22}+ c_{11}a_{22} - a_{21}\;{}_{12} - c_{21}a_{12}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})+(c_{11}a_{22}-c_{21}a_{12})$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} \text{Cos}8x & \text{Sen}5x \\ \text{Sen}5x & -\text{Cos}8x \end{vmatrix} = 0$

Solución. Según el desarrollo de un determinante de segundo orden se tiene:

$$\begin{vmatrix} \text{Cos}8x & \text{Sen}5x \\ \text{Sen}8x & -\text{Cos}5x \end{vmatrix} = -\text{Cos}8x\text{Cos}5x - \text{Sen}8x\text{Sen}5x = 0$$

de donde: $\text{Cos}(8x-5x) = \text{Cos}3x = 0 \leftrightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \text{ , } k\in Z$$

EJEMPLO 2. Demostrar que para a, b, c, d reales, las raíces de la ecuación $\begin{vmatrix} a-x & c+d \\ c-d & b-x \end{vmatrix} =0$ son reales.

Solución. Desarrollando el determinante tendremos:

$$(a-x)(b-x)-(c-d)(c+d)=0 \leftrightarrow x^2-(a+b)x+ab-c^2-d^2=0$$

Bastará probar que el discriminante del trinomio resultante es positivo. En efecto:

$$\Delta = b^2-4ac = (a+b)^2-4(ab-c^2-d^2) = (a-b)^2+c^2+d^2$$

Como se puede observar, $\Delta>0$, $\forall a,b,c,d \in R$. Por tanto, las raíces de la ecuación son reales.

Ejemplo 3. Resolver la desigualdad: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$

Solución. Por el desarrollo del determinante de tercer orden se tiene:

$$(-3x+2-4)-(-x+2-12)<0 \leftrightarrow -3x-2+x+10<0$$
$$\leftrightarrow -2x+8<0$$
$$\leftrightarrow x>4 \rightarrow x \in \langle 4,+\infty\rangle$$

EJEMPLO 4. Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$, donde:

$$\varepsilon = \mathrm{Cos}\tfrac{2}{3}\pi + i\mathrm{Sen}\tfrac{2}{3}\pi$$

Solución. $D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix} = (1+\varepsilon^2+\varepsilon^4) - (\varepsilon^3-1-\varepsilon^3)$

$$= \varepsilon^4-2\varepsilon^3+\varepsilon^2 = (\varepsilon^2-\varepsilon)^2$$

$$\varepsilon^2 = (\mathrm{Cos}\tfrac{2}{3}\pi + i\mathrm{Sen}\tfrac{2}{3}\pi)^2 = \mathrm{Cos}\tfrac{4}{3}\pi + i\mathrm{Sen}\tfrac{4}{3}\pi = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\varepsilon = \mathrm{Cos}\tfrac{2}{3}\pi + i\mathrm{Sen}\tfrac{2}{3}\pi = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow \varepsilon^2-\varepsilon = -\sqrt{3}i$$

$$\therefore D(A) = (-\sqrt{3}i)^2 = 3i^2 = -3$$

EJEMPLO 5. Hallar el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución. Haciendo uso de las propiedades 4e y 3 se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2+1 \\ 4 & 5 & 5+1 \\ 7 & 8 & 8+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 1 & 1+1 & 1 \\ 4 & 4+1 & 1 \\ 7 & 7+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(A) = 0$$

EJEMPLO 6. Demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demostración. En efecto, sumando la segunda columna a la primera se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & a_1-b_1x & c_1 \\ 2a_2 & a_2-b_2x & c_2 \\ 2a_3 & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1 & c_1 \\ 2a_2 & a_2 & c_2 \\ 2a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1 & -b_1x & c_1 \\ 2a_2 & -b_2x & c_2 \\ 2a_3 & -b_3x & c_3 \end{vmatrix}$$

Por la propiedad 3, el primer determinante es cero. Del segundo determinante extraemos los factores 2 y -x de la primera y segunda columnas respectivamente, y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 7. Demostrar que el determinante de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ se divide por x-y, x-z y z-y.

Demostración. Bastará probar que el D(A) tiene como factores a x-y , x-z y z-y. En efecto, efectuando las operaciones: 1raColumna - 2daColumna
2daColumna - 3raColumna

obtenemos: $D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y^2-z^2)-(x^2-y^2)(y-z)$

$$\begin{aligned} \rightarrow \; D(A) &= (x-y)(y+z)(y-z) - (x+y)(x-y)(y-z) \\ &= (x-y)(y-z)(y+z-x-y) \\ &= (x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 8. Hallar el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{pmatrix}$

Solución. La primera columna (C_1) admite el factor 14, luego según la propiedad 4a, se tiene:

$$D(A) = 14\begin{vmatrix} 2 & 25 & 38 \\ 3 & 38 & 65 \\ 4 & 47 & 83 \end{vmatrix}$$

Haciendo uso de la propiedad 4a realizamos las siguientes operaciones con las columnas: $-12C_1+C_2$ y $-19C_1+C_3$

$$D(A) = 14\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 8 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \text{ Se realizó: } -2C_2+C_1$$

Finalmente, por el desarrollo del determinante de tercer orden tendremos: $D(A) = 14(0+0+48-0-0+7) = 770$

EJERCICIOS

Calcular el determinante de tercer orden:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \text{Sen}\alpha & \text{Cos}\alpha & 1 \\ \text{Sen}\beta & \text{Cos}\beta & 1 \\ \text{Sen}\gamma & \text{Cos}\gamma & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$ si $\varepsilon = \text{Cos}\frac{4}{3}\pi + i\text{Sen}\frac{4}{3}\pi$

7. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Rp. $x=-4\pm\sqrt{22}$

8. Resover la desigualdad: $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$ Rp. $x\varepsilon\langle -6.-4\rangle$

9. Demostrar que: $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

10. Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(Sugerencia: Muéstrese que la última columna del determinante de partida puede ser representada en la forma:

$$\begin{pmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} - (ab+ac+bc)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + abc\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y hágase uso de esta representación)

11. Demostrar que el determinante: $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

se divide por $x+y$ y x^2-xy+y^2.

Calcular el valor de los determinantes: (Usar propiedades)

12. $\begin{vmatrix} 24 & 8 & 32 \\ 47 & 15 & 59 \\ 53 & 17 & 65 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 66 & 18 & 21 \\ 42 & 14 & 16 \\ 75 & 23 & 25 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 108 & 142 & 42 \\ 128 & 153 & 53 \\ 138 & 164 & 64 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 245 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

18. Calcular: $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{Cos}\frac{\pi}{3} + i\mathrm{Sen}\frac{\pi}{3} & \mathrm{Cos}\frac{\pi}{4} + i\mathrm{Sen}\frac{\pi}{4} \\ \mathrm{Cos}\frac{\pi}{3} - i\mathrm{Sen}\frac{\pi}{3} & 1 & \mathrm{Cos}\frac{2}{3}\pi + i\mathrm{Sen}\frac{2}{3}\pi \\ \mathrm{Cos}\frac{\pi}{4} - i\mathrm{Sen}\frac{\pi}{4} & \mathrm{Cos}\frac{2}{3}\pi - i\mathrm{Sen}\frac{2}{3}\pi & 1 \end{vmatrix}$

Respuestas. 1) 0 2) -2 3) $\mathrm{Sen}(\alpha-\beta)+\mathrm{Sen}(\beta-\gamma)+\mathrm{Sen}(\gamma-\alpha)$
4) $abc+x(ab+bc+ca)$ 5) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$ 6) $3\sqrt{3}i$
12) 32 13) 273 14) -43 15) -252 16) -11,000 17) -29×10^5

3.3 EXISTENCIA DE LOS DETERMINANTES

Para demostrar la existencia de los determinantes definidos sobre el conjunto de matrices cuadradas de orden n, K^n, introduciremos la idea de *submatriz*, que anotaremos del siguiente modo: Si $A=[a_{ij}]$ es una matriz de orden n×n, sea A_{ij} la submatriz de orden (n-1)×(n-1) que se obtiene de A al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Veremos inicialmente el caso de los determinantes de las matrices de tercer orden.

Sea la matriz: $A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Las submatrices correspondientes a la primera columna vienen dadas por:

$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (Matriz obtenida al eliminar la primera fila y la primera columna.)

$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (Matriz obtenida al eliminar la segunda fila y la primera columna.)

$A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ (Matriz obtenida al eliminar la tercera fila y la primera columna.)

Ahora bien, definimos el determinante de la matriz A mediante la fórmula:

$$D(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Donde cada término de la suma es el producto de un elemento de la primera columna de la matriz por el determinante de la matriz de orden 2 que se obtiene al eliminar la fila i y la primera columna, anotando el signo correspondiente a este término.

La suma que define una función determinante sobre el conjunto de las matrices cuadradas de tercer orden se puede escribir como:

$$D(A) = a_{11}D(A_{11}) - a_{21}D(A_{21}) + a_{31}D(A_{31}) \qquad (3)$$

EJEMPLO 1. Calcular el determinante la la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Solución. Según la ecuación (3):

$$D(A) = 2D(A_{11}) - 1D(A_{21}) + 5D(A_{31})$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5-8) - (5+12) + 5(2+3) = 2$$

La fórmula (3) tiene múltiples generalizaciones, por lo que su discusión requiere el establecimiento de nuevos conceptos y la introducción de una terminología apropiada.

3.4 MENOR DE UNA COMPONENTE

Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces el *menor del elemento* a_{ij} se denota por M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz $(n-1)\times(n-1)$ de A que se forma suprimiendo todos los elementos de la fila i y todos los elementos de la columna j.

Observación. De una matriz de orden $m\times n$ se pueden formar $C_m^k.C_n^k$ menores de orden k, y de las matrices cuadradas de orden n se pueden formar $C_n^k.C_n^k$ menores de orden k. C_n^k es el número de combinaciones de n objetos tomados de k en k, y se calcula la fórmula: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Así, para la matriz del ejemplo 1, se pueden formar $C_3^2.C_3^2=3\times3=9$ menores de segundo orden.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3.5 COFACTOR DE UNA COMPONENTE

El cofactor de una componente a_{ij}, denotado por A_{ij}, está definido por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij})$$

Es decir, el cofactor de la componente a_{ij} es el menor M_{ij} con el signo prefijado $(-1)^{i+j}$.

Por ejemplo, para la matriz de tercer orden: $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Los menores y cofactores correspondientes a las componentes de la primera fila son, respectivamente:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Como se puede observar, los signos de cada cofactor está configurado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ahora bien, la fórmula (3):

$$D(A) = a_{11}D(A_{11}) - a_{21}D(A_{21}) + a_{31}D(A_{31})$$

establece que el determinante de la matriz A es el producto interno de los vectores:

$$(a_{11},a_{21},a_{31}).\left[(-1)^{1+1}D(A_{11}),(-1)^{2+1}D(A_{21}),(-1)^{3+1}D(A_{31})\right]$$

donde los elementos del primer vector, son los elementos de la primera columna de A y los elementos del segundo vector son los cofactores de los elementos correspodientes a la primera columna de A. Es evidente que este resultado es cierto para cualquier fila o columna de A. Podemos afirmar entonces que, el determinante

de una matriz 3x3 se puede obtener de 6 maneras diferentes, al tomar las componentes de cualquier fila o columna de la matriz y multiplicar cada una de estas componentes por su cofactor y sumando los resultados.

Se presentará enseguida una generalización para determinantes de matrices de nxn en términos de determinantes de matrices (n-1)x (n-1).

Para cada $1<i<n$ y cada $1<j<n$, se define:

$$D(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}D(A_{1j})+(-1)^{2+j}a_{2j}D(A_{2j})+ \dots +(-1)^{n+j}a_{nj}D(A_{nj})$$

(Desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna)

Haciendo uso de la anotación correspondiente a las sumatorias para los que j varía de 1 a n, se tiene:

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D(A_{ij}) \qquad (4)$$

De otro lado, se tiene que:

$$D(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}D(A_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}D(A_{i2})+ \dots +(-1)^{i+n}a_{in}D(A_{in})$$

(Desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila)

Expresando en forma de sumatoria, en las que i varía de 1 a n, se tiene:

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D(A_{ij}) \qquad (5)$$

Cada una de las sumas (4) es el producto escalar de una columna de A con el vector cuyos elementos son los cofactores asociados. Cada una de las sumas (5) es el producto escalar de una fila de A con el correspondiente vector cofactor.

Las fórmulas (4) y (5) reciben el nombre de ***expansión o desarrollo de un determinante por menores.***

EJEMPLO 2. Hallar el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ de dos formas distintas.

Solución. Aplicando la expansión por la primera columna, para

j=1, en (4), se tiene:

$$D(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1})$$

$$\leftrightarrow D(A) = (-1)^{1+1} a_{11} D(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} D(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} D(A_{31})$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(21-4) - (-7-20) + 3(-1-15) = 13$$

Aplicando la expansión por la primera fila, para i=1 en (5), se tiene:

$$D(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} D(A_{1j})$$

$$\leftrightarrow D(A) = (-1)^{1+1} a_{11} D(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} D(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} D(A_{13})$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(21-4) + (7-3) + 5(4-9) = 13$$

EJEMPLO 3. Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solución. Para aprovechar los ceros en la cuarta fila, debemos usar el desarrollo por filas (5), para i=4, esto es:

$$D(A) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{4+j} a_{4j} D(A_{4j})$$

Como $a_{42}=a_{43}=0$ $\rightarrow$ $D(A) = (-1)^{4+1} a_{41} D(A_{41}) + (-1)^{4+4} a_{44} D(A_{44})$

$$= -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Desarrollando el $D(A_{41})$ por los cofactores de su segunda fila y el $D(A_{44})$, por los cofactores de su segunda columna, obtenemos:

$$D(A_{41}) = 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2-3) = -10$$

$$D(A_{44}) = -1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

Por tanto, en (1): $D(A) = -(-10) + 2(-6) = -2$

EJERCICIOS

Empleando desarrollos adecuados por filas o columnas, calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Rp. 6

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Rp. 2

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ Rp. 1

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ R. 8

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ R. 4

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Rp. 2

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Rp. -5

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Rp. -20

9. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ R. 45

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ R. -38

Para las siguientes matrices A formar la matriz A-XI. Determinar los valores de x que satisfacen la condición D(A-XI)=0

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Rp. {1,2}

12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Rp. {1,0,4}

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ R. {0,2}

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calcular los determinantes, desarrollándolos por la tercera fila y segunda columna, respectivamente:

15. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$

Resp. 14) $\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ 15) $8a+15b+12c-15d$ 16) $2a-8b+c+5d$

3.6 CALCULO DE DETERMINANTES DE CUALQUIER ORDEN

Para calcular el determinante de una matriz de orden n, es conveniente seguir los siguientes pasos:

Paso 1. Elegir como línea pivot una fila o columna y destacar con un asterisco.

Paso 2. Haciendo uso de la propiedad 4d, se multiplica cada elemento de la línea pivot por un número tal que al sumar el resultado con el elemento correspondiente de otra línea, se obtenga por lo menos un elemento igual a cero.
Las anotaciones que se destacan en este paso son, por ejemplo:

$$aF_1+F_2 \;,\; aC_1+C_2$$

que indican lo siguiente: Los elementos de la fila o columna 1 se multiplicó por el factor a y el resultado se sumó a los elementos de la fila o columna 2.

Paso 3. Se repite el paso 2 tantas veces como sea necesario hasta tener un determinante equivalente en que todos los elementos de una misma línea, excepto uno, sean cero.

Paso 4. Se desarrolla el determinante obtenido en el paso 3 con respecto de la línea que tiene sus elementos igual a cero, con excepción de uno de ellos, obteniendo asi un solo determinante de orden (n-1).

Paso 5. Se repite el procedimiento hasta obtener un determinante de orden 2.

EJEMPLO 1. Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Solución. Factorizando 2 de la primera y tercera filas se tiene

$$D(A) = 2\text{x}2\begin{vmatrix} \overset{*}{1} & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 8 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-3C_1+C_3 \\ -1C_1+C_4}]{2C_1+C_2} D(A) = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila se tiene:

EJEMPLO 2. Si $A=\begin{pmatrix} k-1 & 3 & -3 \\ -3 & k+5 & -3 \\ -6 & 6 & k-4 \end{pmatrix}$, hallar el valor de k de manera que D(A)=0.

Solución. $D(A) = \begin{vmatrix} k-1 & \overset{*}{3} & -3 \\ -3 & k+5 & -3 \\ -6 & 6 & k-4 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_2+C_3]{C_2+C_1} = \begin{vmatrix} k+2 & 3 & 0 \\ k+2 & k+5 & k+2 \\ 0 & 6 & k+2 \end{vmatrix}$

Facorizando k+2 de la 1ra y 3ra columnas se tiene:

$$D(A) = (k+2)^2 \begin{vmatrix} \overset{*}{1} & 3 & 0 \\ 1 & k+5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3C_1+C_2} = (k+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila obtenemos:

$$D(A) = (k+2)^2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} k+2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)^2(k-4)$$

Si $D(A)=0 \rightarrow k+2=0$ ó $k-4=0 \leftrightarrow k=-2$ ó $k=4$

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$

Solución. Haciendo uso de la propiedad 4e se tiene:

$$\begin{vmatrix} 15 & 11 & \overset{*}{10} \\ 11 & 17 & 16 \\ 7 & 14 & 13 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2 & 11 & \overset{*}{10} \\ 3 & 17 & 16 \\ 1 & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

Efectuando, en el 1er determinante: $-C_3+C_1$, $-C_3+C_2$, y en el 2do determinante: $-C_3+C_2$, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 5 & \overset{*}{1} & 10 \\ -5 & 1 & 16 \\ -6 & 1 & 13 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2 & \overset{*}{1} & 10 \\ 3 & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[-10C_2+C_3]{-5C_2+C_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & 1 & 6 \\ -11 & 1 & 3 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila se tiene:

$$1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -11 & 3 \end{vmatrix} - x(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow -(-30+66) + x(3+6)=0$, de donde: $x=4$

EJEMPLO 4. Si $A=\begin{pmatrix} x-4a & 2a-18x & 4x-4a \\ x-4b & 2b-18y & 4y-4b \\ x-4c & 2c-18z & 4z-4c \end{pmatrix}$, calcular el D(A).

Solución. Factorizando 2 y 4 de la 2da y 3ra columnas respectivamente se tiene:

$$D(A) = 8\begin{vmatrix} x-4a & a-9x & \overset{*}{x-a} \\ x-4b & b-9y & y-b \\ x-4c & c-9z & z-c \end{vmatrix} \xrightarrow[-C_3+C_2]{C_3+C_1} = 8\begin{vmatrix} -3a & -8x & x-a \\ -3b & -8y & y-b \\ -3c & -8z & z-c \end{vmatrix}$$

Factorizando -3 y -8 de la 1ra y 3ra columnas respectivamente:

$$D(A) = 8(-3)(-8)\begin{vmatrix} \overset{*}{a} & x & x-a \\ b & y & y-b \\ c & z & z-c \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_3} = 192\begin{vmatrix} a & x & x \\ b & y & y \\ c & z & z \end{vmatrix}$$

y por la propiedad 3: $D(A) = 192(0) = 0$

EJEMPLO 5. Si $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$, descomponer en factores el D(A).

Solución. Factorizando a, b y c de la 1ra, 2da y 3ra columnas respectivamente, obtenemos:

$$D(A) = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & \overset{*}{1} \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-C_3+C_2]{-C_3+C_1} = abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-c & b-c & c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila resulta:

$$D(A) = abc(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ (a+c)(a-c) & (b+c)(b-c) \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(A) = abc(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = abc(a-c)(b-c)(b-a)$$

EJEMPLO 6. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=5$ y $A=\begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix}$, hallar el D(A).

Solución. En el D(A) efectuamos: $-C_2+C_1$

$$\to D(A) = \begin{vmatrix} \overset{*}{b-a} & c+a & a+b \\ q-p & r+p & p+q \\ y-x & z+x & x+y \end{vmatrix} \xrightarrow[C_1+C_3]{C_1+C_2} = \begin{vmatrix} b-a & b+c & 2b \\ q-p & q+r & 2q \\ y-x & y+z & 2y \end{vmatrix}$$

$$\to D(A) = 2\begin{vmatrix} b-a & b+c & \overset{*}{b} \\ q-p & q+r & q \\ y-x & y+z & y \end{vmatrix} \xrightarrow[-C_3+C_2]{-C_3+C_1} = 2\begin{vmatrix} -a & c & b \\ -p & r & q \\ -x & z & y \end{vmatrix}$$

Factorizando -1 de la primera columna y haciendo uso de la propiedad 4b se tiene:

$$D(A) = 2(-1)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2(5) = 10$$

EJEMPLO 7. Si $A=\begin{pmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{pmatrix}$, calcular el D(A).

Solución. En el D(A) efectuamos: $-C_1+C_2$, $-C_1+C_3$

$$\rightarrow \; D(A) = \begin{vmatrix} x-y-z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & -x-y-z & 0 \\ 2z & 0 & -x-y-z \end{vmatrix}$$

Factorizando x+y+z de la 1ra y 3ra columnas resulta:

$$D(A) = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} x-y-z & 1 & 1 \\ 2y & -1 & 0 \\ 2z & 0 & -1 \end{vmatrix}^* \xrightarrow{C_1+C_3} =(x+y+z)^2\begin{vmatrix} x-y-z & 1 & 1 \\ 2y & -1 & 0 \\ x-y+z & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la tercera columna obtenemos

$$D(A) = (x+y+z)^2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ x-y+z & 1 \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$

EJEMPLO 8. Evaluar el determinante de $A=\begin{pmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{pmatrix}$

Solución. Sumando la 2da y 3ra filas a la 1ra fila se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2(b+c) & 2(a+c) & 2(a+b) \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}^*$$

Factorizando 2 de la 1ra fila y luego efectuando: $-F_2+F_1$, $-F_2+F_3$ obtenemos:

$$D(A) = 2\begin{vmatrix} c & 0 & a \\ b & a+c & b \\ c-b & -a & a \end{vmatrix}^* \xrightarrow{-F_1+F_3} = 2\begin{vmatrix} c & 0 & a \\ b & a+c & b \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la 1ra fila obtenemos:

$$D(A) = 2c\begin{vmatrix} a+c & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} b & a+c \\ -b & -a \end{vmatrix}$$

$$= 2c(0+ab) + 2a(-ab+ab+bc) = 4abc$$

EJEMPLO 9. Si $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$, factorizar el determinante de A.

Solución. Efectuando: C_1-C_2 y C_2-C_3, se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ yz-xz & xz-xy & xy \end{vmatrix}$$

Factorizando x-y e y-z de la 1ra y 2da columnas respectivamente obtenemos:

$$D(A) = (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ x+y & y+z & z^2 \\ -z & -x & xy \end{vmatrix} \xrightarrow[-zC_2+C_3]{-1C_1+C_2}$$

$$\rightarrow D(A) = (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & z-x & -yz \\ -z & z-x & xy+xz \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} z-x & -yz \\ z-x & xy+xz \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(A) = (x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & -yz \\ 1 & xy+xz \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+xz+yz)$$

EJEMPLO 10. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} \text{SenxCosy} & \text{CosxCosy} & \text{Seny} \\ -\text{CosxCosy} & \text{SenxCosy} & \text{Seny} \\ -\text{Cosy} & -\text{Cosy} & 1 \end{pmatrix}$. Calcular el determinante de A para $x=y=\pi/6$.

Solución.. Factorizando Cosy de la 1ra y 2da columnas se tiene:

$$D(A) = \text{Cos}^2y\begin{vmatrix} \text{Senx} & \text{Cosx} & \text{Seny} \\ -\text{Cosx} & \text{Senx} & \text{Seny} \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3+C_2]{C_3+C_1}$$

$$\rightarrow D(A) = \text{Cos}^2y\begin{vmatrix} \text{Senx+Seny} & \text{Cosx+Seny} & \text{Seny} \\ -\text{Cosx+Seny} & \text{Senx+Seny} & \text{Seny} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{Cos}^2y\begin{vmatrix} \text{Senx+Seny} & \text{Cosx+Seny} \\ -\text{Cosx+Seny} & \text{Senx+Seny} \end{vmatrix} = \text{Cos}^2y(1+2\text{SenxSeny})$$

Luego, para $x = y = \pi/6 \rightarrow D(A) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2[1+2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})]$

$$\therefore D(A) = 9/8$$

EJEMPLO 11. Si $A=\begin{bmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{bmatrix}$, factorizar el D(A).

Solución. Efectuando las operaciones: C_2-C_1 y C_3-C_1, se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Factorizando a+b+c de la 2da y 3ra columnas obtenemos:

$$D(A) = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1-(F_2+F_3)}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$$ Factorizando 2 de la 1ra fila y bc de la 1ra columna se tiene:

$$= 2bc(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ b/c & c+a-b & 0 \\ c/b & 0 & a+b-c \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{cC_1+C_2} \\ \xrightarrow{bC_1+C_3} \end{matrix}$$

$$= 2bc(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b/c & a+c & b^2/c \\ c/b & c^2/b & a+b \end{vmatrix} = 2bc(a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+c & b^2/c \\ c^2/b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(A) = 2bc(a+b+c)^2[(a+c)(a+b)-bc] = 2bc(a+b+c)^3$$

EJEMPLO 12. Determinar $D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 0 & 3+2i \\ 2+i & 3-2i & 0 \end{vmatrix}$, si $i^2=-1$.

Solución. Multiplicando la 2da fila por 1-i y la 3ra fila por 2-i se tiene:

$$(1-i)(2-i)D(A) = \begin{vmatrix} 0 & i-i & 2+i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & 4-7i & -10+2i \end{vmatrix} \xrightarrow{-2F_3+F_2}$$

$$\rightarrow \quad (1-i)(2-i)D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 0 & -8+14i & 25-5i \\ 1 & 4-7i & -10+2i \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la 1ra columna se tiene:

$$(1-i)(2-i)D(A) = \begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ -8+14i & 25-5i \end{vmatrix}$$

$$= (1+i)(25-5i)-(-8+14i)(2+i) = 50(1-i)$$

$$\therefore \; D(A) = \frac{50}{2-i} = \frac{50(2+i)}{4-i^2} = 10(2+i)$$

EJEMPLO 13. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y & 0 \\ x & 1 & 0 & y \\ y & 0 & 1 & x \\ 0 & x & y & 1 \end{pmatrix}$, evaluar D(A).

Solución. Tomando la 4ta columna como línea pivot, efectuamos: $-xC_4+C_2$, $-yC_4+C_3$

$$\rightarrow \quad D(A) = \begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 \\ x & 1-xy & -y^2 & x \\ y & -x^2 & 1-xy & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & 1-xy & -y^2 \\ y & -x^2 & 1-xy \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la 1ra fila obtenemos:

$$D(A) = -x\begin{vmatrix} x & -y^2 \\ y & 1-xy \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} x & 1-xy \\ y & -x^2 \end{vmatrix} = -x(x-x^2y+y^3)+y(-x^3-y+xy^2)$$

$$\therefore \; D(A) = -(x^2+y^2)$$

EJEMPLO 14. Evaluar el determinante de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 1 & b & c+a & b \\ 1 & c & c & a+b \end{pmatrix}$

Solución. Tomando la 4ta columna como línea pivot, efectuamos: $-C_4+C_2$ y $-C_4+C_3$

$$\rightarrow \quad D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & b+c-a & 0 & a \\ 1 & 0 & a+c-b & b \\ 1 & c-a-b & c-a-b & a+b \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la 1ra fila se tiene:

$$D(A) = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} \overset{*}{1} & b+c-a & 0 \\ 1 & 0 & a+c-b \\ 1 & c-a-b & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-(b+c-a)C_1+C_2}$$

$$\rightarrow\ D(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -b-c+a & a+c-b \\ 1 & -2b & c-a-b \end{vmatrix} = -(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -b-c+a & a+c-b \\ -2b & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= -[(-b-c+a)(c-a-b) + 2b(a+c-b)]$$

$$\therefore\ D(A) = a^2-b^2-c^2-2(ab+bc+ac)$$

EJEMPLO 15. Si $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \overset{*}{1} \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, descomponer en factores el D(A).

Solución. Tomando la 4ta columna como línea pivot, realizamos las operaciones: $-aC_4+C_1$, $-C_4+C_2$, $-C_4+C_3$

$$\rightarrow\ D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 1 \\ 1-a & 0 & a-1 & 1 \\ 1-a^2 & 1-a & 1-a & a \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \\ 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{vmatrix}$$

factorizando 1-a de la 1ra, 2da y 3ra columnas, se tiene:

$$D(A) = -(1-a)^3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1+a & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} = (a-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2+a & 1 & 0 \\ 1+a & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(a-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2+a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3(1+2+a) = (a+3)(a-1)^3$$

EJEMPLO 16. Si $A=\begin{array}{c} \\ \\ \\ * \end{array}\!\begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, hallar el D(A).

Solución. Tomando la 4ta fila como línea pivot efectuamos las operaciones: $-F_4+F_1$, $-F_4+F_2$, $-F_4+F_3$.

$$\rightarrow\ D(A) = \begin{vmatrix} a^3-1 & 3a^2-3 & 3a-3 & 0 \\ a^2-1 & a^2+2a-3 & 2a-2 & 0 \\ a-1 & 2a-2 & a-1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3-1 & 3(a^2-1) & 3(a-1) \\ a^2-1 & (a-1)(a+3) & 2(a-1) \\ a-1 & 2(a-1) & a-1 \end{vmatrix}$$

Factorizando a-1 de la 1ra, 2da y 3ra columnas se tiene:

$$D(A) = (a-1)^3\begin{vmatrix} a^2+a+1 & 3(a+1) & 3 \\ a+1 & a+3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}* \xrightarrow[-2F_3+F_2]{-3F_3+F_1}$$

$$= (a-1)^3\begin{vmatrix} a^2+a-2 & 3(a-1) & 0 \\ a-1 & a-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3\begin{vmatrix} (a-1)(a+2) & 3(a-1) \\ a-1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^3(a-1)^2\begin{vmatrix} a+2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^5(a+2-3) = (a-1)^6$$

EJEMPLO 17. Evaluar: $D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & C_1^2 & C_1^3 & C_1^4 & C_1^5 \\ 1 & C_2^3 & C_2^4 & C_2^5 & C_2^6 \\ 1 & C_3^4 & C_3^5 & C_3^6 & C_3^7 \\ 1 & C_4^5 & C_4^6 & C_4^7 & C_4^8 \end{vmatrix}$

Solución. Calculando las combinaciones mediante la fórmula:

$C_r^n = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \\ \xrightarrow{-F_2+F_3} \\ \xrightarrow{-F_3+F_4} \\ \xrightarrow{-F_4+F_5} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la 1ra columna se tiene:

$$D(A) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \\ \xrightarrow{-F_2+F_3} \\ \xrightarrow{-F_3+F_4} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

$$D(A) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \\ \xrightarrow{-F_2+F_3} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5-4 = 1$$

EJEMPLO 18. Si $A=\begin{bmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{bmatrix}$, resolver $D(A)=0$

Solución. Tomando la 4ta columna como línea pivot, efectuamos las operaciones: $-C_4+C_1$, $-C_4+C_2$, $-C_4+C_3$.

$$\rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & x \\ 0 & b & 0 & x \\ 0 & 0 & c & x \\ -d & -d & -d & d+x \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila obtenemos:

$$D(A) = a\begin{vmatrix} b & 0 & x \\ 0 & c & x \\ -d & -d & d+x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ -d & -d & -d \end{vmatrix}$$

$$= ab\begin{vmatrix} c & x \\ -d & d+x \end{vmatrix} + ax\begin{vmatrix} 0 & c \\ -d & -d \end{vmatrix} + dx\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= ab(cd+xc+dx) + ax(0+cd) + bcdx$$

$$= abcd + (abc + abd + acd + bcd)x$$

Luego, si $D(A)=0 \rightarrow x = -\dfrac{abcd}{ab(c+d) + cd(a+b)}$

EJEMPLO 19. Si $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$, demostrar que $D(A)=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

Demostración. En efecto, multiplicando por -a, -b, -c y -d la 1ra, 2da, 3ra y 4ta fila respectivamente se tiene

$$D(A) = -\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a & ab & ac & ad \\ b & -ab & bd & -bc \\ c & -cd & -ac & bc \\ d & -cd & -bd & -ad \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1+(F_2+F_3+F_4)}$$

$$= -\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ b^2 & -ab & bd & -bc \\ c^2 & -cd & -ac & bc \\ d^2 & cd & -bd & -ad \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la 1ra fila y factorizando b, c y d del determinante resultante obtenemos:

$$D(A) = -\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a}\begin{vmatrix} -a & d & -c \\ -d & -a & b \\ c & -b & -a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{vmatrix} \overset{*}{1} & -d/a & c/a \\ -d & -a & b \\ c & -b & -a \end{vmatrix}$$

Tomando la 1ra columna como línea pivot, efectuamos las operaciones: $(d/a)C_1+C_2$, $(-c/a)C_1+C_3$, y obtenemos:

$$D(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d & -\frac{a^2+d^2}{a} & \frac{cd+ab}{a} \\ c & \frac{cd-ab}{a} & -\frac{a^2+b^2}{a} \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)\left[\frac{(a^2+d^2)(a^2+c^2)}{a^2} - \frac{(cd-ab)(cd+ab)}{a^2}\right]$$

de donde: $D(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

EJEMPLO 20. Calcular $D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 & a^8 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 & a^{12} \\ 1 & a^4 & a^8 & a^{12} & a^{16} \end{vmatrix}$

Solución. Efectuando las operaciones: $F_1-F_2, F_2-F_3, F_3-F_4, F_4-F_5$ se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 & 1-a^4 \\ 0 & a-a^2 & a^2-a^4 & a^3-a^6 & a^4-a^8 \\ 0 & a^2-a^3 & a^4-a^6 & a^6-a^9 & a^8-a^{12} \\ 0 & a^3-a^4 & a^6-a^8 & a^9-a^{12} & a^{12}-a^{16} \\ 1 & a^4 & a^8 & a^{12} & a^{16} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera columna, se tiene:

$$D(A) = (-1)^{5+1}\begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 & 1-a^4 \\ a(1-a) & a^2(1-a^2) & a^3(1-a^3) & a^4(1-a^4) \\ a^2(1-a) & a^4(1-a^2) & a^6(1-a^3) & a^8(1-a^4) \\ a^3(1-a) & a^6(1-a^2) & a^9(1-a^3) & a^{12}(1-a^4) \end{vmatrix}$$

$$= a.a^2.a^3(1-a)(1-a^2)(1-a^3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \xrightarrow{F_2-F_3} \xrightarrow{F_3-F_4}$$

$$D(A) = a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)\begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & a-a^2 & a^2-a^4 & a^3-a^6 \\ 0 & a^2-a^3 & a^4-a^6 & a^6-a^9 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la 1ra columna se tiene:

$$D(A) = a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ a(1-a) & a^2(1-a^2) & a^3(1-a^3) \\ a^2(1-a) & a^4(1-a^2) & a^6(1-a^3) \end{vmatrix}$$

$$= -a^6(1-a)^2(1-a^2)^2(1-a^3)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \xrightarrow{F_2-F_3}$$

$$= -a^9(1-a)^2(1-a^2)^2(1-a^3)^2\begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-a^2 & a^2-a^4 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix}$$

$$= -a^9(1-a)^2(1-a^2)^2(1-a^3)^2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a(1-a) & a^2(1-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= -a^{10}(1-a)^3(1-a^2)^3(1-a^3)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = a^{10}(1-a)^4(1-a^2)^3(1-a^3)^2$$

EJEMPLO 21. Calcular el determinante de Vandermonde:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots\ldots & a^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-2} & a_3^{n-3} & \ldots\ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Solución. Mostraremos que el determinante de Vandermonde es igual al producto de toda clase de diferencias a_i-a_j, para $1\leq j<i\leq n$, cualquiera que sea n $(n\geq 2)$. Realicemos la demostración por inducción. En efecto, para n=2 tenemos:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2-a_1$$

Supongamos que nuestra afirmación se ha demostrado para los determinantes de Vandermonde de orden (n-1), es decir:

$$D_{n-1} = \prod_{1<j<i<n-1} (a_i - a_j)$$

Ahora bien, mediante las operaciones elementales transformamos el determinante D_n del modo siguiente: de la última n-ésima fila sustraemos la (n-1)-ésima fila, multiplicada por a_1, y, en general, sustraemos sucesivamente de la k-ésima fila la (k-1)-ésima multiplicada, por a_1. Obtenemos:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & & & & \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-1} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Desarrollemos el determinante por los cofactores de la 1ra columna y saquemos de todas las columnas los factores comunes. El determinante adquiere la forma:

$$D_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1) \cdots (a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1) \cdots (a_n-a_1)\, D_{n-1}$$

Utilizando la hipótesis inductiva, obtenemos en definitiva:

$$D_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1) \prod_{2\leq j<i\leq n} (a_i - a_j)$$

$$\therefore\ D_n = \prod_{1\leq j<i\leq n} (a_i - a_j) \qquad (6)$$

Nota. El proceso que permite expresar un determinante dado, transformándolo mediante operaciones elementales por filas o columnas a un determinante del mismo tipo, pero de orden más inferior, se conoce con el nombre de *correlación recurrente*.

EJEMPLO 22. Descomponer en factores: $D(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{vmatrix}$

Solución. Según la fórmula del determinante de Vandermonde:

$$D_5 = \prod_{1\leq j<i\leq 5} (a_i - a_j)$$

Para determinar el desarrollo de los factores $(a_i - a_j)$ observemos que cuando $j=1 \to i=2,3,4,5$: $j=2 \to i=3,4,5$; $j=3 \to i=4,5$

$$D_5 = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_5-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_5-a_2)(a_4-a_3)(a_5-a_3)(a_5-a_4)$$

Si en este desarrollo hacemos: $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, $a_4=d$, $a_5=e$ obtenemos:

$$D(A) = (b-a)(c-a)(d-a)(e-a)(c-b)(d-b)(e-b)(d-c)(e-c)(e-d)$$

EJEMPLO 23. Sea la matriz $A\epsilon K^n$, $a\neq b$, calcular el D(A) si:

$$A = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 & a+b \end{pmatrix}$$

Solución. Haciendo uso del método de las correlaciones recurrentes se tiene:

Para $n=2 \to D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2-ab = a^2+ab+b^2 = \dfrac{a^3-b^3}{a-b}$

Supongamos que para los determinantes de orden (n-1), esta afirmación es verdadera, esto es:

$$D_{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b} \qquad \text{(Hióptesis Inductiva)}$$

Entonces, desarrollando el D(A) por los cofactores de la primera columna se tiene:

$$D(A) = (a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis inductiva para el 1er determinante y desarrollando el 2do determinante por los cofactores de la primera fila se tiene:

$$D(A) = (a+b)\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right) - ab\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & ab \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-2}$$

Nuevamente, haciendo uso de la hipótesis inductiva obtenemos:

$$D(A) = (a+b)\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right) - ab\left(\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\right) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

EJEMPLO 24. Si $A=\begin{pmatrix} 2Cosx & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 1 & 2Cosx & 1 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & 2Cosx & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & 2Cosx \end{pmatrix}_n$,

calcular el determinante de A.

Solución. Por el método de las correlaciones recurrentes:

$$\text{Para } n=2 \rightarrow D_2 = \begin{vmatrix} 2Cosx & 1 \\ 1 & 2Cosx \end{vmatrix} = 4Cos^2x-1$$

Pero, sabemos que: $Sen3x = Senx(4Cos^2x-1) \rightarrow 4Cos^2x-1 = \frac{Sen3x}{Senx}$

$$\therefore D_2 = \frac{Sen3x}{Senx}$$

Supongamos que para un determinante de orden n-1 esta afirmación es verdadera, esto es: $D_{n-1} = \frac{Sennx}{Senx}$ (Hipótesis inductiva)

Desarrollando el D(A) por los cofactores de la primera columna se tiene:

$$D(A) = 2\text{Cosx}\begin{vmatrix} 2\text{Cosx} & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & 2\text{Cosx} & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \;\cdots\; 1 & 2\text{Cosx} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & 2\text{Cosx} & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 2\text{Cosx} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\; 1 & 2\text{Cosx} \end{vmatrix}_{n-1}$$

Haciendo uso de la hipótesis inductiva en el 1er determinante y desarrollando el 2do determinante por los cofactores de la primera fila, obtenemos:

$$D(A) = 2\text{Cosx}\left(\frac{\text{Sennx}}{\text{Senx}}\right) - \begin{vmatrix} 2\text{Cosx} & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & 2\text{Cosx} & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 2\text{Cosx} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\; 1 & 2\text{Cosx} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= 2\text{Cosx}\left(\frac{\text{Sennx}}{\text{Senx}}\right) - \frac{\text{Sen}(n-1)x}{\text{Senx}} = \frac{2\text{SennxCosx} - \text{Sen}(n-1)x}{\text{Senx}}$$

Recordando que: Sen(a+b) + Sen(a-b) = 2SenaCosb se tiene:

$$D(A) = \frac{\text{Sen}(n+1)x + \text{Sen}(n-1)x - \text{Sen}(n-1)x}{\text{Senx}} = \frac{\text{Sen}(n+1)x}{\text{Senx}}$$

EJERCICIOS

1. Hallar los valores de k para los cuales el determinante de la matriz dada sea cero.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ k & k+2 & k-2 \\ 4 & k & 8 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -2 & k-3 & -k \\ 1 & 1 & 2 \\ k-1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$

Resp. a) {-4/3, 3} b) {3/2, 4}

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 17-3x & 26 & 25 \\ 11-4x & 34 & 33 \\ 8-2x & 22 & 21 \end{vmatrix} = 24$ c) $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2x+3 \\ x-3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & x & 5 & 6 \\ -2 & 3 & x & -5 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ -x & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

Resp. a) {18} b) {-3, 2, 4} c) {2, 5/2} d) {-10, -3}

Calcular los determinantes:

3. $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 12 & 27 & 3 & 16 \\ 24 & 23 & 2 & 12 \\ 48 & 36 & 4 & 21 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 13 & 2 & 3 \\ 16 & 39 & 3 & 10 \\ 8 & 26 & 10 & 28 \\ 12 & 52 & 15 & 26 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -6 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 60 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

Resp. 3) 0 4) 6 5) 704 6) 208 7) 1
8) 1 9) 665 10) 394 11) 5 12) 100

Calcular los determinantes:

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1-i & -1 \\ 1-i & 0 & 1+i \\ 1 & -1-i & -i \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 1+2i \\ 1+i & -1+2i & 2i \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & i & 6i \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 0 & 2+i & -1 \\ 2-i & 0 & 2-i \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix}$

Resp. 13) 2-2i 14) 6 15) i 16) 4-2i

Calcúlese los determinantes:

17. $\begin{vmatrix} \text{Cosx} & \text{SenxCosy} & \text{SenxSeny} \\ -\text{Senx} & \text{CosxCosy} & \text{CosxSeny} \\ 0 & -\text{Senx} & \text{Cosy} \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} \text{Sen}^2 a & \text{Cos}2a & \text{Cos}^2 a \\ \text{Sen}^2 b & \text{Cos}2b & \text{Cos}^2 b \\ \text{Sen}^2 c & \text{Cos}2c & \text{Cos}^2 c \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} \text{Sena} & \text{Cosa} & \text{Sen}(a+d) \\ \text{Senb} & \text{Cosb} & \text{Sen}(b+d) \\ \text{Senc} & \text{Cosc} & \text{Sen}(c+d) \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} \text{Cos}(a-b) & \text{Cos}(b-c) & \text{Cos}(c-a) \\ \text{Cos}(a+b) & \text{Cos}(b+c) & \text{Cos}(c+a) \\ \text{Sen}(a+b) & \text{Sen}(b+c) & \text{Sen}(c+a) \end{vmatrix}$

Resp. 17) 1 18) 0 19) 0 20) Sen(c-a)Sen(c-b)Sen(a-b)

Calcúlese los determinantes:

21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & b & b & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$

Resp. 21) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ 22) x^2z^2 23) $-2(x^3+y^3)$
24) abc 25) $-3(x^2-1)(x^2-4)$ 26) $(af-be+cd)^2$
27) $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 28) $(a+b)(a-b)^3$

29. Determinar bajo que condición la siguiente ecuación es válida.

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{Cos}x & \text{Cos}y \\ \text{Cos}x & 1 & \text{Cos}x \\ \text{Cos}y & \text{Cos}x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \text{Cos}x & \text{Cos}y \\ \text{Cos}x & 0 & \text{Cos}z \\ \text{Cos}y & \text{Cos}x & 0 \end{vmatrix}$$

Rp. $\text{Cos}^2x+\text{Cos}^2y+\text{Cos}^2z=1$

30. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} \text{Senx}\text{Cosy} & -a\text{Senx}\text{Seny} & a\text{Cosx}\text{Cosy} \\ \text{Senx}\text{Seny} & a\text{Senx}\text{Cosy} & a\text{Cosx}\text{Seny} \\ \text{Cosx} & 0 & -a\text{Senx} \end{pmatrix}$.

Si $D(A)=k\text{Senx}$, hallar el valor de k. Rp. $k=-a^2$

31. Sea $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$. Hallar $a\in R$ tal que $f(a)=0$.
Rp. $a=1/2$

- Demostrar las siguientes igualdades:

32. $\begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

33. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$

34. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)x + abc$

35. $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(a+c)(b+c)$

36. $\begin{vmatrix} bc-a^2 & ca-b^2 & ab-c^2 \\ -bc+ca+ab & bc-ca+ab & bc+ca-ab \\ (a+b)(a+c) & (b+c)(b+a) & (c+a)(c+b) \end{vmatrix} = 3(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(ab+ac+bc)$

Calcular los determinantes de orden n por el método de las correlaciones recurrentes:

37. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} \cos x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & & 1+a_n \end{vmatrix}$

Resp. 37) $-a_1a_2\dots a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$ 38) $n+1$

39) $\cos nx$ 40) $a_1a_2\dots a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$

Calcular los determinantes:

41. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

42. $\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$

Resp. 41) a^4 42) $(a^2+b^2+c^2)(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$

3.7 OTRAS APLICACIONES Y PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

3.7.1 REGLA DE SARRUS

Un método práctico para evaluar determinantes de tercer orden, es la *Regla de Sarrus*, que consiste en repetir las dos primeras columnas y escribirlas en el mismo orden a continuación de la tercera columna. El determinante se calcula sumando todos los productos de las componentes que están en las flechas que apuntan hacia la derecha y restándoles todos los productos de las componentes que están en las flechas que apuntan hacia la izquierda.

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \qquad (7)$$

$$(-) \quad (-) \quad (-) \qquad (+) \quad (+) \quad (+)$$

$$D(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

EJEMPLO 1. Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

Solución. Disponemos el D(A) como indica el esquema (7):

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

Luego: $D(A) = (1)(3)(11) + (2)(9)(4) + (10)(2)(5) - (10)(3)(4) - (1)(9)(5) - (2)(2)(11)$

$= 33 + 72 + 100 - 120 - 45 - 44$

$= -4$

EJEMPLO 2. Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{pmatrix}$

Solución. $D(A) = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ y & x+y \\ x+y & x \end{matrix}$

$$D(A) = xy(x+y) + xy(x+y) + xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3$$
$$= 3xy(x+y) - [x^3+3xy(x+y)+y^3] - (x^3+y^3)$$
$$= -2(x^3+y^3)$$

3.7.2 CALCULO DE DETERMINANTES MEDIANTE LA REDUCCION A LA FORMA ESCALONADA

El cálculo de determinantes de ciertas matrices se puede efectuar haciendo uso de la matriz escalonada, para lo cual se tiene en consideración la siguiente propiedad:

PROPIEDAD 5. Si A es una matriz triangular (superior o inferior) de orden n, entonces el D(A) es igual al producto de las componentes que pertenecen a la diagonal principal, es decir, si:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces: $D(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (8)

La idea básica de este método consiste en aplicar operaciones elementales en las filas de la matriz original A y transformarla en una matriz B que tenga la forma escalonada.
Puesto que la forma escalonada de una matriz cuadrada es triangular superior o inferior, el D(A)=D(B) se puede calcular aplicando la propiedad establecida anteriormente.

EJEMPLO 3. Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución. Factorizando 1/2 de la 1ra y 2da fila y 1/3 de la 3ra y 4ta filas, se tiene:

$$D(A) = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3})\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando la propiedad 4c intercambiamos la 1ra y 4ta columnas.

$$D(A) = (\tfrac{1}{36})(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} = -\frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Intercambiando la 2da y 3ra filas se tiene:

$$D(A) = -\frac{1}{36}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3F_2+F_4} = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow{-F_3+F_4} = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

El determinante de la matriz A tiene la forma escalonada, luego según la propiedad 5:

$$D(A) = \frac{1}{36}(1)(1)(-2)(-3) = \frac{1}{6}$$

EJEMPLO 4. Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots\cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots\cdots & n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$

Solución. Tomando la primera fila como línea pivot, sumamos ésta a todas las demás filas, y obtenemos:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

Es el determinante de una matriz triangular, por tanto:

$$D(A) = 1.2.3....n = n!$$

EJEMPLO 5. Sea $A=[a_{ij}]_n$ una matriz tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i\neq j \end{cases}$

Demostrar que $D(A)=(n-1)(-1)^{n-1}$.

Demostración. En efecto, construyamos la matriz según la definición dada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando la última fila como línea pivot le restamos las otras n-1 filas y resulta:

$$D(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2+F_n \\ \vdots \\ F_{n-1}+F_n}]{F_1+F_n} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

$$\therefore\ D(A) = (n-1)(-1)^{n-1}$$

EJEMPLO 6. Calcular $D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

Solución. Tomando como línea pivot la 1ra columna efectuamos:
$-2F_1+F_2,\ -3F_1+F_3,\ \ldots,\ -(n-1)F_1+F_{n-1},\ -nF_1+F_n$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & n-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \,..\, 0 & & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = 1.1.2.3\ldots(n-2)(n-1) = (n-1)!$$

EJEMPLO 7. Calcular $D(A) = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

Solución. Sumando a la 1ra columna las otras n-1 columnas resulta:

$$D(A) = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} \overset{*}{=} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & x & a & \dots & a \\ 1 & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

Restando la 1ra fila a todas las demás filas obtenemos:

$$D(A) = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

EJEMPLO 8. Evaluar: $D(A) = \begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+7h \\ -a & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots -a & a \end{vmatrix}$

Solución. Sumando a la 1ra columna las otras 7 columnas se tiene

$$D(A) = \begin{vmatrix} 8a+28h & a+h & a+2h & \dots & a+7h \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots -a & a \end{vmatrix}$$

Factorizando 8a+28h de la 1ra columna y desarrollando por los cofactores de esta columna obtenemos:

$$D(A) = 4(2a+7h) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \\ \xrightarrow{F_2+F_3} \\ \vdots \\ \xrightarrow{F_6+F_7} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = 4(2a+7h)a^7$$

EJEMPLO 9. Sean $z=\text{Cos}\alpha+i\text{Sen}\alpha$, $\omega=\text{Cos}(2\pi/n)+i\text{Sen}(2\pi/n)$. Hallar $\text{Re}(|A|)$, donde $A\in K^n$, $n=4k+1$ y

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^2 & \omega \\ z & 1 & \omega^n & \cdots & \omega^3 & \omega^2 \\ z^2 & x & 1 & \cdots & \omega^4 & \omega^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}$$

Solución. Efectuando las operaciones con las filas: $-zF_1+F_2$, $-zF_2+F_3$, ... , $-zF_{n-1}+F_n$, se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 1-z\omega^n & \omega^n-z\omega^{n-1} & \cdots & \omega^4-z\omega^3 & \omega^3-z\omega^2 & \omega^2-z\omega \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-z\omega^n & \omega^n-z\omega^{n-1} & \omega^{n-1}-z\omega^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-z\omega^n & \omega^n-z\omega^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-z\omega^n \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = (1-z\omega^n)^{n-1} \qquad (1)$$

Dado que: $\omega^n = (\text{Cos}\frac{2\pi}{n} + i\text{Sen}\frac{2\pi}{n})^n = \text{Cos}2\pi + i\text{Sen}2\pi = 1$

Además: $4k+1 = n \rightarrow 4k=n-1$

Luego, en (1): $D(A) = (1-z)^{4k} = (1-\text{Cos}\alpha-i\text{Sen}\alpha)^{4k}$

$$= (2\text{Sen}^2\tfrac{\alpha}{2} - 2i\text{Sen}\tfrac{\alpha}{2}\text{Cos}\tfrac{\alpha}{2})^{4k}$$

$$\rightarrow\ D(A) = [-2i\text{Sen}\tfrac{\alpha}{2}(\text{Cos}\tfrac{\alpha}{2} + i\text{Sen}\tfrac{\alpha}{2})]^{4k}$$

$$= (-2)^{4k}\text{Sen}^{4k}(\tfrac{\alpha}{2})(\text{Cos}2k\alpha + i\text{Sen}2k\alpha) \qquad (i^{4k}=1)$$

$$\therefore\ \text{Re}(|A|) = 16^k\text{Sen}^{4k}(\tfrac{\alpha}{2})\text{Cos}2k\alpha$$

EJEMPLO 10. Calcular: $D(A) = \begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ hx & hx & h & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \cdots & h \end{vmatrix}$

Solución. Efectuando las operaciones con las columnas:
$-xC_2+C_1$, $-xC_3+C_2$, ... , $-xC_{n+1}+C_n$, obtenemos:

$$D(A) = \begin{vmatrix} h+x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h+x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & h+x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & h \end{vmatrix}_{n+1}$$

Por tanto, según la propiedad 5: $D(A) = h(h+x)^n$

EJEMPLO 11. Calcular: $D(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

Solución. Efectuando las operaciones con las filas:
$-aF_2+F_1$, $-aF_3+F_2$, ... , $-aF_n+F_{n-1}$, obtenemos:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1-ax_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{11}-ax_{21} & 1-ax_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21}-ax_{31} & x_{22}-ax_{33} & 1-ax_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(A) = (1-ax_{11})(1-ax_{22})(1-ax_{33}) \cdots$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (1-ax_{ii})$$

EJEMPLO 12. Calcular: $D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}_n$

Solución. Multiplicando la 1ra fila y la 1ra columna por x se tiene:

$$D(A) = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ x & 0 & x & \cdots & x & x \\ x & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 0 & x \\ x & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}_n = \frac{x^n}{x^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$$

Sumando las n-1 filas a la 1ra fila obtenemos:

$$D(A) = x^{n-2}\begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$$

$$= (n-1)x^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$$

Efectuando las operaciones con las filas: F_2-F_1 , F_3-F_1 , ... , F_n-F_1 , obtenemos en definitiva:

$$D(A) = (n-1)x^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_n$$

$$\therefore\ D(A) = (n-1)x^{n-2}(-1)^{n-1}$$

EJERCICIOS

Aplicando la regla de Sarrus, comprobar que:

1. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 425$

2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix} = 20$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$

Calcular los determinantes de las siguientes matrices, reduciendo primero la matriz a una matriz triangular superior.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Rp. 2

6. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Rp. -128

7. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ Rp. -72

8. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ Rp. 275

Calcular los determinantes de n-ésimo orden por reducción a la forma triangular.

9. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$

Resp. 9. $2n+1$ 10. $-2(n-2)!$ 11. $b_1b_2b_3\ldots b_n$ 12. $(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

Calcular los determinantes:

13. $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \dots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 \dots & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 & \dots & a_1+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^2 & x^3 & x^4 & \dots & x \\ x & x^2 & x^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & & \alpha \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a \\ a+2h & a+3h & a+4h & \dots & a+h \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-2)h \end{vmatrix}$

Respuestas: 13. $\frac{1}{2}na^{n-1}[2a+(n-1)h]$ 14. $\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n]$ 15. 1

16. $-a_1a_2 \dots a_n(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n})$ 17. $\frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)^2}$

18. $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$ 19. $a_1a_2 \dots a_n(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n})$

20. $\frac{n+1}{1-x}+\frac{x^{n+1}-1}{(1-x)^2}$ 21. $(-1)^n2^{n-1}a_1a_2a_n(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_n})$

22. $(-1)^{n-1}x^{n-2}$ 23. $(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$ 24. $(x-1)^n$ 25. $(1-x^n)^{n-1}$

26. $(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab]$ 27. $(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}\frac{1}{2}[n^{n-1}(n+1)]$

28. $2x^3y(x-y)^6$ 29. $(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}(nh)^{n-1}[a+\frac{1}{2}(n-1)]$

3.7.3 PROPIEDADES MULTIPLICATIVAS

PROPIEDAD 6. DETERMINANTE DE UN PRODUCTO

Si A y B son matrices de orden n, y A es inversible, entonces:

$$D(AB) = D(A).D(B)$$

Esto es, el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

En efecto, la definición 2.2 establece que una matriz arbitraria A puede representarse por:

$$A = E_1E_2E_3 \; .... \; E_mB$$

donde E_i , $i=1,2,3, \; ... \; ,m$, son matrices elementales y B es una matriz triangular superior. También sabemos que si A es inversible entonces A es el producto de matrices elementales $E_1E_2... \; E_m$

Por tanto: $AB = E_1E_2E_3 \; .... \; E_mB$

entonces:
$$\begin{aligned} D(AB) &= D(E_1E_2E_3 \; ... \; E_mB) \\ &= D(E_1).D(E_2E_3.... \; E_mB) \\ &= D(E_1).D(E_2).D(E_3... \; E_mB) \end{aligned}$$

Por inducción se sigue que:

$$D(AB) = D(E_1).D(E_2).D(E_3) \; ..... \; D(E_m).D(B)$$

Pero: $D(E_1).D(E_2)....D(E_m) = D(E_1E_2E_3...E_m) = D(A)$

Combinando estas dos afirmaciones se tiene:

$$D(AB) = D(A).D(B)$$

siempre que A sea inversible.

EJEMPLO 1. Verificar que $D(AB) = D(A).D(B)$, cuando:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Se tiene: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \; D(AB) = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{vmatrix} 40 & 0 & 25 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 & 25 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -170 \qquad (1)$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(8-3) = 10$$

$$D(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{vmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 8-25 = -17$$

Luego, $D(A).D(B) = 10(-17) = -170 \qquad (2)$

Por tanto, de (1) y (2): $D(AB) = D(A).D(B)$

PROPIEDAD 7. Si $A\varepsilon K^n$, tal que $A=\begin{pmatrix} X & \theta \\ Y & Z \end{pmatrix}$ y donde X, Y, Z son submatrices cuadradas de A, entonces:

$$D(A) = D(X).D(Z)$$

EJEMPLO 2. Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{pmatrix}$

Solución. Por simple inspección, dos submatrices de A que satisfacen la propiedad 7 son:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad y \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 25 & 81 \end{pmatrix}$$

$$D(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow[-C_1+C_3]{-C_1+C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$D(Z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 25 & 81 \end{vmatrix} \xrightarrow[-C_1+C_3]{-C_1+C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 24 & 80 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 24 & 80 \end{vmatrix} = 128$$

En consecuencia, según la propiedad 7:

$$D(A) = (1)(128) = 128$$

EJEMPLO 3. Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{pmatrix}$, calcular el D(A).

Solución. En el determinante de A, haciendo uso de la propiedad 4c, intercambiamos la 3ra y 6ta columnas y luego la 3ra y 6ta filas, y obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & x_3 & x_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por simple inspección, dos submatrices cuadradas de A son:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2+x_1 & x_3+x_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

Si intercambiamos filas en el determinante de Z, obtenemos el determinante de X, por tanto:

$$D(A) = D(X).D(Z) = (x_2-x_1)^2(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2$$

PROPIEDAD 8. DETERMINANTE DE UNA TRANSPUESTA

Si A es una matriz cuadrada de orden n y A^t es su transpuesta, entonces:

$$D(A) = D(A^t)$$

En efecto, escribiendo la matriz A como producto de matrices elementales E_i, se tiene:

$$A = E_1E_2E_3 \ldots E_m$$

Entonces: $A^t = E_m^t \ldots . E_3^t E_2^t E_1^t$

Según la propiedad 6: $D(A) = D(E_1).D(E_2) \ldots D(E_m)$, y

$$D(A^t) = D(E_m^t) \ldots . D(E_2^t).D(E_1^t)$$

$$= D(E_1).D(E_2) \ldots . D(E_m)$$

$$\therefore D(A^t) = D(A)$$

EJEMPLO 4. Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$, calcular el D(A).

Solución. Efectuando el producto A^tA obtenemos:

$$A^tA = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

donde: $\lambda = a^2+b^2+c^2+d^2$

Entonces: $D(A^tA) = D(A^t).D(A) = \lambda^4$

Pero, según la propiedad 8: $D(A^t)=D(A) \rightarrow [D(A)]^2 = \lambda^4$

$$\therefore D(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

EJERCICIOS

Calcular el determinante de A multiplicado por el determinante de B.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Rp. 24

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Rp. 18

3. $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ Rp. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$

Calcular el cuadrado del determinante:

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ Rp. 256

5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}$ Rp. 78,400

Calcular el determinante de las matrices dadas:

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 12 & 16 & -2 \\ 8 & 1 & 17 & 18 & -5 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resp. 6. 210 7. $(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2)$ 8. $(be-cd)^2$ 9. 220

3.7.4 RANGO DE UNA MATRIZ

Supongamos que en la matriz A de orden m×n se han elegido arbitrariamente k filas y k columnas, esto es, k min(m,n). Sabemos que los elementos que se hallan en la intersección de las filas y columnas elegidas forman una submatriz cuadrada de orden k, cuyo determinante se denomina *menor* de orden k de la matriz A.
El orden máximo r de los menores distintos de cero de la matriz A se llama *rango* de ésta, y cualquier menor de orden r, distinto de cero, *menor básico*.
Para determinar el rango de una matriz A de orden m×n, supongamos que en esta matriz fué hallado un menor M_k, distinto de cero. Vamos a considerar sólo aquellos menores M_{k+1} que contienen en si (orlan) el menor M_k: si todos los menores citados son nulos, el rango de la matriz es igual a k. De lo contrario entre los menores que orlan a M_k se encontrará un menor no nulo de orden k+1 y todo el procedimiento se repite.

EJEMPLO 1. Si $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, determinar su rango.

Solución. Dado que el orden de la matriz es de 4x5, entonces: $\rho(A) \leq \min(4,5)$, es decir, $\rho(A) \leq 4$.

Fijemos un menor de 2do orden:

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4+6 = 2 \neq 0$$

y el menor de tercer orden:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 \neq 0$$

Vemos que M_3, que orla a M_2, es también diferente de cero. Sin embargo, los menores de cuarto orden que orlan a M_3 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

En consecuencia, el rango de la matriz es 3, y M_3 es el menor básico.

Observaciones.

(1) Si A es una matriz, no nula, de orden m×n, entonces: $0 < \rho(A) \leq \min(m,n)$

(2) Si A es una matriz cuadrada, no nula, de orden n, entonces: $0 < \rho(A) \leq n$

(3) Si A y B son matrices conformables respecto de la suma A+B, entonces: $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$

(4) Si A y B son matrices conformables respecto del producto AB, entonces: $\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$

EJEMPLO 2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & x & 5 & 6 \\ -2 & 3 & x & -5 \end{pmatrix}$, determinar x de modo que el rango de la matriz sea menor que 4.

Solución. Por definición, si $\rho(A) < 4 \rightarrow D(A) = 0$. Calculamos el determinante de A efectuando las operaciones: $-2C_1+C_2$, $-3C_1+C_3$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & x-6 & -4 & 6 \\ -2 & 7 & x+6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ x-6 & -4 & 6 \\ 7 & x+6 & -5 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & x-6 & -4 \\ -2 & 7 & x+6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x-6 & 8-2x & 5x-24 \\ 7 & x-8 & 30 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2x-9 & x-6 & 8-2x \\ 12 & 7 & x-8 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 8-2x & 5x-24 \\ x-8 & 30 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2x-9 & 8-2x \\ 12 & x-8 \end{vmatrix}$$

de donde: $D(A) = -2x^3+6x^2+20x-48$

Si $D(A)=0 \rightarrow x^3-3x^2-10x+24=0 \leftrightarrow (x-2)(x-4)(x+3)=0$

$\leftrightarrow x=2$ ó $x=4$ ó $x=-3$

EJEMPLO 3. Hallar para qué valores de t el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3t & 1 & 2 & t+1 \\ 5t & 5 & 5 & 2t \\ 7t & 2 & 3 & 3t \end{pmatrix}$$

a) es igual a 3

b) no es igual a 3

Solución. Como la matriz A es de orden 3x4, entonces existe $C_3^4C_3^3=4$ menores de orden 3 que se pueden obtener de dicha matriz. Estos son:

$$\begin{vmatrix} 3t & 1 & 2 \\ 5t & 5 & 5 \\ 7t & 2 & 3 \end{vmatrix} = -15t \qquad \begin{vmatrix} 3t & 2 & t+1 \\ 5t & 5 & 2t \\ 7t & 3 & 3t \end{vmatrix} = -25t$$

$$\begin{vmatrix} 3t & 1 & t+1 \\ 5t & 5 & 2t \\ 7t & 2 & 3t \end{vmatrix} = t(7t-25) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & t+1 \\ 5 & 5 & 2t \\ 2 & 3 & 3t \end{vmatrix} = -8t+5$$

Podemos observar que para t=0, los tres primeros determinantes son nulos, pero el cuarto determinante tiene un valor $M_3=5 \neq 0$.

Por tanto, a) $\rho(A)=3$, $\forall t\in R$

b) $\nexists t\in R$, tal que $\rho(A)<3$

EJEMPLO 4. Sea la matriz $A=[a_{ij}]$ de orden n, donde $a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si } i\neq j \\ x & \text{si } i=j \end{cases}$

Hallar los valores de x de modo que $1<\rho(A)<n$.

Solución. Según la definición, construimos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$$

Si $\rho(A)<n \rightarrow D(A)=0$. Calculamos el determinante de A sumando las n-1 filas a la primera y obtenemos:

$$D(A) = \begin{vmatrix} x+(n-1) & x+(n-1) & x+(n-1) & \cdots & & x+(n-1) \\ 1 & x & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$$

Por tanto, si $\rho(A)<n \rightarrow D(A)=0 \leftrightarrow x=1$ ó $x=1-n$

si $x=1 \rightarrow 1=\rho(A)<n$

si $x=1-n \rightarrow 1<\rho(A)<n$

EJEMPLO 5. Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ -x & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{pmatrix}$, para qué valores de x el rango de la matriz toma un valor máximo, y para qué valores de x el rango de la matriz toma un valor mínimo. Hallar los valores de dichos rangos.

Solución. Por definición sabemos que $1\leq\rho(A)\leq 4$. El rango de A tendrá un valor máximo: $\rho(A)=4$, si el $D(A)\neq 0$.

Hallemos el D(A) efectuando las operaciones:

$-2F_2+F_1$, xF_2+F_3 , $-2F_2+F_4$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & x+6 & 8-x & 1-4x \\ 0 & 0 & 4 & x+8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 7 & 9 \\ x+6 & 8-x & 1-4x \\ 0 & 4 & x+8 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la 1ra columna se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 8-x & 1-4x \\ 4 & x+8 \end{vmatrix} + (x+6)\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 4 & x+8 \end{vmatrix}$$

de donde: $D(A) = 6(x^2+13x+30) = 6(x+3)(x+10)$

Si $D(A) \neq 0 \rightarrow x+3 \neq 0$ ó $x+10 \neq 0$

$\rightarrow x \neq -3$ ó $x \neq -10$

Esto es, el rango de A tendrá un valor máximo si $x \in R-\{-3,-10\}$

Cuando el $D(A)=0 \rightarrow \rho(A)<4$, es decir, si $x=-3$ y $x=-10$, el rango de A es menor que 4.

Hallemos el rango de A por transformaciones elementales para $x=-3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1^4(-2)]{F_1^2(-2),\ F_1^3(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2^3(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 32 & 40 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3^4(-1)]{F_3(1/8)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Luego, si $x=-3 \rightarrow \rho(E) = \rho(A) = 3$

De igual manera, para $x=-10$, $\rho(A)=3$. En consecuencia, el rango mínimo es 3 cuando $x=-3$ y $x=-10$.

EJERCICIOS

Hallar el rango de la matriz

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2 & 5\\5 & -3 & 2 & 3 & 4\\1 & -3 & -5 & 0 & -7\\7 & -5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$ 4. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 1 & 0\\2 & 1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Resp. 1) 2 2) 3 3) 3 4) 3

A qué es igual el rango de la matriz A para diferentes valores de λ?

5. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\\lambda & 4 & 10 & 1\\1 & 7 & 17 & 3\\2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ 6. $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\2 & -1 & \lambda & 5\\1 & 10 & -6 & \lambda\end{pmatrix}$

Resp. 5) $\rho(A)=2$ si $\lambda=0$ y $\rho(A)=3$, si $\lambda\neq 0$. 6) $\rho(A)=3$, $\forall\lambda\in R$

7. Dada la matriz $A=[a_{ij}]$ de orden n, tal que $a_{ij}=\begin{cases}n-1, & \text{si } i=j\\ 1, & \text{si } i\neq j\end{cases}$

Qué valor debe tener n para que el rango de A sea igual a su orden. Rp. $n>3$

8. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & x & x & x\\x & 3 & x & x\\x & x & 4 & x\\x & x & x & x\end{pmatrix}$. Determinar el valor de x, de modo que el rango de la matriz sea a) Máximo , b) Mínimo.

Rp. a) $x\in R-\{0,2,3\}$ b) $x=0$, $x=2$, $x=3$

PROPOSICION 3.1 Un matriz cuadrada es inversible si y sólo si su determinante es diferente de cero.

Demostración. ($\rightarrow$) Primeramente demostraremos que una matriz A es inversible $\rightarrow D(A)\neq 0$

En efecto, supongamos que A es inversible, esto es: $AA^{-1}=I$

entonces: $D(AA^{-1}) = D(I)$

$D(A).D(A^{-1}) = 1$ (Propiedad 6)

Por tanto, $D(A) \neq 0$

($\leftarrow$) Demostraremos que si $D(A)\neq 0$, entonces A es inversible

En efecto, supongamos que $D(A) \neq 0$.

Demostraremos que A es equivalente por filas a I (es inversible).

Recordemos que si $B \overset{f}{=} A$, existe una sucesión finita: E_1, E_2,

E_3, ... ,E_m de matrices elementales tales que:

$$A = E_1E_2E_3 \ .... \ E_mB$$

Por lo que: $D(A) = D(E_1).D(E_2).D(E_3)... D(E_m).D(B)$

De la hipótesis. $D(A)\neq 0$, se sigue que $D(B)\neq 0$ y si $D(B)\neq 0$ si y sólo si B es inversible. Puesto que A es inversible si y sólo si B lo es, por tanto, se ha demostrado la proposición.

Corolario. Si A es inversible, entonces: $D(A^{-1}) = \dfrac{1}{D(A)}$

3.7.5 ADJUNTA DE UNA MATRIZ

Si $A=[a_{ij}]$ es una matriz de orden n×n, sea

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}D(A_{ij})$$

el cofactor i,j de A, entonces la matriz $C=[c_{ij}]$ se llama *matriz de cofactores de* A. Es decir:

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{m2} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

La transpuesta C^t de la matriz de cofactores de A se llama la *Adjunta de* A . Esta matriz se denota por adj(A), y si $A=[a_{ij}]$, entonces:

$$\text{adj}(A) = [(-1)^{i+j}D(A_{ji})] \qquad (9)$$

PROPIEDADES. Si A, B, I son matrices no nulas, de orden n, y λ es un escalar, entonces:

AD_1: $\text{adj}(I_n) = I_n$

AD_2: $\text{adj}(A^t) = [\text{adj}(A)]^t$

AD_3: $\text{adj}(A^n) = [\text{adj}(A)]^n$

AD_4: $\text{adj}(AB) = [\text{adj}(B)][\text{adj}(A)]$

AD_5: $\operatorname{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\operatorname{adj}(A)$

AD_6: $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$

AD_7: $\operatorname{adj}(A^{-1}) = [\operatorname{adj}(A)]^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

EJEMPLO 1. Demostrar que si A e I son matrices de orden n, entonces: $A.\operatorname{adj}(A) = |A|I$

Demostración. En efecto, consideremos el producto:

$$A.\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{jk} & \dots & A_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{jn} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

El elemento que se encuentra en la i-ésima fila y la j-ésima columna de $A.\operatorname{adj}(A)$ es:

$$a_{i1}A_j + a_{i2}A_j + \dots + a_{in}A_{jn} \qquad (1)$$

Si i=j, entonces (1) es el desarrollo por cofactores del D(A) a lo largo de la i-ésima fila de A (ver ecuación 5). Por tanto, si $i \neq j$, entonces los elementos y los cofactores provienen de diferentes filas de A, de donde, el valor de (1) es cero.
En consecuencia:

$$A.\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A|I$$

Si en esta igualdad efectuamos el producto indicado en el segundo miembro, obtenemos: $A.\operatorname{adj}(A) = |A|^n$
Tomando determinantes en ambos extremos resulta:

$$|A.\operatorname{adj}(A)| = |A|^n \rightarrow |A|.|\operatorname{adj}(A)| = |A|^n$$

$$\therefore\ |\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1} \qquad (AD_6)$$

EJEMPLO 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, calcular la adj(A).

Solución. Primeramente calculamos la matriz de cofactores:

$$C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 6 & -4\end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz adjunta de A es: $\mathrm{adj}(A)=C^t= \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -3 & 0 & 6\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$

Examinemos el producto A.adj(A) de este ejemplo:

$$A.\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -3 & 0 & 6\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} = -3I$$

Hallamos ahora el D(A):

$$D(A) = \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 2(2-1)-3(4-1)+4(2-1) = -3$$

De estos doa resultados podemos escribir:

$$A.\mathrm{adj}(A) = |A|I$$

Por lo que, es posible establecer una fórmula para calcular la inversa de una matriz inversible.

3.7.6 INVERSA DE UNA MATRIZ

Consideremos primero el caso siguiente.

Sea una matriz de 2do orden: $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, cuyo $D(A)\neq 0$

Se desea hallar una inversa para A, esto es, una matriz de orden 2×2 tal como:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} \qquad (1)$$

de manera que: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

o sea:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los productos escalares de los vectores fila por los vectores columna nos permite establecer las ecuaciones siguientes:

$$a_{11}x + a_{12}z = 1 \quad (2) \qquad a_{11}y + a_{12}w = 0 \quad (4)$$

$$a_{21}x \quad a_{22}z = 0 \quad (3) \qquad a_{21}y + a_{22}w = 1 \quad (5)$$

Resolviendo (2) y (3) obtenemos:

$$x = \frac{a_{22}}{D(A)} \quad , \quad z = -\frac{a_{21}}{D(A)}$$

La resolución de (4) y (5) da por resultado:

$$y = -\frac{a_{12}}{D(A)} \quad , \quad w = \frac{a_{11}}{D(A)}$$

Sustituyendo en (1), resulta que: $A^{-1} = \dfrac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

lo que nos permite enunciar la siguiente

PROPOSICION 3.2 La matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tiene una inversa A^{-1} si y sólo si el $D(A)\neq 0$. Además, si $D(A)\neq 0$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Obsérvese que para calcular la inversa de una matriz de 2do orden, basta hallar el D(A), luego intercambiar los elementos de la diagonal principal y cambiar de signo a los elementos de la otra diagonal.

EJEMPLO 3. Determinar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

Solución. En primer lugar calculamos: $D(A)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 20-18 = 2$

Como $D(A)\neq 0$, según la fórmula (10):

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1.5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ y la ecuación $2X = 3[A-2(B+C)-X]+A$. Hallar X^{-1}

Solución. Despejamos X de la ecuación y obtenemos:

$5X = 4A-6B-6C$

$$5X = \begin{pmatrix}4 & 32\\ 28 & 12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12 & -6\\ -30 & -18\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6 & -36\\ 12 & -24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & -10\\ 10 & -30\end{pmatrix}$$

de donde: $X = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix} \rightarrow D(A) = 2(-6)-2(-2) = -8$

Luego, según (10): $X^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

EJEMPLO 5. Resolver la ecuación: $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

Solución. Sea $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix} \rightarrow D(A) = 3(-2)-5(-1) = -1$

Según (10) se tiene: $A^{-1} = -\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

Multiplicando cada miembro de la ecuación por A^{-1} se tiene:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad (\text{Pero: } A^{-1}A = I)$$

$$\rightarrow IX = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ -4 & -2\end{pmatrix} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ -4 & -2\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6. Si $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 9 & 8\end{pmatrix}$, hallar las matrices C y D, tales que: AC=B y DA=B.

Solución. Si $AC = B \rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}C = \begin{pmatrix}7 & 6\\ 9 & 8\end{pmatrix}$ (1)

$$D(A) = \begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix} = 6-2 = 4 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Multiplicando por A^{-1} (izquierda de B), la ecuación (1) se tiene

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 6\\ 9 & 8\end{pmatrix} \rightarrow C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}15 & 13\\ 16 & 14\end{pmatrix}$$

Si $DA=B \rightarrow D\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 6\\ 9 & 8\end{pmatrix}$ (2)

Multiplicando (2) por A^{-1} (derecha de B), obtenemos:

$$D\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 6\\ 9 & 8\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}, \text{ de donde: } D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}33 & 19\\ 43 & 25\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 7. Resolver el sistema: $X + \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}Y = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

$$X + \begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}Y = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 4\end{pmatrix}$$

Solución. Restando ambas ecuaciones resulta: $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}Y = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $D(A)=-2$, luego: $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Multiplicando la ecuación anterior por A^{-1} (izquierda de A), se tiene: $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}Y = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$, de donde: $Y=\begin{pmatrix}1 & -9\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos: $X=\begin{pmatrix}1 & 24\\ 2 & 10\end{pmatrix}$

EJEMPLO 8. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Hallar λ tal que $D(A-\lambda I)=0$

b) Hallar la matriz X_{2x1} tal que $AX=\lambda X$

c) Hallar B^{-1}, siendo $B=|X_1 \ \ X_2|$ y X es la matriz de la parte b)

Solución. a) $A-\lambda I = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$

$$\rightarrow D(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-2 = \lambda^2-3\lambda$$

Si $D(A-\lambda I)=0 \leftrightarrow \lambda_1=0$ ó $\lambda_2=3$

b) $AX = \lambda_1 X \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x+2y\\ x+2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

de donde: $x=-2y \rightarrow X_1 = \begin{pmatrix}-2y\\ y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

$AX = \lambda_2 X \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x+2y\\ x+2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x\\ 3y\end{pmatrix}$

de donde: $\left.\begin{array}{l}x+2y = 3x \rightarrow x=y\\ x+2y = 3y \rightarrow x=y\end{array}\right\} \therefore X_2 = \begin{pmatrix}y\\ y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

c) $B = y\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow D(B) =(-2-1)y = -3y$

$$\therefore\ B^{-1} = -\frac{y}{3y}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

EJEMPLO 9. Sea $P=\begin{bmatrix}Sen^2\theta & Cos^2\theta\\ Cos^2\theta & Sen^2\theta\end{bmatrix}$. Considerar que: $P=NAN^{-1}$ donde:

i) $A=[a_{ij}]$, de segundo orden, tal que: $a_{ij} = \begin{cases}0 & si\ i\neq j\\ \lambda_i & si\ i=j\end{cases}$
con λ_1, λ_2 raíces de la ecuación $D(\lambda I-P)=0$

ii) N es una matriz de segundo orden, cuyas columnas llamadas $c_j \neq \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ cumplen la ecuación matricial: $PC_j=\lambda_j C_j$, $j=1,2$

a) Hallar P^k , $k\in Z^+$

b) Demostrar que $Tr(P^{2k}) = 1+Cos^{2k}2\theta$

c) Hallar $P^6(\pi/8)$

Solución. Por definición, sea la matriz: $A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$

$$\lambda I-P = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}Sen^2\theta & Cos^2\theta\\ Cos^2\theta & Sen^2\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda-Sen^2\theta & -Cos^2\theta\\ -Cos^2\theta & \lambda-Sen^2\theta\end{bmatrix}$$

Si $D(\lambda I-P)=0 \rightarrow (\lambda-Sen^2\theta)^2 - Cos^4\theta = 0$

de donde: $\lambda^2-2\lambda Sen^2\theta+Sen^4\theta-Cos^4\theta=0 \rightarrow \lambda=Sen^2\theta\pm\sqrt{Sen^4\theta+Cos^4\theta-Sen^4\theta}$

$\rightarrow \lambda=Sen^2\theta\pm Cos^2\theta \leftrightarrow \lambda_1=1$ ó $\lambda_2=-Cos2\theta \rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -Cos2\theta\end{bmatrix}$

ii) Sea $N=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$ cuyas columnas $C_j \neq \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Si $PC_1 = \lambda_1 C_1 \rightarrow \begin{bmatrix}Sen^2\theta & Cos^2\theta\\ Cos^2\theta & Sen^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

de donde: $aSen^2\theta+bCos^2\theta = a \rightarrow bCos^2\theta = a(1-Sen^2\theta) \rightarrow b=a$
$aCos^2\theta+bSen^2\theta = b \rightarrow aCos^2\theta = b(1-Sen^2\theta) \rightarrow a=b$

Entonces: $C_1 = \begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

Si $PC_2 = \lambda_2 C_2 \rightarrow \begin{bmatrix}Sen^2\theta & Cos^2\theta\\ Cos^2\theta & Sen^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = -Cos2\theta\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$

$\rightarrow cSen^2\theta+dCos^2\theta = -cCos2\theta = -c(Cos^2\theta-Sen^2\theta) = cSen^2\theta-cCos^2\theta$

$$\rightarrow d = -c \quad \leftrightarrow \quad c = -d$$

$$c\text{Cos}^2\theta + d\text{Sen}^2\theta = -d\text{Cos}2\theta = -d(\text{Cos}^2\theta - \text{Sen}^2\theta) = -d\text{Cos}^2\theta + d\text{Sen}^2\theta$$

$$\rightarrow c = -d$$

Luego: $C_2 = \begin{pmatrix} -d \\ d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \; N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Si $P = NAN^{-1} \rightarrow P^2 = (NAN^{-1})(NAN^{-1}) = NA(N^{-1}N)AN^{-1}$

$$= NA(I)AN^{-1} = NA^2N^{-1}$$

$$P^3 = PP^2 = (NAN^{-1})(NA^2N^{-1}) = NA(N^{-1}N)A^2N^{-1}$$

$$= NA(I)A^2N^{-1} = NA^3N^{-1}$$

Por simple inspección: $P^k = NA^kN^{-1}$ (1)

Calculamos A^k partiendo de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\text{Cos}2\theta \end{pmatrix}$

$$\rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\text{Cos}2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\text{Cos}2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{Cos}^2 2\theta \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\text{Cos}2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{Cos}^2 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\text{Cos}^3 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \; A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k\text{Cos}^k 2\theta \end{pmatrix}$$

Luego, en (1): $P^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k\text{Cos}^k 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^{k+1}\text{Cos}^k 2 \\ 1 & (-1)^{k+1}\text{Cos}^k 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde: $P^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^k\text{Cos}^k 2\theta & 1-(-1)^k\text{Cos}^k 2\theta \\ 1-(-1)^k\text{Cos}^k 2\theta & 1+(-1)^k\text{Cos}^k 2\theta \end{pmatrix}$

b) $P^{2k} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^{2k}\text{Cos}^{2k} 2\theta & 1-(-1)^{2k}\text{Cos}^{2k} 2\theta \\ 1-(-1)^{2k}\text{Cos}^{2k} 2\theta & 1+(-1)^{2k}\text{Cos}^{2k} 2\theta \end{pmatrix}$

Luego: $\text{Tr}(P^{2k}) = \frac{1}{2}[1+(-1)^{2k}\text{Cos}^{2k}2\theta + 1+(-1)^{2k}\text{Cos}^{2k}2\theta]$

$$= \frac{1}{2}[2 + 2(-1)^{2k}\text{Cos}^{2k}2\theta] = 1+(-1)^{2k}\text{Cos}^{2k}2\theta$$

$$\therefore\ Tr(P^{2k}) = 1+Cos^{2k}2$$

c) $P^6(\pi/8) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+Cos^6(\pi/4) & 1-Cos^6(\pi/4) \\ 1-Cos^6(\pi/4) & 1+Cos^6(\pi/4) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9/8 & 7/8 \\ 7/8 & 9/8 \end{pmatrix}$

$$\therefore\ P^6(\pi/8) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Si B es el adjunto clásico de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar el valor de la suma: $S=B_{32}+3B_{23}+B_{42}$ Rp. $S=4$

2. Si B es el adjunto clásico de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, hallar el valor de $E = \frac{B_{23} + B_{41}}{B_{43} - B_{31}}$. Rp. $E=5$

3. Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de orden n, tal que $D(A)=0$. Demostrar que $A.adj(A)=\theta$.

4. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, hallar A^{-2}. Rp. $\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, si $AX=A^t$, hallar $\frac{2}{3}X^t$. R. $\begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 \\ 2 & -2/3 \end{pmatrix}$

6. Hallar la suma de los menores valores que puede tomar x, si se sabe que la matriz $A=\begin{pmatrix} 2Cotgx & -Cosx \\ Cosecx & Senx \end{pmatrix}$ no es inversible. Rp. $5\pi/3$

7. Si $ABXC=D$, donde A, B, C, D y X son matrices cuadradas del mismo orden, despejar la matriz X. Rp. $X=B^{-1}A^{-1}DC^{-1}$

8. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; resolver las ecuaciones:

a) $AXB = C$ b) $BXC = A^t$

Rp. $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 37 & -51 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 13 & -28 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$

9. Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & -14 \end{pmatrix}$; hallar la matri

$E=adj(A)-adj(B)-C^t$. Rp. E=2I

10. Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Rp. $X=\begin{pmatrix} -3 & 36 \\ 4 & -29 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

11. Resolver el sistema:

$$2X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}Y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}X + 3Y = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Rp. $X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Resolver las ecuaciones matriciales siguientes:

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

13. $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

14. $X\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

PROPOSICION 3.3 Si A es una matriz inversible, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) \qquad (11)$$

Demostración. En efecto, anteriormente, en el Ejemplo 1 de la sección 3.7.5, habíamos demostrado que:

$$A.\text{adj}(A) = |A|.I$$

Dado que A es inversible, $|A| \neq 0$, entonces esta ecuación se puede escribir:

$$A\left(\frac{1}{|A|}\right)\text{adj}(A) = I$$

Multiplicando ambos miembros por A^{-1} se tiene:

$$A^{-1}A\left(\frac{1}{|A|}\right)\text{adj}(A) = A^{-1}I \rightarrow I\left(\frac{1}{|A|}\right)\text{adj}(A) = A^{-1}I$$

de donde:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$$

PROPIEDADES DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA A

Sean A, $B \in K^n$, matrices inversibles, esto es, $D(A) \neq 0$, $D(B) \neq 0$, y $\lambda \in R$, un escalar, entonces:

(1) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(4) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

(5) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$

(6) $(I_n)^{-1} = I_n$

(7) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

(8) $\text{adj}(A^{-1}) = [\text{adj}(A)]^{-1} = \frac{A}{|A|}$

Nota. Si $B = [b_{ij}] = A^{-1} \leftrightarrow b_{ij} = \frac{A_{ji}}{D(A)}$, siendo $A_{ji} = (-1)^{i+j}M_{ji}$

EJEMPLO 1. Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Solución. En primer lugar calculamos el determinante de A, desarrollando por los cofactores de la primera fila:

$$D(A) = 3(-3-5)-4(-2-3)+5(10-8) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Enseguida, calculamos la adjunta de A:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}3 & 1\\5 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}4 & 5\\5 & -4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 5\\3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 4\\3 & 5\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}4 & 5\\3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 5\\2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}-8 & 5 & 1\\29 & -18 & -3\\-11 & 7 & 1\end{bmatrix}^t$$

Luego, según la fórmula (11): $A^{-1} = \begin{bmatrix}-8 & 29 & -11\\5 & -18 & 7\\1 & 7 & 1\end{bmatrix}$

EJEMPLO 2. Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\\1 & 4 & 3\end{bmatrix}$. Si $AX=A^t$, hallar $2X^t$.

Solución. Calculamos el D(A) por los cofactores de la 1ra fila:
$D(A) = 1(9-16)-2(3-4)+3(4-3) = -2$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}3 & 4\\4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}-7 & 1 & 1\\6 & 0 & -2\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}^t$$

Haciendo uso de la fórmula (11): $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\1 & 0 & -1\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

Si $AX=A^t \rightarrow X=A^{-1}A^t \rightarrow X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\1 & 0 & -1\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 7 & 14\\-2 & -3 & -2\\0 & -1 & -4\end{bmatrix}$

$$\therefore\ 2X^t = \begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\-7 & 3 & 1\\-14 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

EJEMPLO 3. Si $A=\begin{bmatrix}1 & a+b & 0\\2 & 5 & a\\b & x & 3\end{bmatrix}$ es una matriz simétrica, hallar A^{-1}.

Solución. Si A es una matriz simétrica $\rightarrow A=A^t$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1 & a+b & 0\\2 & 5 & a\\b & x & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & b\\a+b & 5 & x\\0 & a & 3\end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases}b=0\\a+b=2 \rightarrow a=2\\x=a \rightarrow x=2\end{cases}$$

$$\rightarrow D(A) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 5 & 2\\0 & 2 & 3\end{vmatrix} = 1(15-4)-2(6-0) = -1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}5 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\0 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 5\\0 & 2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}2 & 0\\5 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}11 & -6 & 4\\-6 & 3 & -2\\4 & -2 & 1\end{pmatrix}^t$$

$$\therefore\ A^{-1} = -1\begin{pmatrix}11 & -6 & 4\\-6 & 3 & -2\\4 & -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11 & 6 & -4\\6 & -3 & 2\\-4 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4. Hallar, si existe, la inversa de $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\3 & 2 & 0 & 0\\1 & 1 & 3 & 4\\2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Solución. La matriz tiene la forma: $A=\begin{pmatrix}X & \theta\\Y & Z\end{pmatrix}$

$$\rightarrow D(A) = D(X).D(Z) = \begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{vmatrix} = (1)(1) = 1$$

Los elementos de la matriz de cofactores C son:

$A_{11}=2$, $A_{12}=-3$, $A_{13}=31$, $A_{14}=-23$
$A_{21}=-1$, $A_{22}=2$, $A_{23}=-19$, $A_{24}=14$
$A_{31}=0$, $A_{32}=0$, $A_{33}=3$, $A_{34}=-2$
$A_{41}=0$, $A_{42}=0$, $A_{43}=-4$, $A_{44}=3$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \begin{pmatrix}2 & -3 & 31 & -23\\-1 & 2 & -19 & 14\\0 & 0 & 3 & -2\\0 & 0 & -4 & 3\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\-3 & 2 & 0 & 0\\31 & -19 & 3 & -4\\-23 & 14 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5. Dadas las matrices A, $B\varepsilon K^n$, tales que $|A|\neq 0$ y $|B|\neq 0$, demostrar que:

a) $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B).\text{adj}(A)$ b) $\text{adj}(A^{-1}) = |\text{adj}(A)|^{-1}$

c) $|\text{adj}[\text{adj}(A)]| = |A|^{(n-1)^2}$

Demostración. a) En efecto, por definición: $\text{adj}(A) = |A|A^{-1}$

$$\rightarrow \text{adj}(AB) = |AB|(AB)^{-1}$$
$$= |A||B|(B^{-1}A^{-1}) \qquad \text{(Prop. 3)}$$

Como $|A|$ y $|B|$ son escalares, podemos escribir:

$$\text{adj}(AB) = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = \text{adj}(B).\text{adj}(A)$$

b) En efecto, por definición: $\text{adj}(A^{-1}) = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1}$

$$= |A|^{-1}(A^{-1})^{-1}$$

Según la propiedad 5: $\text{adj}(A^{-1}) = [|A|(A^{-1})]^{-1}$

$$= |\text{adj}(A)|^{-1}$$

c) En efecto, si: $\text{adj}(A) = |A|A^{-1}$

$\rightarrow \text{adj}[\text{adj}(A)] = |\text{adj}(A)|[\text{adj}(A)]^{-1}$

y por las propiedades 6 y 7 de la adjunta se tiene:

$$\text{adj}[\text{adj}(A)] = |A|^{n-1}\text{adj}(A^{-1}) = |A|^{n-1}(\frac{A}{|A|}) = |A|^{n-2}A$$

Luego, tomando determinantes en ambos extremos se tiene:

$$|\text{adj}[\text{adj}(A)]| = ||A|^{n-2}A| = |A|^{n(n-2)}|A| = |A|^{(n-1)^2}$$

EJEMPLO 7. Si A es una matriz de orden n tal que: $|A|\neq 0$, $A^3=-A$, $\lambda\varepsilon C-\{0\}$, demostrar que:

$$\lambda^{1-n}\text{adj}(\lambda A^4) = I$$

Demostración. En efecto, si $A^3=-A \rightarrow A^3A = -AA$

$$\rightarrow A^4 = -A^2 \qquad (1)$$

Como $|A|\neq 0$, la matriz A es inversible, luego:

$$A^3A^{-1} = -AA^{-1} \rightarrow A^2AA^{-1} = -I$$

$$\rightarrow A^2 = -I \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que: $A^4 = I$

Luego: $\text{adj}(\lambda A^4) = \text{adj}(\lambda I) = |\lambda I|(\lambda I)^{-1}$

$$= \lambda^n(\lambda^{-1}I^{-1}) = \lambda^{n-1}I$$

$$\therefore \lambda^{1-n}\text{adj}(\lambda A^4) = \lambda^{1-n}(\lambda^{n-1}I) = I$$

EJEMPLO 8. Si $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 5 & 1\\5 & 1 & 1\end{pmatrix}$, hallar la suma de los elementos de la tercera fila de su inversa.

Solución. El determinante de A por los cofactores de la primera fila es: $D(A) = 2(5-1)-3(1-5)+1(1-25) = -4$

Si B es la inversa de A, entonces:

$$S = b_{31}+b_{32}+b_{33} = \frac{A_{13}}{D(A)} + \frac{A_{23}}{D(A)} + \frac{A_{33}}{D(A)} = \frac{-24+13+7}{-4} = 1$$

EJEMPLO 9. Si $\text{adj}(A) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, hallar: a) La traza de A^{-1}

b) La matriz A. Es A única?

Solución. a) Por definición: $\text{adj}(A) = |A|A^{-1}$

Tomando determinantes a ambos extremos se tiene:

$$|\text{adj}(A)| = \big||A|A^{-1}\big| = |A|^3|A^{-1}| = |A|^2 \qquad (1)$$

$$|\text{adj}(A)| = (\tfrac{1}{4})^3\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} = \frac{1}{64}[1(16-9)-3(4-3)+3(3-4)] = \frac{1}{64}$$

Luego, en (1): $|A|^2 = \frac{1}{64} \rightarrow A = \pm 1/8 \rightarrow A^{-1} = \pm 2\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

$\therefore\ Tr(A^{-1}) = \pm 2(1+4+4) = \pm 18$

b) Para determinar A, aplicamos la propiedad:

$$(A^{-1})^{-1} = A \rightarrow A = \frac{1}{|A^{-1}|}\text{adj}(A^{-1}) = |A|\text{adj}(A^{-1})$$

Calculando la $\text{adj}(A^{-1})$ obtenemos finalmente:

$$A = \pm\frac{1}{8}(4)\begin{pmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Hay dos soluciones, por tanto A no es única.

3.7.7 MATRICES NO SINGULARES

Se dice que una matriz A es *no singular* si y sólo si el $D(A)\neq 0$, esto es, si admite una inversa.

Se dice que una matriz cuadrada A es *singular* si y sólo si el $D(A)=0$, o en su defecto, si no admite una inversa.

EJEMPLO 10. Si $A=\begin{pmatrix}2\text{Sen}2x & 3\\\text{Cos}2x & \text{Sen}2x\end{pmatrix}$, hallar todos los valores de x de modo que A sea singular.

Solución. Si A es una matriz singular $\rightarrow$ $D(A)=0$

$$\rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} 2Sen2x & 3 \\ Cos2x & Sen2x \end{vmatrix} = 2Sen^2 2x - 3Cos2x = 0$$

de donde: $2Cos^2 2x - 3Cos2x - 2 = 0 \leftrightarrow Cos2x = 1/2$ ó $Cos2x = -2$

Para la segunda posibilidad no existe solución, luego, si:

$$Cos2x = 1/2 \leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \leftrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \ k\epsilon N$$

EJEMPLO 11. Sean las matrices $AB=\begin{pmatrix} 7 & 23 & 25 \\ 5 & 16 & 16 \\ a-1 & 4a-3 & 3a-6 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Si A es una matriz singular, hallar el valor de a.

Solución. Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz singular de tercer orden, tal que $D(A)=0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 23 & 25 \\ 5 & 16 & 16 \\ a-1 & 4a-3 & 3a-6 \end{pmatrix}$$

Del producto escalar de la primera fila de A por las columnas de B, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= 7 \\ 3a_{11} + 4a_{12} + 3a_{13} &= 23 \\ 3a_{11} + 3a_{12} + 4a_{13} &= 25 \end{aligned}$$

Efectuando transformaciones elementales en la matriz aumentada del sistema, se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 23 \\ 3 & 3 & 4 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-3)]{F_1^2(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3^1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{12} = 2 \\ a_{13} = 4 \end{cases}$$

Del producto escalar de la 2da fila de A por las columnas de B, resulta:

$$\begin{aligned} a_{21} + a_{22} + a_{23} &= 5 \\ 3a_{21} + 4a_{22} + 3a_{23} &= 16 \\ 3a_{21} + 3a_{22} + 4a_{23} &= 16 \end{aligned}$$

Efectuando operaciones elementales en la matriz aumentada del

sistema se tiene:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&6\\3&4&3&16\\3&3&4&16\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1^3(-3)]{F_1^2(-3)}\begin{pmatrix}1&1&1&5\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3^1(-1)}\begin{pmatrix}1&1&0&4\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2^1(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a_{21}=3\\a_{22}=1\\a_{23}=1\end{cases}$$

Finalmente, del producto escalar de la 3ra fila de A por las columnas de B, resulta:

$$\begin{aligned}a_{31}+a_{32}+a_{33}&=a-1\\3a_{31}+4a_{32}+3a_{33}&=4a-3\\3a_{31}+3a_{32}+4a_{33}&=3a-6\end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&a-1\\3&4&3&4a-3\\3&3&4&3a-6\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1^3(-3)]{F_1^2(-3)}\begin{pmatrix}1&1&1&a-1\\0&1&0&a\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2^1(-1)}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&a\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3^1(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&a\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a_{31}=2\\a_{32}=a\\a_{33}=-3\end{cases}$$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&1&1\\2&a&-3\end{pmatrix}\rightarrow D(A)=1(-3-a)-2(-9-2)+4(3a-2)=11a+11$$

Dado que: $D(A)=0 \rightarrow 11a+11=0 \leftrightarrow a=-1$

EJEMPLO 12. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}x&b&1&1\\b&x&1&1\\1&1&x&b\\1&1&b&x\end{pmatrix}$, determinar,los valores de x de modo que la matriz A sea no singular.

Solución. Para que A sea no singular es necesario que $D(A)\neq 0$.

Calculamos el D(A) sumando las últimas filas a la 1ra:

$$D(A)=\begin{vmatrix}x+b+2&x+b+2&x+b+2&x+b+2\\b&x&1&1\\1&1&x&b\\1&1&b&x\end{vmatrix}=(x+b+2)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&x&1&1\\1&1&x&b\\1&1&b&x\end{vmatrix}\xrightarrow[-C_1+C_4]{-C_1+C_2,\ -C_1+C_3}$$

$$D(A) = (x+b+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & x-b & 1-b & 1-b \\ 1 & 0 & x-1 & 1-b \\ 1 & 0 & b-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+b+2)\begin{vmatrix} x-b & 1-b & 1-b \\ 0 & x-1 & b-1 \\ 0 & b-1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+b+2)(x-b)\begin{vmatrix} x-1 & b-1 \\ b-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+b+2)(x-b)\left[(x-1) - (b-1)^2\right]$$

de donde: $D(A) = (x+b+2)(x-b)^2(x+b-2)$

Por tanto, si $D(A) \neq 0 \rightarrow x \neq -b-2$, $x \neq b$, $x \neq 2-b$

EJERCICIOS

Por el método de la adjunta, hallar la inversa, si existe, para la matriz dada. Comprobar en cada caso que $AA^{-1}=I$.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Resp. 1. $\begin{pmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ 8. $\frac{1}{4}A$

4. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 18 \end{pmatrix}$ 5. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ 6. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolver las ecuaciones matriciales siguientes:

9. $X\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\4 & -5 & 2\\5 & -7 & 3\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\1 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\18 & 12 & 9\\23 & 15 & 11\end{pmatrix}$ Rp. $X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

12. Si $A^{8}=I$, $a\neq 0$, hallar $adj(aA^{5})$. Rp. $a^{n-1}(\frac{A}{|A|})$

13. Si B es la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 10\\2 & 3 & 9\\4 & 5 & 11\end{pmatrix}$, calcular el valor de la suma $S=b_{12}-6b_{23}+b_{31}$. Rp. S=10

14. Si $A=\begin{pmatrix}x+1 & -2 & -2\\-2 & x-2 & -2\\3 & 6 & x+6\end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales la matriz A no es inversible. Rp. X=-3, x=-2

15. Si la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & x & 1\\x-3 & 0 & x-1\\1 & x+2 & 3\end{pmatrix}$ es singular, hallar x. Rp. x=1, x=2

16. Si $A=\begin{pmatrix}Cotgx & Cos(90+x) & 1\\Cscx & Sen(90+x)/Senx & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales la matriz A no es inversible. Rp. $X = k\pi + \frac{\pi}{4}$

17. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & x\\1 & 1 & 1 & x & 1\\1 & 1 & x & 1 & 1\\1 & x & 1 & 1 & 1\\x & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales A no es inversible. Rp. x=1, x=4

18. Si B es la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 2\\1 & 3 & 2 & -3\\-1 & 2 & 1 & -1\\2 & -3 & -1 & 4\end{pmatrix}$, hallar el valor de la suma $S=2b_{23}+3b_{33}+b_{31}$. Rp. S=2

19. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\2 & 4 & 5 & 6\\3 & 9 & 2 & 3\\4 & 6 & 5 & 6\end{pmatrix}$ y B su inversa, hallar $S=2b_{33}+b_{31}+b_{34}$. Rp. S=5

20. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\3 & 5 & 1\\1 & -2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 4 & -3\\3 & 2 & 2\end{pmatrix}$. Si $M=A+A^{t}+B^{-1}$ calcular el valor de la suma: $S=m_{12}+m_{13}+m_{23}$. Rp. S=5.1

3.7.8 RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN DOS VARIABLES

Sea el sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

La ecuación matricial equivalente al sistema, es:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

que representamos por: $AX = C$

donde:

A = Matriz de los coeficientes
X = Matriz de las incógnitas
C = Matriz de los términos independientes.

Para despejar la matriz X, operamos de la siguiente manera:

$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C$

$\rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}C$ (Propiedad asociativa)

$\rightarrow (I)X = A^{-1}C$ (Definición de A^{-1})

$\rightarrow X = A^{-1}C$ (12)

Observación. Para hacer uso de la ecuación (12) y obtener la matriz X, se debe multiplicar A^{-1} por la izquierda de C.

EJEMPLO 1. Resolver el sistema: $3x + 4y = 6$
$5x + 3y = -1$

Solución. Sea $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow D(A) = 9-20 = -11$

Según (11), la inversa de A es: $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

y por (12): $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 22 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Luego, el conjunto solución del sistema es:

$$S = \{(-2,3)\}$$

3.7.9 RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN TRES VARIABLES

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

La ecuación matricial equivalente al sistema es:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

o bien:

$$AX = D$$

donde A, X y D tienen el mismo significado que el dado en 3.7.8

Entonces, si existe A^{-1} y si AX=D, si y sólo si:

$$X = A^{-1}D \qquad (13)$$

EJEMPLO 2. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

Solución. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow D(A)=1(-1+3)-2(2-6)-1(-2+2) = 10$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Luego, la inversa de la matriz A es: $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

Por la ecuación (13): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

Por tanto, el conjunto solución del sistema es:

$$S = \{(1,2,3)\}$$

La siguiente proposición establece una fórmula para resolver un

un sistema de n ecuaciones en n incógnitas. La fórmula en cuestión se conoce con el nombre de:

3.7.10 REGLA DE CRAMER

Si AX=B es un sistema de n ecuaciones en n incógnitas tal que $D(A)\neq 0$, entonces el sistema tiene solución única y está dada por:

$$x_1 = \frac{D(A_1)}{D(A)}\,,\ x_2 = \frac{D(A_2)}{D(A)}\,,\ \ldots\,,\ x_n = \frac{D(A_n)}{D(A)}$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos de la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Demostración, Sea el sistema:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

Si $D(A)\neq 0$, entonces A es inversible y, por la ecuación (12), $X=A^{-1}B$ es la solución única de AX=B. Luego:

$$X = A^{-1}B = \left(\frac{1}{|A|}\right)\operatorname{adj}(A).B = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices obtenemos:

$$X = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el elemento de la fila j-ésima de X es:

$$x_j = \frac{b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}}{D(A)}$$

Donde el numerador es el desarrollo del determinante de la matriz A_j obtenida a partir de A, sustituyendo la j-ésima columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ por el vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

En consecuencia, para j=1,2, ...,n

$$x_j = \frac{D(A_j)}{D(A)} \qquad (14)$$

EJEMPLO 3. Aplicando la Regla de Cramer, resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solución. La matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow D(A)=1(-6+1)+2(4-3)+3(-2+9)=18$$

$$D(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 54 \;;\; D(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 36 \;;$$

$$D(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 18$$

Por tanto, haciendo uso de la fórmula (14) obtenemos:

$$x_1 = \frac{D(A_1)}{D(A)} = 3 \;;\; x_2 = \frac{D(A_2)}{D(A)} = 2 \;;\; x_3 = \frac{D(A_3)}{D(A)} = 1$$

$$\therefore S = \{(3,2,1)\}$$

Observe que la columna $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ se desplaza de la primera a la segunda y después a la tercera columna al resolver para x_1, x_2 y x_3, respectivamente.

La resolución de un sistema de n ecuaciones en n incógnitas mediante la Regla de Cramer, implica calcular n+1 determinantes de matrices de orden n. Debido al gran número de operaciones aritméticos que deben efectuarse, la Regla de Cramer sólo es práctica para el cálculo de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cuando n es pequeño. Cuando $n \geq 4$ se prefiere usar la técnica de la eliminación de Gauss.

EJEMPLO 4. Dado el sistema:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Determinar los valores de λ de modo que el sistema tenga solución única.

Solución. El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$D(A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow D(A) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

Según la Regla de Cramer, el sistema tendrá solución única si el $D(A) \neq 0$, o sea, si $\lambda \neq -2$ ó $\lambda \neq 1$, o bien si $\lambda \in R-\{-2,1\}$.

Veamos que sucede cuando $\lambda=-2$ y $\lambda=1$

Para $\lambda=-2$, la matriz aumentada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-1)]{F_1^2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = E$$

Como $\rho(A)=2 < \rho(E)=3$, el sistema es inconsistente, es decir, no existe solución.

Para $\lambda=1$, la matriz aumentada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = E$$

En este caso: $\rho(A)=\rho(E)=1 < 3$ (número de incógnitas), el sistema tiene infinitas soluciones. El número de variables libres es:

3-1=2, es decir, la solución del sistema depende de 2 parámetros Si designamos a y=r , z=s → x=1-r-s , y el conjunto solución del sistema para λ=1 es:

$$S=\{(1-r-s,r,s)\}$$

EJEMPLO 5. Dado el sistema:

$$\begin{aligned}(2m-1)x - my + (m+1)z &= m-1\\ (m-2)x + (m-1)y + (m-2)z &= m\\ (2m-1)x + (m-1)y + (2m-1)z &= m\end{aligned}$$

Determinar para qué valores de m:

a) El sistema tiene solución única.

b) La solución del sistema depende de un parámetro.

c) El sistema es inconsistente.

Solución. El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & \overset{*}{m+1} \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & -m & m+1 \\ 0 & m-1 & m-2 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)$$

a) Según la Regla de Cramer, el sistema tiene solución única si $D(A)\neq 0$, es decir, si $m\neq 0$, $m\neq 1$, $m\neq -1$, o bien si $m\in R-\{0,-1,1\}$.

Para m=0, la matriz aumentada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{F_1^2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = E$$

Como $\rho(A)=2 < \rho(E)=3$, el sistema es inconsistente.

Para m=1, la matriz aumentada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-3)]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = E$$

Como $\rho(A)=2 < \rho(E)=3$, el sistema es inconsistente.

Para m=-1, la matriz aumentada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1^3(-3)]{F_1^2(-3)} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = E$$

Como $\rho(A) = \rho(E) = 2 < 3$ (número de incógnitas), el sistema tiene infinitas soluciones. Número de variables libres: $3-2=1$

En consecuencia:

b) El sistema depende de un parámetro si $m=-1$

c) El siatema es inconsistente, para $m=0$ y $m=1$.

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, resolver el sistema dado por dos métodos: a) Estableciendo la ecuación matricial $AX=B$. b) Utilizando la Regla de Cramer.

1. $5x-9y=17$, $3x-8y=5$
2. $3x+7y=25$, $4x+5y=13$
3. $7x-11y=32$, $2x - y=7$
4. $x\text{Cos}b - y\text{Sen}b = \text{Cos}c$, $x\text{Sen}b + y\text{Cos}b = \text{Sen}c$
5. $x\text{Tg}b + y = \text{Sen}(b+c)$, $x - y\text{Tg}b = \text{Cos}(b+c)$
6. $2x+y-3z=-2$, $x-2y-4z=4$, $3x+4y-5z=-1$
7. $3x-y-2z=4$, $2x+y+4z=-2$, $7x-2y-z=4$
8. $2x-5y+2z=-2$, $4x+6y-z=23$, $2x+7y+4z=24$
9. $3x-4y-6z=-16$, $4x-y-z=5$, $x-3y-2z=-2$
10. $3x+4y-z=1$, $4x+6y+2z=-3$, $2x-2y-5z=-2$
11. $2x+3y-z=9$, $3x+4y+2z=5$, $x-6y-5z=-9$
12. $2x+3y+11z+5w=2$, $x+y+5z+2w=1$, $2x+y+3z+2w=-3$, $x+y+3z+4w=-3$
13. $3x+4y+z+2w=-3$, $3x+5y+3z+5w=-6$, $6x+8y+z+5w=-8$, $3x+5y+3z+7w=-8$

*14. $3x-2y-5z+w=3$, $2x-3y+z+5w=-3$, $x+2y-4w=-3$, $x-y-4z+9w=22$

Resp. 1. $\{(7,2)\}$ 2. $\{(-3,5)\}$ 3. $\{(3,-1)\}$ 6. $\{(2,-3,1)\}$
4. $\{(\text{Cos}(c-b), \text{Sen}(c-b))\}$ 5. $\{\text{Cos}b\text{Cos}c, \text{Cos}b\text{Sen}c\}$
7. $\{(2,6,-2)\}$ 8. $\{(3,2,1)\}$ 9. $\{(2,-2,5)\}$ 10. $\{(-2,3/2,-1)\}$
11. $\{(-1,3,-2)\}$ 12. $\{(-2,0,1,-1)\}$ 13. $\{(2,-2,1,-1)\}$

Resolver el sistema de ecuaciones.

15. $x + ay + a^2z = a^3$, $x + by + b^2z = b^3$, $x + cy + c^2z = c^3$

Rp. Si a, b y c son todos distintos, $x=abc$, $y=-(ab+bc+ac)$, $z=a+b+c$

16. $(a+3)x + y + 2z = a$, $ax+(a-1)y + z = 2a$, $3(a+1)x + ay+(a+3)z = 3$

Rp. Para $a=0$, $a=1$, el sistema es inconsistente.

17. $ax+ay+(a+1)z = a$, $ax+ay+(a-1)z = a$, $(a+1)x+ay+(2a+3)z = 1$

Rp. Si $a\neq 0$, $x=1-a$, $y=a$, $z=0$. Si $a=0$, $x=1$, $z=0$, y es arbitrario

18. $3ax+(2a+1)y+(a+1)z = a$, $(2a-1)x+(2a-1)y+(a-2)z = a+1$, $(4a-1)x + 3ay + 2az = 1$

Rp. $D(A)=(a-1)^2(a+1)$. Si $a=1$, la sol. depende de un parámetro.

19. $3mx+(3m-7)y+(m-5)z = m-1$, $(2m-1)x+(4m-1)y + 2mz = m+1$, $4mx+(5m-7)y+(2m-5)z = 0$

Rp. $D(A)=-m(m+2)$. Para $m=0$ y $m=-2$, el sistema es inconsistente.

20. $(5a+1)x + 2ay+(4a+1)z = 1+a$, $(4a-1)x+(a-1)y+(4a-1)z = -1$, $2(3a+1)x + 2ay+(5a+2)z = 2-a$

Rp. $D(A)=a(a-1)(a+1)$. Si $a=1$, $a=-1$, el sist. es inc. Si $a=0$, la sol. depende de un parámetro.

21. $(2a+1)x - ay - (a+1)z = 2a$, $3ax-(2a-1)y-(3a-1)z = a+1$, $(a+2)x - y - 2az = 2$

Rp. $D(A)=3(a+1)(a-1)^2$. Si $a=1$ la sol. depende de 2 parámetros. Si $a=-1$ es sist. es inconsistente.

22. $(2a+1)x + 3y + az = a+4$, $(4a-1)x+(a+1)y+(2a-1)z = 2a+2$, $(5a-4)x+(a+1)y+(3a-4)z = a-1$

Rp. $D(A)=(a-1)(a-2)(a-3)$. Si $a=2$ y $a=3$, el sist. es incons. Si $a=1$ la sol. depende de un parámetro.

*

Distribución y Ventas en :
Ediciones e Impresiones Gráficas AMERICA S.R.L.
Jirón Loreto 1696 Breña (Lima 5) - Telefax 325827

PUBLICACIONES DEL AUTOR

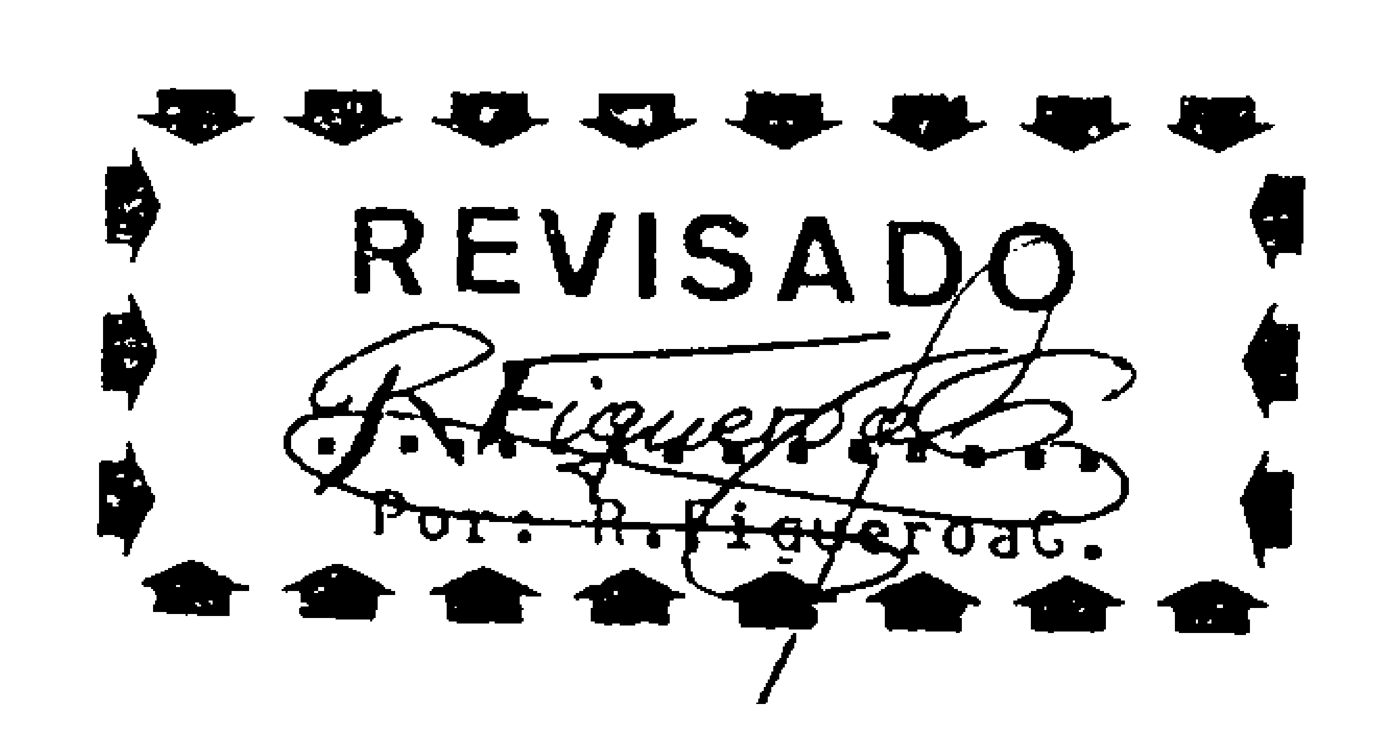
1. MATEMATICA BASICA 1
2. VECTORES Y MATRICES
3. GEOMETRIA ANALITICA
4. CALCULO 1

   TOMOS 1 Y 2
5. SOLUCIONARIO DE GEOMETRIA

   ANALITICA DE CH. LEHMANN
6. SOLUCIONARIO DE EJERCICIOS Y

   PROBLEMAS DE ANALISIS

   MATEMATICO DE G. N. BERMAN.



AMERICA

FL
FreeLibros